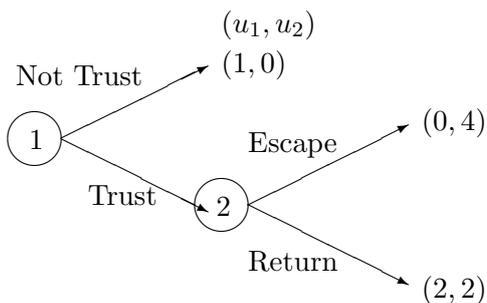


# 2024年度 ゲームの理論 a 演習第2回 (自宅学習用)

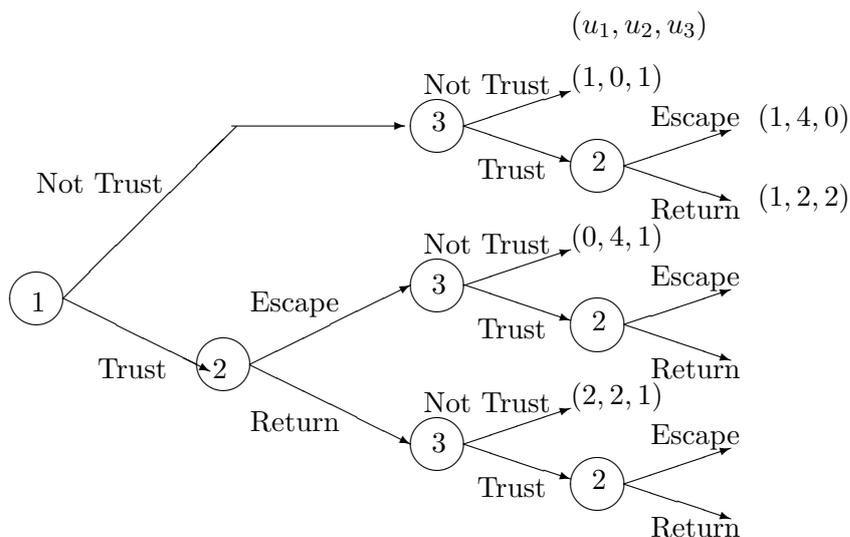
Takako Fujiwara-Greve

- 院生の方は採点して多少成績に加味します。(K-LMS に提出したものを優先します。) 学部生の方は上記どちらかに出せたら提出としてカウントし、CとDの境目のときに使用します。(白紙同然のものはカウントされません。ちゃんとやりましょう。)

1. 以下の完備・完全情報の2人展開形ゲーム  $\Gamma$  を考える。



- $\Gamma$  を誘導標準形にして、混合戦略の範囲で全てのナッシュ均衡を求めなさい。
- 上記のナッシュ均衡の中に、効率的なものはあるか？理由をつけて答えなさい。
- $\Gamma$  の後ろ向き帰納法の解（あるいは部分ゲーム完全均衡）を（混合戦略あるいは行動戦略の範囲で）全て求めなさい。
- $\Gamma$  が相手を変えて2回行われるゲームを考える。1回目と2回目の先手プレイヤーは異なり、1回目の先手をプレイヤー1、2回目の先手をプレイヤー3とする。後手は同じプレイヤー2が2回行う。つまり、以下のような3人ゲームであるとする。引き続き完備・完全情報であるとする。プレイヤー2は2回行動するので、このプレイヤーの利得は2回分を足したものとする。このゲームの樹形図を完成させ、後ろ向き帰納法の解（あるいは部分ゲーム完全均衡）を全て求めなさい。（図では利得ベクトルが全て描かれていない。）



2. 以下の2人同時ゲーム  $G$  を2回繰り返す、完全モニタリング（ただし  $G$  で実現した行動の組み合わせが観察できるということで、混合戦略の観察までは仮定しない、以下同様）の繰り返しゲーム  $G^2$  を考える。 $G^2$  の利得は  $G$  で得られた利得2回分を足したものとする。

P1 \ P2	a	b	c
A	1, 1	2, 1	6, 0
B	0, 1	3, 3	2, 1
C	0, 6	2, 1	5, 5

- (a) 段階ゲーム  $G$  における純戦略（純行動）で実現可能な二人の利得ベクトルの全体を、プレイヤー1の利得を横軸、プレイヤー2の利得を縦軸として図示しなさい。また、 $G$  の純戦略によるナッシュ均衡の利得ベクトルはどこかも、そこに示しなさい。
- (b) 繰り返しゲーム  $G^2$  における各プレイヤーの純戦略の集合をできるかぎり正確に書きなさい。
- (c) 第1期目に  $(C, c)$  という行動の組が起こるような、純戦略による部分ゲーム完全均衡を作りなさい。（二人の戦略の組み合わせで書くこと。どうしてそれが部分ゲーム完全均衡なのかを証明すること。答えは一つではないが、一つ作ればよい。）

3. 問2の  $G$  における各プレイヤーの（純戦略による）minmax 値を以下で定義する。

$$v_1 = \min_{y \in \{a, b, c\}} \max_{x \in \{A, B, C\}} u_1(x, y)$$

$$v_2 = \min_{x \in \{A, B, C\}} \max_{y \in \{a, b, c\}} u_2(x, y)$$

これは、( $G$  の純戦略を動かして) 相手プレイヤーが当該プレイヤーに課すことのできる最小の利得ということである。

$v_1$  と  $v_2$  を求めなさい。

4. 問2の  $G$  を無限回繰り返し、利得は2期以降の  $G$  の利得を  $\delta \in (0, 1)$  で割り引いて合計したものとする、完全モニタリングの繰り返しゲーム  $G^\infty(\delta)$  を考える。授業でやったグリム・トリガー戦略を使って、 $(C, c)$  を無限回行うような部分ゲーム完全均衡を作りたい。

ところで、 $G$  には純戦略のナッシュ均衡が二つあるので、どちらも罰として使用できる。以下の二つのグリム・トリガー戦略の組み合わせ  $(s_1^A, s_2^A)$  と  $(s_1^B, s_2^B)$  で、どちらの方が、より低い  $\delta$  の下で部分ゲーム完全均衡になるか？

$$s_1^A(h) = \begin{cases} C & \text{if } h = \emptyset \text{ (first period)} \\ C & \text{if } h = (C, c)^t \text{ for some } t = 1, 2, \dots \\ A & \text{otherwise.} \end{cases} \quad s_2^A(h) = \begin{cases} c & \text{if } h = \emptyset \text{ (first period)} \\ c & \text{if } h = (C, c)^t \text{ for some } t = 1, 2, \dots \\ a & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$s_1^B(h) = \begin{cases} C & \text{if } h = \emptyset \text{ (first period)} \\ C & \text{if } h = (C, c)^t \text{ for some } t = 1, 2, \dots \\ B & \text{otherwise.} \end{cases} \quad s_2^B(h) = \begin{cases} c & \text{if } h = \emptyset \text{ (first period)} \\ c & \text{if } h = (C, c)^t \text{ for some } t = 1, 2, \dots \\ b & \text{otherwise.} \end{cases}$$