2023年度 ゲームの理論a 期末試験 解答

Takako Fujiwara-Greve

- 持ち込み用紙について「切り貼りして表面積を増やしてはいけない」という指示を勝手に解釈して、表面積を増やしていないから切り貼りしてもよい、と行動した人が複数いました。

  しかし、切り貼りされていたら、表面積を増やしていないかを確認せざるを得なくなりますから、指示は要するに「切り貼りしてはいけない、理由は表面積を増やすことができるから」ということだったのです。

  自分の行動が試験監督にどう見られるかを考えるべきでした。

  2022年度の期末試験を見て、「李下に冠を正さず」を理解し、怪しまれそうな行動は控えましょう。ゲーム理論の現実への応用です。

  コピーは可なので、切り貼りした後でコピーすればよいだけです。

1. (a) プレイヤー2のLはCに厳密に支配されている。これを消去してもその後は何も厳密に支配されていないので、残った「均衡」は $\{U, M, D\} \times \{C, R\} = \{(U, C), (U, R), (M, C), (M, R), (D, C), (D, R)\}$ の6つ。

   （部分点は理由が書いてある答案のみ考慮した。また、「均衡」はナッシュ均衡のことだと誤解している人が散見されたが、授業では支配される戦略の逐次消去で「残った戦略の組み合わせ」も理論の予想であり、「均衡」であると説明している。）

   (b) Lを消去した後、プレイヤー1のDを消去するか、その逆を行うといずれにせよ $\{U, M\} \times \{C, R\} = \{(U, C), (U, R), (M, C), (M, R)\}$ の4つが残る。

   （この問題ではたまたま消去の順序が何であっても残る戦略の組み合わせは同じであったが、順序は書くべき。）

   (c) 最適反応に下線をつけた。

P1 \ P2	L	C	R
U	$\underline{4}$, 1	$\underline{3}$, 2	0, $\underline{3}$
M	3, 4	2, $\underline{5}$	$\underline{1}$, 2
D	0, −2	1, −1	$\underline{1}$, $\underline{0}$

   つまり純戦略によるナッシュ均衡はただ一つあって (D, R)。 このように、「他にはない」ところまではっきりさせること。

   これは厳密に支配された戦略を消去した後では残っていたが、弱く支配された戦略を消去すると残っていないので気を付けること。

   (d) ある。以下のようなグリム・トリガー戦略の組み合わせを考える。t 期（$t = 1, 2, \ldots$）までの歴史を $h_t \in [\{U, M, D\} \times \{L, C, R\}]^{t-1}$ と書くと、

$$s_1 = \begin{cases} M & \text{if} \quad h_t = \emptyset \text{ or } \ (M, L)^{t-1} \\ D & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$s_2 = \begin{cases} L & \text{if} \quad h_t = \emptyset \text{ or } \ (M, L)^{t-1} \\ R & \text{otherwise} \end{cases}$$

この戦略の組み合わせを両プレイヤーがしていれば、経路は (M, L) の繰り返しとなる。

どちらかのプレイヤーが (M, L) と違う行動をするとその後は2人は段階ゲームのナッシュ均衡を繰り返すという戦略なので、そのような歴史の後のすべての部分ゲームにおいてそこに制限した (s_1, s_2) の組み合わせはその部分ゲームのナッシュ均衡である。

従って、どちらのプレイヤーも (M, L) に従ってきた、あるいは第1期の空集合の歴史の後で one-step deviation が起きないことを証明すればよい。プレイヤー1は経路上では毎期3をもらうので割引総和は

$$3 + (0.5) \times 3 + (0.5)^2 \times 3 + \cdots = \frac{3}{1 - (0.5)} = 6$$

である。One-step deviation として最適なのは U に逸脱して4をもらうことであり、その後は s_1 に従うとすると毎期1をもらう。このときの割引総和は

$$4 + (0.5) \times 1 + (0.5)^2 \times 1 + \cdots = 4 + \frac{0.5}{1 - (0.5)} = 5$$

