2020 年度　ゲームの理論 a 演習第 2 回解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) (x, X) と (y, Y) のみ。 対称ゲームなので P1 の最適反応について計算する。相手の混合戦略が $(q, 1-q)$（q は X を行う確率）であるとき

$$Eu_1(x, q) = 2q$$
$$Eu_1(y, q) = 0$$

で、あり、P1 の任意の混合戦略 $(p, 1-p)$（p は x を行う確率）はこの 2 つの期待利得の凸結合

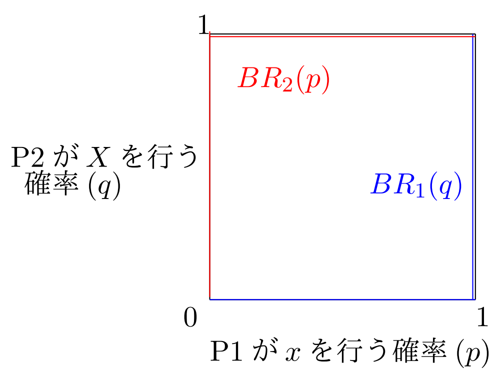
$$Eu_1(p, q) = pEu_1(x, q) + (1-p)Eu_1(y, q) = 2pq$$

である。したがって、$q = 0$ のときだけ全ての混合戦略が最適反応で、 $q > 0$ のときは純戦略 x だけが最適反応である。これは P2 についても同様である。したがって、お互いに最適反応であるような混合戦略の組み合わせとしても (x, X) と (y, Y) しかない。
最適反応対応は

$$BR_1(q) = \begin{cases} x & \text{if } q > 0 \\ \Delta\{x, y\} & \text{if } q = 0 \end{cases}$$

$$BR_2(p) = \begin{cases} X & \text{if } p > 0 \\ \Delta\{X, Y\} & \text{if } p = 0 \end{cases}$$

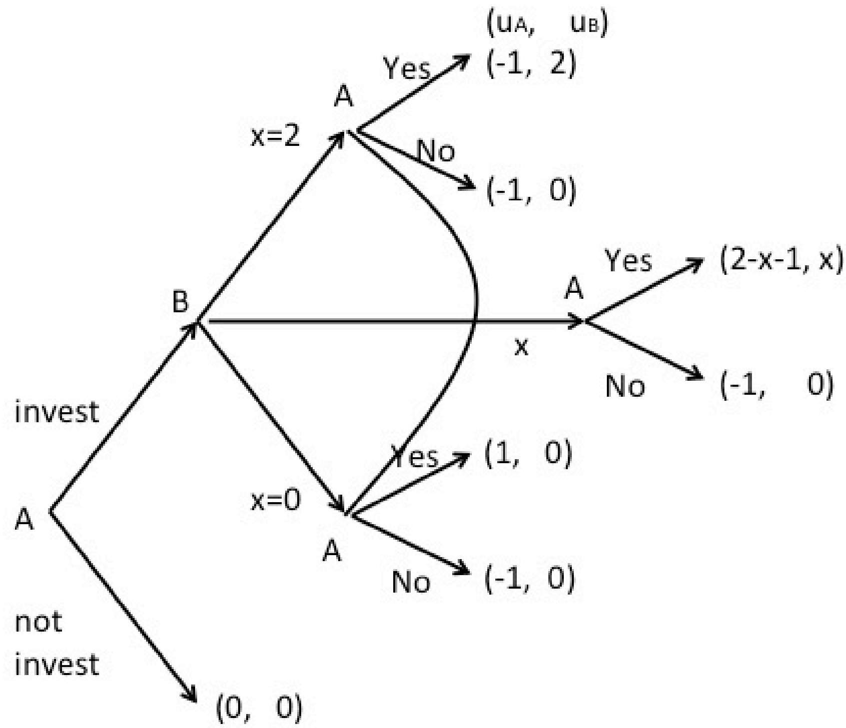
であり、これらを図示すると



となるので、交点は $(1, 1)$(これが (x, X) に対応）と $(0, 0)$（(y, Y) に対応）の 2 つしかないことがわかる。

(b) (x, Z) のみ。まず P2 にとって X は Y に厳密に支配される戦略なので、いかなるナッシュ均衡においても正の確率がつくことはない。このことから P1 にとって y と z は x に厳密に支配されているので、これらもナッシュ均衡において正の確率がつくことはない。P1 が x しかしないのであれば、P 2 は Z を行うことだけが最適反応である。（教科書の命題 3.5.2 は純戦略についてしか証明していないが、ほぼ同じ議論なのでそれを引用してもよいとする。）

2. (a) 次ページ参照。



(b) $S_A = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in \{\text{invest, not invest}\},\ a_2 : [0,2] \to \{\text{Yes, No}\}\}$. $S_B = [0,2]$.

