

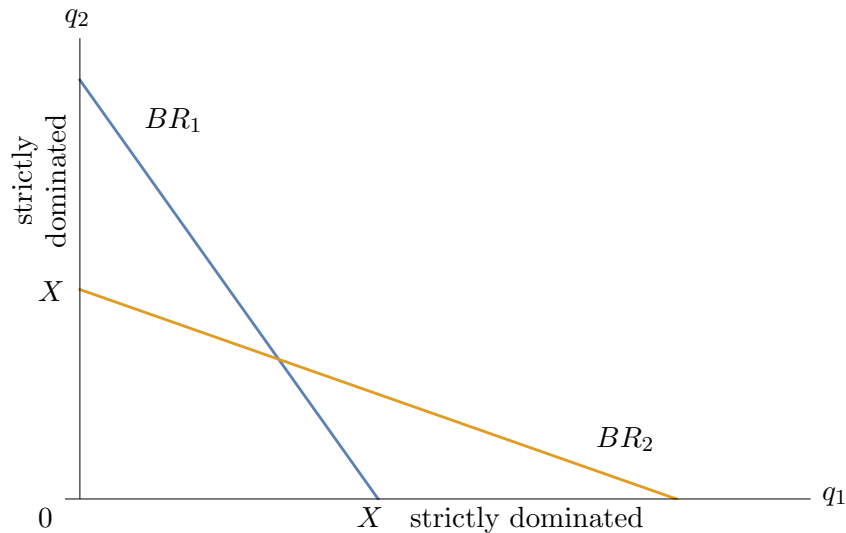
2024年度 ゲームの理論 a 演習第1回 解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) 計算方法は何でもよく、 $X = \frac{A-c}{2b}$ 、 $Y = \frac{1}{2}$ が出ればよい。
 (b) 任意の $q_j \in [0, \infty)$ と任意の $\epsilon > 0$ を固定しておく。このとき、企業 i の戦略 $X + \epsilon$ の利得と戦略 X の利得を比較すると

$$\begin{aligned}\pi_i(X, q_j) &= -b(X - X + Yq_j)^2 + Z \\ &= -b(Yq_j)^2 + Z; \\ \pi_i(X + \epsilon, q_j) &= -b(X + \epsilon - X + Yq_j)^2 + Z \\ &= -b(\epsilon + Yq_j)^2 + Z < -b(Yq_j)^2 + Z.\end{aligned}$$

ゆえに相手の任意の戦略 $q_j \in [0, \infty)$ について X の利得の方が厳密に高いので、 $X + \epsilon$ は X に厳密に支配される。(つまり、 X より厳密に大きい数量は全て X に厳密に支配されることも言えた。)

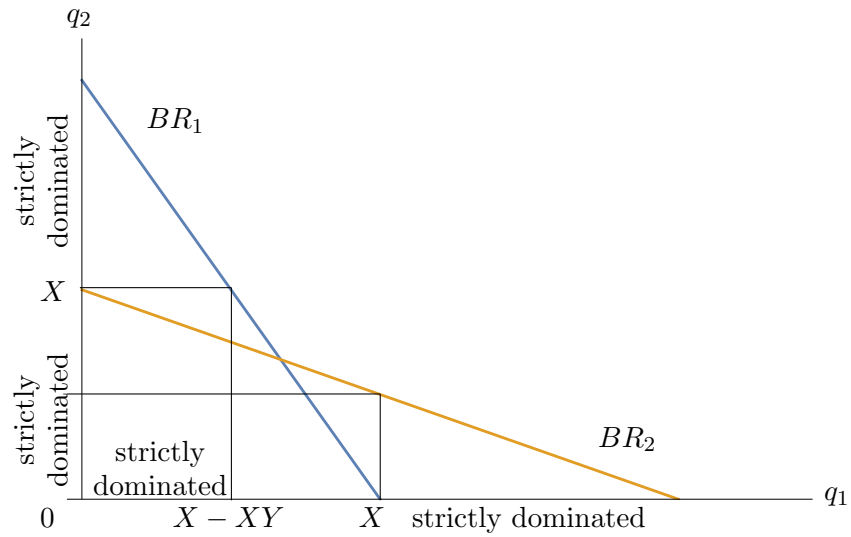


- (c) 任意の $q_j \leq X$ と任意の $\epsilon > 0$ について、企業 i の戦略 $X - XY - \epsilon$ の利得と戦略 $X - XY$ の利得を比較する。