であるから、逸脱しない。

同様に、プレイヤー2は経路上で毎期4をもらうので割引総和は $\frac{4}{1-(0.5)} = 8$ である。One-step deviation として最適なのは C をして5をもらうことで、その後は s_2 に従うと毎期0を得る。このときの割引総和は

$$5 + (0.5) \times 0 + (0.5)^2 \times 0 + \cdots = 5$$

であるから、逸脱しない。 □

2. これは有名なホールドアップ問題の一つの例である。労働者が投資して、働いてくれると効率的だが、投資後の交渉を見据えると、実は投資しないという問題である。

   また、ここでは展開形ゲームにおける「戦略」と「経路」についての理解も問うている。

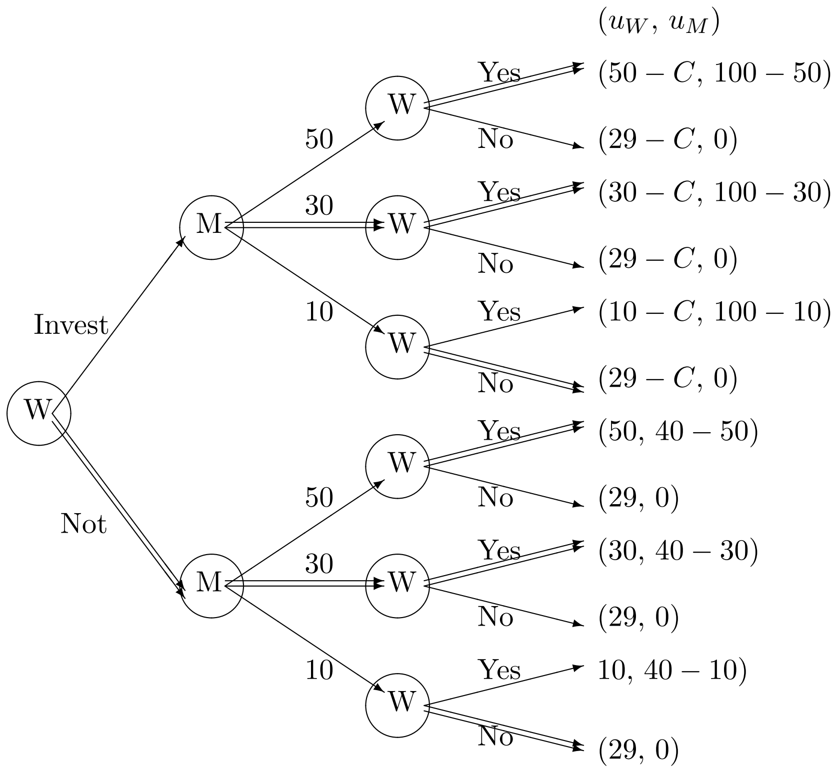
   (a)

あ	い	う	え	お	か
$29 - C$	$10 - C$	$29 - C$	30	10	$40 - 10 (= 30)$

   (b) 労働者が Invest して、Yes となれば二人の利得の和は $100 - C$ となり、$C < 10$ より他の総和 29 や 40 より大きい。(経営者から労働者への報酬は利得の総和に影響しないのがポイント。) そのような終点は3つあり、経路は

   [Invest, 50, Yes], [Invest, 30, Yes] , [Invest, 10, Yes] である。(経路の書き方は採点者にわかるようなら何でもよいが、「戦略はこれこれである」などと明らかに書かないでほしい。)

   (c) 完全情報で、利得も無差別な部分がないので、後ろ向きに解くと純戦略によるただ一つの部分ゲーム完全均衡が出てくる。正しい利得を入れて、各情報集合(ここでは意思決定点でもある)における最適な行動を一つ一つはっきりさせれば(ここでは二重矢印にした)簡単。



労働者の行動計画は、始点、Invest かつ 50 の提案の後、Invest かつ 30 の提案の後、Invest かつ 10 の提案の後、Not かつ 50 の提案の後、Not かつ 30 の提案の後、Not かつ 10 の提案の後の順に書き、経営者の行動計画は Invest と見た後、Not を見た後の順だとすると $(s_W^*, s_M^*) = \Big((\text{Not, Yes, Yes, No, Yes, Yes, No}), (30, 30)\Big)$ となる。
（書き方は採点者にわかるようなら何でもよいし、図を描くのもよいが、答えとして経路しか書かれていない場合減点。人生でも経路だけ考えるのは危機管理が足りないと講義で説明した。）

3. 情報が足りないため、同時ゲームだと売れないが、品質のよいものの売り手がうまくシグナリングすると売れるという例である。

(a) 誘導標準形は以下のようになり、3 つの純戦略によるベイジアン・ナッシュ均衡があり、((Sell, Sell'), Not), ((Not sell, Sell'), Not), ((Not sell, Not sell'), Not) である。（以下では、売り手の戦略の名前を簡略化して、Sell は S、Sell' は S' などと書いた。）

S \ B	Buy	Not
(S, S')	$\underline{70}$, -10	$\underline{12}$, $\underline{0}$
(S, N')	42, $\underline{18}$	$\underline{12}$, 0
(N, S')	40, -28	$\underline{12}$, $\underline{0}$
(N, N')	12, $\underline{0}$	$\underline{12}$, $\underline{0}$