(c) 最後の意思決定者である A から考える。２通りの最適な行動計画があり、

$$a_2^*(x) = Yes,\ \forall x \in [0,2]$$

と

$$a_2^{**}(x) = \begin{cases} Yes & \text{if } x < 2 \\ No & \text{if } x = 2 \end{cases}$$

である。しかし、A が a_2^{**} を行うとすると B には最適な行動（戦略）が存在しないので、均衡にならない。

A が a_2^* を行なっている場合は B の最適な行動（戦略）は $x = 2$ である。

さらに戻って最初の A の手番においては、これらを踏まえると not invest が最適な行動となる。したがって、このゲームにはただ一つの後ろ向き帰納法の解があり、それは

$$(s_A^*, s_B^*) = ((\text{not invest}, a_2^*), 2)$$

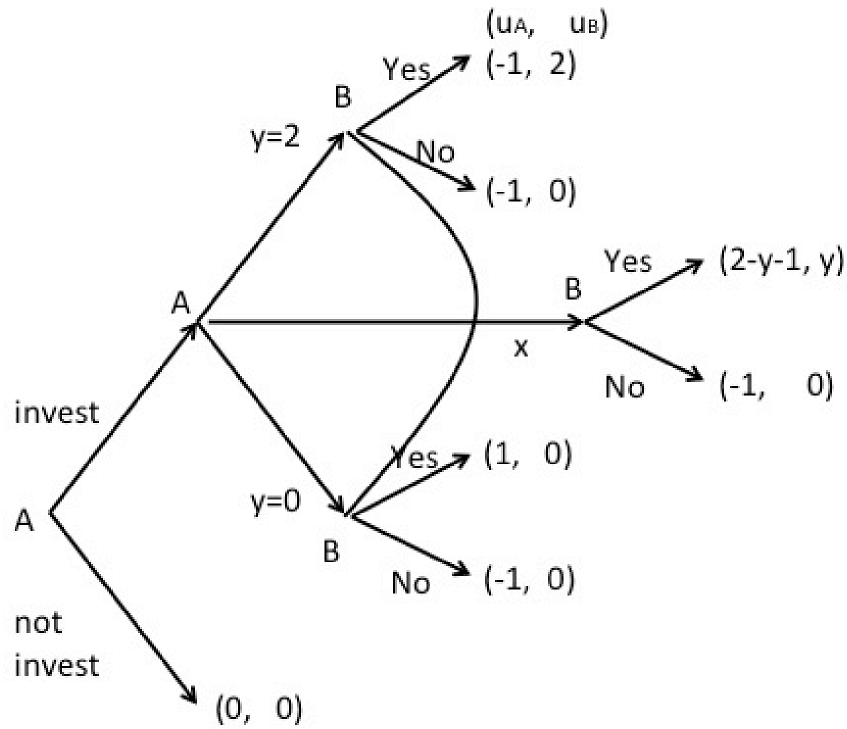
という行動計画の組み合わせである。

(d) 今度は次ページのような樹形図になり、最後の意思決定者は B である。B の最適な行動計画が２通りあり、

$$b^*(y) = Yes,\ \forall y \in [0,2]$$

と

$$b^{**}(y) = \begin{cases} Yes & \text{if } y > 0 \\ No & \text{if } y = 0 \end{cases}$$



である。再び、b^{**} に対して A の直前の手番における最適な行動が存在しないので、b^* のときだけを考える。これに対する A の最適な提案は $y = 0$ である。これを踏まえて最初の A の手番を考えると invest が最適な行動となる。したがって、このゲームにはただ一つの後ろ向き帰納法の解があり、それは