$$\begin{aligned}\pi_i(X - XY, q_j) &= -b(X - XY - X + Yq_j)^2 + Z \\ &= -b\{Y(q_j - X)\}^2 + Z; \\ \pi_i(X - XY - \epsilon, q_j) &= -b(X - XY - \epsilon - X + Yq_j)^2 + Z \\ &= -b\{-\epsilon + Y(q_j - X)\}^2 + Z\end{aligned}$$

ここで、 $q_j \leq X$ であるから $Y(q_j - X) \leq 0$ であり、絶対値は $\{-\epsilon + Y(q_j - X)\}$ の方が $\{Y(q_j - X)\}$ より大きい。ゆえに $\pi_i(X - XY - \epsilon, q_j) < \pi_i(X - XY, q_j)$ となる。

つまり、お互いに $X - XY$ より少ない数量も選ぶことはありえない。



上図のように厳密に支配される戦略を逐次消去していくことができるのがクールノー・ゲームの便利な性質である。(これを繰り返して行くと (d) の答えにもたどり着く。)

(d) 企業 i の最適反応は $BR_i(q_j) = X - Yq_j$ である。連立方程式

$$\begin{cases} q_1 = X - Yq_2 \\ q_2 = X - Yq_1 \end{cases}$$

を解くと、 $q_1^* = q_2^* = \frac{X - YX}{1 - Y^2} = \frac{A - c}{3b}$ 。

2. (a) 最適反応に下線をしたものは以下。ゆえに、純戦略のナッシュ均衡は存在しない。

| | | |
|-------|--------------|--------------|
| 1 \ 2 | L | R |
| U | <u>5</u> , 1 | 1, <u>2</u> |
| M | 0, 1 | 2, <u>2</u> |
| D | -1, <u>2</u> | <u>6</u> , 1 |

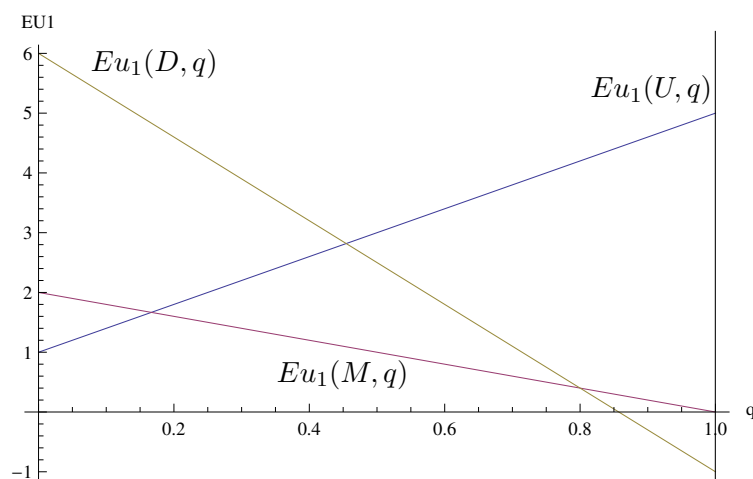
(b) 式は

$$Eu_1(U, q) = 5q + (1 - q) = 1 + 4q$$

$$Eu_1(M, q) = 2(1 - q) = 2 - 2q$$

$$Eu_1(D, q) = -q + 6(1 - q) = 6 - 7q$$

ゆえにグラフは以下の様になる。



(c) グラフからもわかるが、 $Eu_1(D, q) = Eu_1(U, q)$ となる q をまず求めると、

$$1 + 4q = 6 - 7q \Rightarrow q^* = \frac{5}{11}$$

となる。つまり、 $q < 5/11$ のときは $Eu_1(D, q) > Eu_1(U, q)$ であるから、大きい方の $Eu_1(D, q)$ と $Eu_1(M, q)$ を比べてみる。

$$Eu_1(D, q) - Eu_1(M, q) = 6 - 7q - (2 - 2q) = 4 - 5q > 4 - 5 \times \frac{5}{11} = \frac{44 - 25}{11} > 0.$$