タイプ別プレイヤーを使うと以下のような議論になる。まず各タイプの売り手の利得行列は以下で、最適反応に下線を引いてある。（買い手はタイプがないので利得を入れると混乱するだけである。）

Good (0.6)		
S\ B	Buy	Not
S	<u>70</u>	<u>20</u>
N	20	<u>20</u>

Bad (0.4)		
S\ B	Buy	Not
S'	<u>70</u>	<u>0</u>
N'	0	<u>0</u>

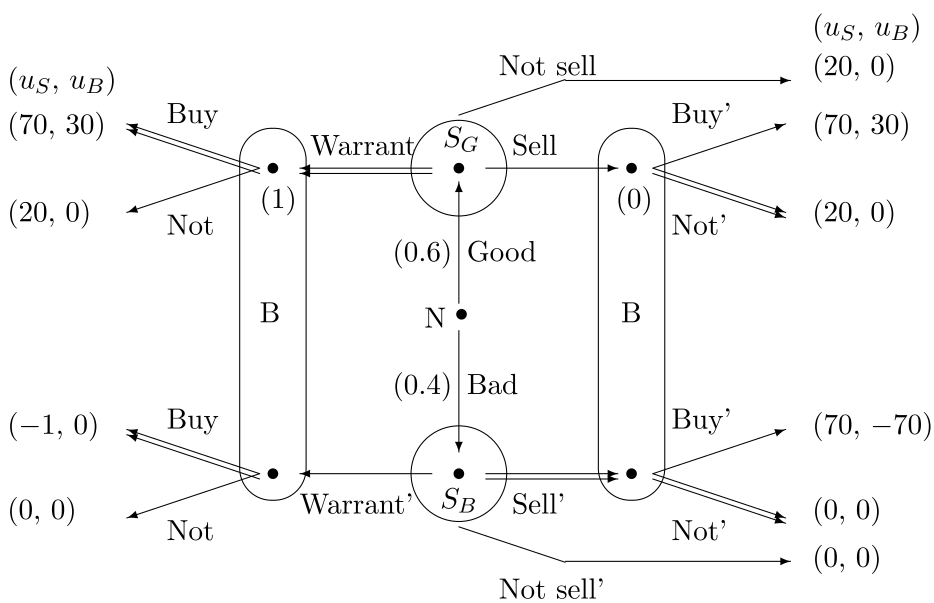
従って、買い手が純戦略 Buy をしているときの各タイプの売り手の最適反応は (S, S') だけである。しかし（仮想的に２人の）売り手がこの戦略の組み合わせを行っている場合、買い手が Buy から得られる期待利得は

$$Eu_B((S, S'), Buy) = (0.6) \cdot 30 + (0.4) \cdot (-70) = -10 < 0 = Eu_B((S, S'), Not)$$

であるので、Buy は最適反応ではない、つまり買い手が純戦略 Buy をするベイジアン・ナッシュ均衡はない。

買い手が純戦略 Not をするときは各タイプの売り手はどちらの純戦略も最適なので、（仮想的に２人の）売り手の最適反応の組み合わせは (S,S'), (S,N'), (N,S'), (N, N') 全てである。これら一つ一つについて、買い手の純戦略 Not が最適反応かを調べる。上の誘導標準形の中に買い手の期待利得は全て計算してあり、Not が最適反応になっているのは (S, S'),(N, S'), (N, N') である。したがって同じ３つのベイジアン・ナッシュ均衡にたどり着いた。

(b) ある。分離戦略なので整合的な信念は $q = 1$, $r = 0$ となる。これに対して買い手の最適な行動計画は Warrant を見たら Buy, Sell を見たら Not' である。下図参照。ということは、左の情報集合では上でも下でも Buy, 右の情報集合では上でも下でも Not' であることに注意。



最後に売り手が最適反応をしているかをチェックする。Good タイプは Sell に逸脱すると売れなくて利得は 20、Not sell に逸脱しても利得は 20 であり、これに対し、Warrant をしておけば利得が 70 であるから逸脱しない。（Not sell をチェックしないと減点。）

Bad タイプは Warrant' に逸脱すると返金となり −1 の利得を得るのがポイント。これより Sell' で売れないときの利得 0 の方がよい。Not sell' のときも利得 0 であるが、Sell' と同じ利得であるので、Sell' が弱い意味で最適である。（Not sell' をチェックしないと減点。）

まとめると $\Big((\text{Warrant, Sell'}), (\text{Buy, Not'}), q = 1, r = 0\Big)$ という戦略と信念の組み合わせは完全ベイジアン均衡である。 □

（しっかり図を描けると簡単である！）