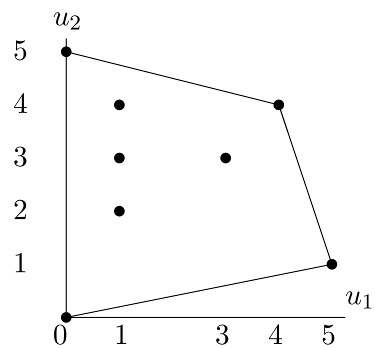
$$\left(s_A^*, s_B^*\right) = \left((\text{invest}, 0), b^*\right)$$

という行動計画の組み合わせである。

(e) (c) のゲームの帰結は hold-up 問題といわれるものである。A が投資すれば、例えば $x = 0.5$ のとき $(0.5, 0.5)$ という、not invest のときの利得の組み合わせ $(0, 0)$ をパレート改善する帰結が可能であるが、均衡では invest はできない。この理由は A が投資しても、その費用を回収できるような交渉がその後で可能でないからである。

これに対し (d) のゲームの均衡では投資が行われて、少なくとも $(0, 0)$ を弱い意味でパレート改善する帰結になっている。この理由は A の交渉力が高い状況になっているからである。投資後の部分ゲームは最後通牒ゲームであり、そこでは先手が圧倒的に有利なのである。ということで、交渉力によって結果が変わるとか、投資させるのは簡単ではないとか。

3. (a) 実現可能な利得ベクトルの集合は以下の図の直線で囲まれた部分。



(b) グリム・トリガー戦略を以下のように作ればよい。

P1 の戦略：第 1 期は y を行い、その後はこれまで誰も (y, Y) から逸脱していなかったら y、誰かが (y, Y) から逸脱していたら x を行う。

P2 の戦略：第 1 期は Y を行い、その後はこれまで誰も (y, Y) から逸脱していなかったら Y、誰かが (y, Y) から逸脱していたら Z を行う。

上記の戦略の組み合わせが、完全モニタリングの無限回繰り返しゲームにおいて部分ゲーム完全均衡になるための δ の範囲を求める。

まず、誰かが (y, Y) から逸脱した歴史の後の部分ゲーム群においては両プレイヤーは段階ゲームのただ一つのナッシュ均衡を「何があっても」行っているので、それらの部分ゲームにおいては任意の δ についてナッシュ均衡である。

そこで、第 1 期を含め、誰も (y, Y) から逸脱していない歴史の後の部分ゲーム群を考える。相手は上記のグリム・トリガー戦略に従っているとして、動的計画法により、この部分ゲームの最初の期だけ上記のグリム・トリガー戦略でない行動をして、次の期からは上記のグリム・トリガー戦略に戻るという one-step deviation と利得を比べればよい。

P1 について：P2 がグリム・トリガー戦略に従っていて、自分が one-step deviation をすると、最大で逸脱した期は 5 が得られるが、その後は (x, Z) をずっと行うことになるので利得の列は $1, 1, \ldots$ である。グリム・トリガー戦略から逸脱しなければ利得はずっと $4, 4, \ldots$ である。したがって one-step deviation がグリム・トリガー戦略より長期利得が大きくない条件は

$$5 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 + \cdots = 5 + \delta \frac{1}{1-\delta} \leqq 4 + \delta \cdot 4 + \delta^2 \cdot 4 + \cdots = \frac{4}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{1}{4}.$$

P2 について：P1 がグリム・トリガー戦略に従っていて、自分が one-step deviation をすると、最大で逸脱した期は 5 が得られるが、その後は (x, Z) をずっと行うことになるので利得の列は $2, 2, \ldots$ である。（ここが違う。）したがって、P2 にとって one-step deviation がグリム・トリガー戦略より長期利得が大きくない条件は

$$5 + \delta \cdot 2 + \delta^2 \cdot 2 + \cdots = 5 + \delta \frac{2}{1-\delta} \leqq 4 + \delta \cdot 4 + \delta^2 \cdot 4 + \cdots = \frac{4}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{1}{3}.$$

この両方が成り立たないとならないので、上記のグリム・トリガー戦略の組み合わせが部分ゲーム完全均衡になる δ の範囲は

$$\delta \geqq \frac{1}{3}$$

である。