2022年度　ゲームの理論 a 演習第2回　解答

Takako Fujiwara-Greve

1. 左辺 $\max_{x_i \in X,\ y_{ij} \in Y(x_i)} u(x_i, y_{ij})$ が自由に行動を動かして利得を最大にしたということで、もっとも高い利得を表している。右辺はまず 2 期目の各意思決定点で最大化を行い、それを踏まえて 1 期目で行動を選ぶときの利得である。（数式はカッコ内から先に計算するのである。）つまり右辺が後ろ向き帰納法で得られる利得である。

   したがって、左辺 $\geqq$ 右辺であることは定義から出る。

   右辺 $\geqq$ 左辺であることを証明すればよい。

   任意の $x_i \in X$ について、max の定義より

$$\max_{y_{ij} \in Y(x_i)} u(x_i, y_{ij}) \geqq u(x_i, y_{ij}), \quad \forall y_{ij} \in Y(x_i)$$

   が成立する。この不等式の両辺を x_i と $y_{ij} \in Y(x_i)$ を自由に動かして最大化すると、不等式の向きは変わらないので

$$\max_{x_i \in X,\ y_{ij} \in Y(x_i)} [\max_{y_{ij} \in Y(x_i)} u(x_i, y_{ij})] \geqq \max_{x_i \in X,\ y_{ij} \in Y(x_i)} u(x_i, y_{ij}) \tag{1}$$

   が成立する。ところで、$[\max_{y_{ij} \in Y(x_i)} u(x_i, y_{ij})]$ は x_i のみの関数だから

$$\max_{x_i \in X,\ y_{ij} \in Y(x_i)} [\max_{y_{ij} \in Y(x_i)} u(x_i, y_{ij})] = \max_{x_i \in X} [\max_{y_{ij} \in Y(x_i)} u(x_i, y_{ij})]$$

   であり、(1) 式は

$$\max_{x_i \in X} [\max_{y_{ij} \in Y(x_i)} u(x_i, y_{ij})] \geqq \max_{x_i \in X,\ y_{ij} \in Y(x_i)} u(x_i, y_{ij})$$

   と同じことなのである。 □

2. まず、戦略とは各情報集合において行動を決めるものであることを復習しておくこと。

   (a) この 1 人ゲームにおいては P は 2 つの情報集合を持つ、つまり Nature の選択結果を見ることができるということである。したがって、上の情報集合 (Good を見た後）は 2 つの終点の利得を比較して y_{11} が最適行動。下の情報集合 (Bad を見た後）は y_{22} が最適行動である。まとめると、最適な戦略は、上の情報集合、下の情報集合の順に書くと (y_{11}, y_{22}) のように書ける。（同じ趣旨なら読者にわかるように書いてあればよい。）

   おまけ：ただし、この戦略から得られる利得にはリスクがある。つまり事前にはこの戦略から得られる利得は確率 0.2 で 10、確率 0.8 で 9 である、ということである。

   (b) この 1 人ゲームにおいては P は唯一つの情報集合を持っているので、x_1, x_2 のどちらがよいかは期待利得を比較する。x_1 を選んだときの期待利得は

$$(0.2) \cdot 10 + (0.8) \cdot 8 = 8.4$$

   x_2 を選んだときの期待利得は

$$(0.15) \cdot 7 + (0.8) \cdot 9 + (0.05) \cdot 5 = 8.5$$

   であるから、最適戦略 (= 最適行動）は x_2 である。