2022年度　ゲームの理論a 期末試験 解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) （双）行列表現は以下である。プレイヤーは対称的なので、どちらが行プレイヤーでもよい。

K \ W	100	10	0
100	60, 60	−75, 150	−90, 160
10	150, −75	15, 15	0, 25
0	160, −90	25, 0	10, 10

(b) 3つの純戦略を確率的に行うこと、または $\{100, 10, 0\}$ という集合上の確率分布が混合戦略である。
あるいは、$(p, q, 1-p-q)$ such that $0 \leqq p \leqq 1$, $0 \leqq q \leqq 1$ というベクトルで、p は 100 を選ぶ確率、q は 10 を選ぶ確率とする、などでも正解とした。
混合戦略の「組み合わせ」について書いてしまったり、混合戦略によるナッシュ均衡について書いてしまったものは得点なし。もっと問題をよく読みましょう。

(c) 戦略 100 と 10 はどちらも戦略 0 に厳密に支配されているので、混合戦略の範囲を考えても唯一つのナッシュ均衡があり、それは $(0, 0)$ である。

(d) ある。これは段階ゲームのナッシュ均衡なので、以下のような戦略を二人共しているという組み合わせを考える。

任意の歴史の後（第1期を含む）で 0 を行う。

対称な形をしているので、任意の一人のプレイヤーについて、任意の歴史の後で、相手が上記の戦略に従っているとき、one-step deviation をしても、その人の割引総利得が高まらないことを示せばよい。one-step deviation をしたところで、ほかの数字を選ぶとその期の利得は厳密に減る。そして将来の利得の列は変わらず $10, 10, \ldots$ である。したがって上記の戦略に従う方が割引総利得は高い。これは任意の $\delta \in (0, 1)$ で成立する。
(戦略としては単純ではあるが、上記のように均衡戦略を歴史に応じた行動計画としてきちんと書いていないと減点。）

(e) ある。例えば、以下のようなグリム・トリガー戦略を二人共行うという戦略の組み合わせを考える。

繰り返しゲームの第1期は 10 を選び、その後は観察された歴史が $(10, 10)$ の繰り返しであったときは 10 を、そうでないとき[1]は 0 を選ぶ。

この戦略を二人共行うという組み合わせが部分ゲーム完全均衡であるには、(1) 歴史が $(10, 10)$ の繰り返しであったときと (2) そうでなかったとき、の2種類の部分ゲームにおいて上記の戦略の組み合わせがナッシュ均衡であればよい。
(2) のような部分ゲームでは、(c) で求めたように両プレイヤーは段階ゲームのナッシュ均衡である $(0, 0)$ を何があっても行っているので、これは任意の δ に関してお互いに最適反応である。
(1) の種類の部分ゲームでは、相手が上記のグリム・トリガー戦略に従っているときに、one-step deviation をしても利得が高くならないことを示せばよい。相手が 10 をしてくるときに最適な逸脱は確実に 0 を選ぶことであり、その後は (2) の部分ゲームに移行するので one-step deviation のときの最大の割引総利得は

$$25 + \delta \cdot 10 + \delta^2 \cdot 10 + \cdots = 25 + \frac{\delta 10}{1-\delta}$$

である。上記のグリム・トリガー戦略に従うときの割引総利得は

$$15 + \delta \cdot 15 + \delta^2 \cdot 15 + \cdots = \frac{15}{1-\delta}$$

[1] ここの部分を「誰かが 0 を選んだとき」などとしてしまうと、全ての歴史について行動計画を完全に記述していないので減点。

であるから

$$\frac{15}{1-\delta} \geqq 25 + \frac{\delta 10}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

ならばこのような部分ゲーム完全均衡が存在する。

2. (a) 戦略の順序は違ってもよいが、その他は指示に従うこと。真部分ゲーム、行列プレイヤー、といった用語を正しく理解していないと正解が書けない。

P1 \ P2	L	R
U	3, 2, 3	0, 3, 2
D	2, 1, 2	1, 2, 1

P3: X

P1 \ P2	L	R
U	1, 3, 1	4, 4, 1
D	3, 2, 3	3, 0, 0

P3: Y

(b) (a) の同時ゲームにおける純戦略に限定すると 2 つナッシュ均衡があり (D,R,X) と (D,L,Y) である。

(c) (b) を踏まえると、プレイヤー 1 が In を選ぶような純戦略による部分ゲーム完全均衡が一つあって、それは ((In, D), L, Y) という組み合わせである。(プレイヤー 1 の戦略は 2 つの情報集合における行動計画として書くこと。これがどうして部分ゲーム完全均衡かを後ろ向きに証明する。まず、In のあとの真部分ゲームでは (b) で求めたようにナッシュ均衡が行われている。次に前に戻るとプレイヤー 1 の最初の情報集合になる。ここで In を選ぶと利得が 3 であるが Out を選ぶと利得が 2 となっているので In を選ぶのがプレイヤー 1 にとって最適になっている。

プレイヤー 1 が Out を選ぶような戦略による部分ゲーム完全均衡もあって、それは ((Out, D), R, X) である。これも後ろ向きに証明する。In の後の真部分ゲームでは (b) で求めたようにナッシュ均衡である。次に最初の情報集合を考えると、In を選ぶとプレイヤー 1 の利得は 1，Out を選ぶと利得が 2 なので、Out が最適になっている。

3. (a) この一括戦略の下では $q = 0.2$ が整合的な信念である。このとき、F が Hit を選ぶと期待利得は $(0.2) \cdot 10 + (0.8) \cdot (-1)$ で、これは Ignore の期待利得 $(0.2) \cdot (-10)$ より大きいから Hand を見た後は F の最適行動は Hit である。

経路外の Not/Not' を見たときは、どんな r であっても Ignore' が最適である。しかし、F が Not/Not' のとき Ignore' を選ぶのであれば、どちらのタイプの P も Hand/Hand' から逸脱した方が利得が高まる。つまりこのような一括戦略が行われる完全ベイジアン均衡は存在しない。

(b) この一括戦略の下では $r = 0.2$ が整合的な信念である。(a) で見たように Not/Not' の後では F の最適な行動は Ignore' である。

もし、Hand/Hand' の後でも Ignore が行われるなら、thief タイプの P は利得が 0 から 10 に高まるので一括戦略から逸脱する。したがって Not/Not' という一括戦略が行われるとしたら Hand/Hand' のときには Hit が行われなければならない。

q という信念の下での Hit の期待利得は $q \cdot 10 + (1-q) \cdot (-1) = 11q - 1$。Ignore の期待利得は $q \cdot (-10)$ であるから Hit が F の最適行動である条件は

$$11q - 1 \geqq -10q \iff q \geqq \frac{1}{21}$$

である。つまり無限個の完全ベイジアン均衡が存在し以下のような形をしている

$(s_P, s_F, q, r) =$ ((Not, Not'), (Hit, Ignore') , $q, 0.2)$ で q は $1/21$ 以上の任意の実数。

(c) 李下に冠を正さずは完全ベイジアン均衡であった、などを期待していた。似たような意義を考えていたら点をあげている。