2017年度　ゲームの理論a 期末試験解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) 行列表現は以下のようになる。

P1 \ P2	A	B
A	4, 1	0, 0
B	0, 0	1, 4

プレイヤー２の混合戦略を２がAを行う確率qで表すと、

$$Eu_1(A,q) = 4q$$
$$Eu_1(B,q) = (1-q)$$

より、

$$BR_1(q) = \begin{cases} \{A\} & \text{if } q > \frac{1}{5} \\ \Delta\{A,B\} & \text{if } q = \frac{1}{5} \\ \{B\} & \text{if } q < \frac{1}{5} \end{cases}$$

プレイヤー１の混合戦略を１がAを行う確率pで表すと、

$$Eu_2(p,A) = p$$
$$Eu_2(p,B) = (1-p)4$$

より、

$$BR_2(p) = \begin{cases} \{A\} & \text{if } p > \frac{4}{5} \\ \Delta\{A,B\} & \text{if } p = \frac{4}{5} \\ \{B\} & \text{if } p < \frac{4}{5} \end{cases}$$

ゆえに混合戦略の範囲でナッシュ均衡は３つあり（純戦略も、もちろん degenrate な混合戦略と考える）、純戦略によるナッシュ均衡(A,A), (B,B)と厳密な混合戦略によるナッシュ均衡$(\frac{4}{5}A+\frac{1}{5}B, \frac{1}{5}A+\frac{4}{5}B)$（あるいは$((\frac{4}{5},\frac{1}{5}),(\frac{1}{5},\frac{4}{5}))$など、どちらがAの確率かわかるように書いてあればよい）である。

注：いまだに（おそらく講義に出ていない人たち）、均衡は (4,1) などと書いている人がいるのであきれる。非協力ゲーム理論が予想するのは「戦略の組み合わせ」である。

(b) ある。プレイヤー１の純戦略を（始点の情報集合における行動、Burn後の情報集合における行動、Not後の情報集合における行動）、プレイヤー２の純戦略を（Burn後の情報集合における行動、Not後の情報集合における行動）として書くと、((Burn, A,B), (A, B)) は部分ゲーム完全均衡である。

なぜなら、Burn後のプレイヤー１のただ一つの意思決定点からなる情報集合から始まる部分ゲームにおいては (A,A) というナッシュ均衡が、Not後のプレイヤー１のただ一つの意思決定点からなる情報集合から始まる部分ゲームにおいては (B,B) というナッシュ均衡が行われ、これを踏まえると、プレイヤー１の始点の情報集合においては Burn を選ぶと利得は2、Notを選ぶと利得は1であるから最適な行動がBurnである。（証明がないと減点。）

注：これは、「アメとムチ」の変形バージョンなのである。２回繰り返し面会ゲームを復習しよう。正解にたどり着けなかったパターンは、（１）均衡経路だけを見ていて、Burnを選ばなかったらどうなるかを考えていないので、Burnが最適行動になる論理を発見できない、（２）樹形図を誤解して（直前演習で扱った例からの類推という文系的発想と思われる）、真部分ゲームがないなどと思った。である。　講義の最後に、「過去問などからの類推をせず、今直面しているゲームを正しく理解すること」「概念の定義を理解してくること」（真部分ゲームとは？）と言ったはずです。

(c) Burn 後の真部分ゲームと Not 後の真部分ゲームにおける純戦略のナッシュ均衡の組み合わせは (b) の他に、(A,A), (A, A) のとき、(B,B), (A,A) のとき、(B,B), (B,B) のときがある。これらそれぞれを踏まえて、プレイヤー１の始点における最適行動を考えると純戦略の部分ゲーム完全均衡が全て求まる。

(b) のときと同様な順で行動計画を書くと、

((Burn, A,B), (A, B)), ((Not, A, A), (A, A)), ((Not, B, A), (B, A)), ((Not, B, B), (B, B)) の４つが純戦略による部分ゲーム完全均衡の全てである。

（各プレイヤーの「行動計画」の組み合わせとして書かないと多少減点。）

2. (a) Y には厳密に支配される戦略 y_1 があるので (y_3 に厳密に支配される)、これが消去できるが、X にはない。残った純戦略の組み合わせの集合は $\{x_1, x_2, x_3\} \times \{y_2, y_3\}$ である。

(b) K_0 と K_1 が成立していると、２人は (a) より下の図に直面する。

X \ Y	y_2	y_3
x_1	1, 4	1, 3
x_2	3, 1	3, 3
x_3	2, 0	5, 1

X は「Y は y_1 を採るはずがない」ことが推論できるので、x_1 は x_2 や x_3 に厳密に支配されることになり、採らない。しかし、Y は「X はまだ３つの純戦略のどれも採る可能性がある」と推論する。（Y は「X が Y の利得関数を知っている」ことは知らない。）従って Y は y_2, y_3 のいずれも採らないとは言えない。残った純戦略の組み合わせの集合は $\{x_2, x_3\} \times \{y_2, y_3\}$ となる。

3. (a) 事前の期待利得は、投資すると $p(-5) + (1-p)10$ で投資しないと 0 であるから、投資するのが最適な p の範囲は $p \leqq 2/3$ である。（等号を含む。投資するのとしないのが両方最適ということなだけ。）

(b) 完全ベイジアン均衡があるとすれば、整合性から Black/Black' 後の信念は $r = p$ となる。このとき、投資家 I_B が投資するのは (a) で見たように $p \leqq 2/3$ のときである。あとは両タイプが黒字データを表明するのが最適になるかどうかを調べる。 経路外の Red/Red' 後の情報集合における信念が $q \leqq 2/3$ のときは I_R は投資するのが最適であるが、このときは R タイプの F_R はコストをかけて黒字データを粧う必要がないので Black から逸脱する。従ってこのような均衡はない。

$q \geqq 2/3$ のときは I_R は投資しないのが最適である。このときは R タイプの F_R が Black から逸脱すると利得は 1 から 0 に下がるし、B タイプの F_B が Black' から逸脱すると利得は 5 から −2 に下がるので逸脱しない。したがって

$p \leqq 2/3$ の範囲で、以下の形の戦略と信念の組み合わせは完全ベイジアン均衡であり、均衡経路において両タイプが黒字データを表明し I_B が投資する。

((Black, Black'), (Not, Invest'), $q \geqq 2/3$, $r = p$).

(c) こんどは経路が書いていないのでそこもはっきりさせる。企業が上記の分離戦略を行うとき、整合性から信念は (p にかかわらず) $q = 1$、$r = 0$ となる。$q = 1$ より、I_R は投資しない（Not ）を選ぶのが最適で、$r = 0$ より I_B は投資する (Invest') を選ぶのが最適である。しかしこのとき R タイプの F_R は Black に逸脱すると利得が 0 から 1 に上がるので、このような分離戦略は均衡にならない。したがってどんな p でもこのような分離均衡はない。

注：本年度から採点方式が変更になりました。国際基準に合わせるため、サービス問題だけできても合格しません。必修じゃないのだから、ちゃんと興味を持って、授業に出て理解してから試験を受けて下さい。