2021年度　ゲームの理論a 期末試験 解答

Takako Fujiwara-Greve

- 久々の対面試験だったせいかもしれませんが、答案用紙の裏面に書くときに「縦にめくる」ように書けていない人が多々いました。ちゃんと答案用紙には指示が表面に、矢印が裏面に書いてあります。

1. (a) （双）行列表現は以下のようになる。（戦略の順番はこれと異なってもよい。）

A \ B	95	97	99
95	95, 95,	190, 0	190, 0
97	0, 190	97, 97	194, 0
99	0, 190	0, 194	99, 99

どちらのプレイヤーにとっても 99 は相手が何をしても 95 に厳密に支配されるので、この戦略は混合戦略の範囲で、ナッシュ均衡でプレイされることはない。（注：一部の人が 99 は 97 に厳密に支配されていると書いていたが、相手が 95 を選んでいるときはこちらが 99 を選んでも 97 を選んでも同じ 0 という利得なので、99 は 97 には厳密に支配されていない。）

お互いに 99 はありえないとき 97 は 95 に厳密に支配されるので、この戦略も混合戦略の範囲で均衡になりえない。

したがって混合戦略の範囲でもただ一つのナッシュ均衡しかなく、$(s_A^*, s_B^*) = (95, 95)$ である。（戦略の組み合わせであるように書くこと。）

（おまけ：プレイヤーの名前が A, B なので、さらに彼らの戦略の名前まで A, B とするのはよくないです。行列表現の左上の $A \setminus B$ の意味はプレイヤーの名前ということで、戦略の代表的な名前ということではありません。授業では言いました。）

(b) 以下のような（グリム）トリガー戦略を両プレイヤーが行うことは $\delta \geqq \frac{95}{99}$ のとき部分ゲーム完全均衡となる。
「最初の月と、これまで両店がずっと 99 を維持してきた月は 99, そうでなかったら 95 をつける。」

証明：

このゲームは対称的であり、上記のトリガー戦略もどちらのプレイヤーも同じであるので、任意のプレイヤーを1人固定する。部分ゲーム完全均衡であることを示すには history を2種類にわけて、どちらのケースでも、相手が上記のトリガー戦略に従っているとき、自分もトリガー戦略に従うことが最適であることを示せばよい。いずれも動的計画法を用いて、全ての one-step deviation からの割引総利得が上記のトリガー戦略の割引総利得を上回らないことを示すことになるが、そのためには最も割引総利得が大きい one-step deviation と比較すればよい。

どちらかの店が 99 以外の価格をつけたことのある history のとき：

今月も今後も相手は何があろうと 95 である。従って、今月自分が 95 以外の任意の one-step deviation の価格をつけても、0 または 95 という利得を得る。来月以降はトリガー戦略に従うとずっと 95 の利得を得る。このことから、全ての one-step deviation からの割引総利得が上記のトリガー戦略の割引総利得を上回らないことが言える。（しかも δ は何でもよい。）ここまで書けるとベスト。

最初の月、またはこれまで両店がずっと 99 を維持してきた history のとき：

最も割引総利得が大きい one-step deviation は 97 をつけることである。（95 ではない。）この時今月は 194 の利得を得るが、来月からはトリガー戦略に従うと「どちらかの店が 99 以外の価格をつけたことのある history」の後のトリガー戦略なので、両者が 95 をつけて、毎月 95 の利得となる。したがって、one-step deviation の利得の最大値は

$$194 + \delta \cdot \frac{95}{1-\delta}.$$

これに対し、トリガー戦略にずっと従っていると、相手もずっと 99 をつけてくれるので、割引総利得は

$$\frac{99}{1-\delta}$$

である。トリガー戦略が最適である条件は

$$\frac{99}{1-\delta} \geqq 194 + \delta \cdot \frac{95}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{95}{99}$$

となる。どちらかの店が 99 以外の価格をつけたことのある場合にトリガー戦略が最適である条件には δ は関係していなかったので、合わせて

$$\delta \geqq \frac{95}{99}$$

のとき部分ゲーム完全均衡である。 □

（おまけ：「これまでの history がずっと (99,99) ならば (99,99) をする戦略」という書き方をしている人が散見されました。これは戦略の組み合わせのつもりかもしれないけど、「均衡とは全てのプレイヤーの戦略を並べたもの」と教えていますから、まずは 1 人のプレイヤーの戦略としての（グリム）トリガー戦略