ゆえにこのケースでは M は最適反応にならない。

同様に、 $q > \frac{5}{11}$ のときは $Eu_1(D, q) < Eu_1(U, q)$ であるから $Eu_1(U, q)$ と $Eu_1(M, q)$ を比べ、

$$Eu_1(U, q) - Eu_1(M, q) = 1 + 4q - (2 - 2q) = -1 + 6q > -1 + 6 \times \frac{5}{11} = \frac{-11 + 30}{11} > 0.$$

ゆえにこのケースでも M は最適反応にならない。

ちょうど $q = \frac{5}{11}$ のときは U, D およびこの二つを任意の確率で混合した戦略はすべて等しい期待利得 $\frac{31}{11}$ を与える。このとき、M の期待利得は $2 - 2 \times \frac{5}{11} = \frac{22-10}{11} = \frac{12}{11}$ であるから、このケースでも M は最適反応にはならない。(このケースは、上の 2 つのケースのどちらかを等号付きの不等号にして含めてしまってもかまわない。)

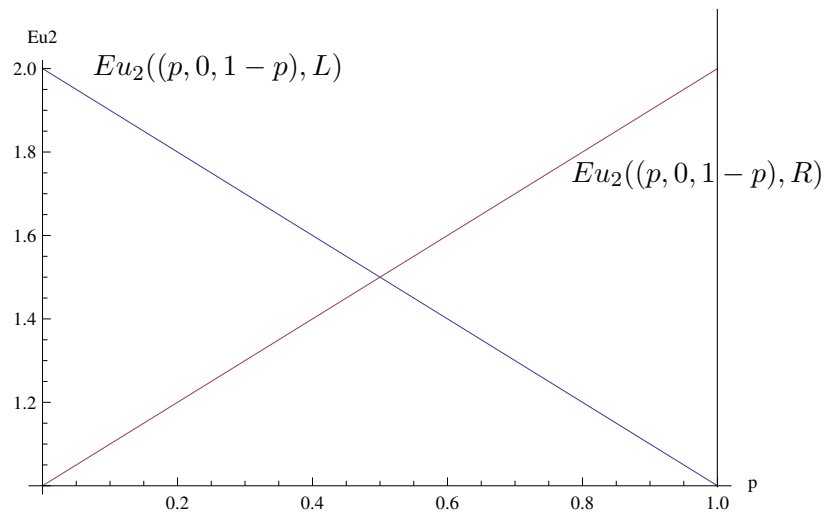
以上で任意の q について M が最適反応でないことが示された。

(d) 式は

$$Eu_2((p, 0, 1-p), L) = p + 2(1-p) = 2-p$$

$$Eu_2((p, 0, 1-p), R) = 2p + (1-p) = 1+p$$

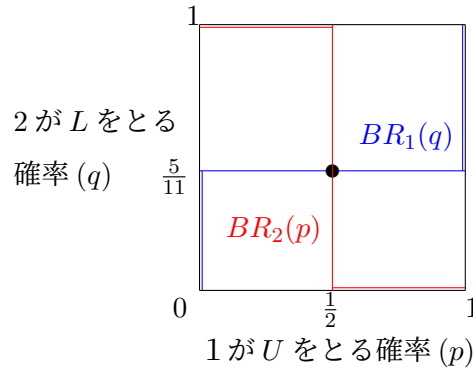
したがってグラフは以下ようになる。



(e) まとめて、最適反応は

$$BR_1(q) = \begin{cases} \{D\} & \text{if } q < \frac{5}{11} \\ \Delta\{D, U\} & \text{if } q = \frac{5}{11} \\ \{U\} & \text{if } q > \frac{5}{11} \end{cases}$$

$$BR_2(p) = \begin{cases} \{L\} & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ \Delta\{L, R\} & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ \{R\} & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$



ゆえにただ一つの混合戦略のナッシュ均衡が存在し、((Uの確率、Mの確率、Dの確率), (Lの確率、Rの確率))の順で書くと、 $((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{5}{11}, \frac{6}{11}))$ である。