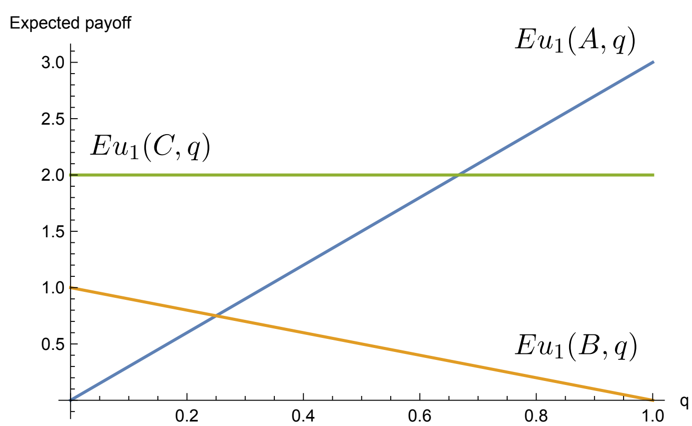
「最初の月と、これまで両店がずっと 99 を維持してきた月は 99, そうでなかったら 95 をつける。」

を書いて、両店が上の戦略をとっている組み合わせが部分ゲーム完全均衡であることを証明する、というように議論をしてください。ただし、本質的な計算が正しければ、書き方では減点はしていません。展開形ゲームの戦略とは何か、ゲームの均衡とは何か、を正しく理解してください。）

2. (a) （今回はこの問題がおそらく最も難しい。）まず、プレイヤー 3 はただ一つの最適戦略があって、純戦略の F である。すべての部分ゲーム完全均衡はこれを含まなくてはならない。あとはプレイヤー 1 と 2 についての最適反応を求めるために、以下のような「縮小」された（双）行列表現を考えれば良い。（プレイヤー 3 の利得は関係ないので省略しているが書いてもよい。グレーヴァにわかるように書くこと。）

1 \ 2	D	E
A	3, 1	0, 0
B	0, 1	1, 2
C	2, 0	2, 0

この 2 人ゲームには純戦略のナッシュ均衡 (A,D) と (C,E) の他に混合戦略の均衡がある。プレイヤー 2 が D をする確率を q とすると、プレイヤー 1 の各純戦略の期待利得は以下のような関係になる。



したがって、$0 \leqq q \leqq \frac{2}{3}$ の場合、プレイヤー 1 の最適反応は純戦略 C である。また、プレイヤー 1 が純戦略 C をしているとき、プレイヤー 2 は任意の混合戦略が最適反応であるから $q * D + (1-q) * E$ かつ $0 \leqq q \leqq \frac{2}{3}$ であるような混合戦略もそうである。

まとめると、部分ゲーム完全均衡は

(A, D, F) および、(C, q *D + (1-q)* E, F) で $0 \leqq q \leqq \frac{2}{3}$ となるすべての組み合わせである。

(b) このゲームには純戦略の部分ゲーム完全均衡しかなく、(A, (D,E’), F) である。

3. お詫び : 問題文の中に「Safe タイプの政府が No Test' を選んだ後に国民が Home を選ぶと国民の利得は 1 である」という説明が抜けていました。しかし図にはすべての利得を書いてあるので、問題はなかったと思います。

(a) $(u_G, u_P) = (0.9, 4.1)$

(b) $(u_G, u_P) = (2.7, 2.3)$

(c) ない。（ちなみに p の値は関係ない。）分離戦略の下で $r = 0$ が整合的な唯一の信念である。このとき P は No Test/No Test' を見た後 Out を選ぶのが最適である。すると Risky タイプの政府は Test を選ぶと期待利得は 0.9 なのに対し、No Test に変更すると利得が 3 に高まるので分離戦略から逸脱する。

(d) ある。完全ベイジアン均衡は ((No Test, No Test'), Out, $r = 0.1$) というただ一つの組み合わせである。$r = 0.1$ は一括戦略 (No Test, No Test') の下で唯一の整合的な信念である。このとき $Eu_P(Home, r) = (0.1)5+(0.9)1 = 1.4$、$Eu_P(Out, r) = (0.1)0 + (0.9)2 = 1.8$ であるから Out が最適である。Risky タイプは Test に逸脱すると期待利得は 0.9 であるが No Test だと 3 を得られるので逸脱しない。 Safe タイプも Test' に逸脱すると期待利得は 2.7 であるが、No Test' だと利得は 3 であるから逸脱しない。