

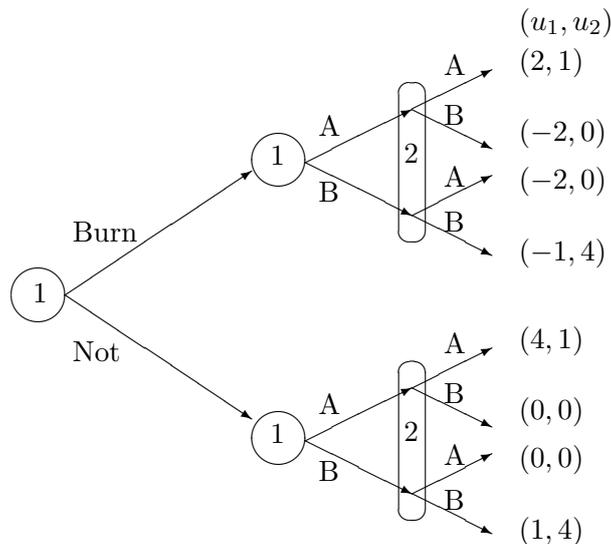
2017年度 ゲームの理論 a 期末試験 (70分)

グレーヴァ香子

- 以下の全ての問題に答えなさい。解答は問題順でなくてもいいが、どの問題に答えているのかを明確にして書きなさい。
- 部分点があるので、導出の過程を必ず書きなさい。途中の論理がまったくなく、解答だけがあるものは(山勘かもしれないので)減点となります。なお、お話はすべてフィクションです。

1. 同時投資ゲーム：プレイヤー 1 と 2 が 2 種類のプロジェクト A, B への投資について考えている。どちらのプロジェクトも二人ともが投資しないと成り立たないが、好みがちがう。プロジェクト A に二人が同時に投資するとプレイヤー 1 は利得として 4(万円)を、プレイヤー 2 は利得 1(万円、以下単位は同じ)を得る。プロジェクト B に二人が同時に投資すると逆に、プレイヤー 1 は利得 1 を、プレイヤー 2 は利得 4 を得る。二人が異なるプロジェクトに投資するとどちらのプレイヤーも 0 を得る。

- (a) 二人の純戦略の集合を $S_1 = S_2 = \{A, B\}$ として完備情報の同時ゲームとする。このゲームの(双)行列表現を書き、混合戦略の範囲で ナッシュ均衡を全て求めなさい。(加点方式で採点するので、できる限り多く発見するのがよい。)
- (b) Burning Money ゲーム：プレイヤー 1 は最初に 2 万円を「焼く」という行動ができるとする！そこで展開形ゲームにして、まずプレイヤー 1 が 2 万円を焼く (Burn) か焼かない (Not) かを選び、どちらを選んだかを二人とも観察してから、焼いた後と焼かなかった後それぞれの歴史において上記の同時投資ゲームを行うとする。(下記の樹形図参照。) この展開形ゲームも完備情報とする。



この Burning Money ゲームの 純戦略による 部分ゲーム完全均衡として、プレイヤー 1 が 2 万円を焼く行動が含まれるものはあるか？あれば正確に 純戦略の組み合わせ を書き、それが部分ゲーム完全均衡であることを証明しなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。

- (c) Burning money ゲームの純戦略による部分ゲーム完全均衡を全て求めなさい。(加点方式で採点するので、できる限り多く発見するのがよい。)

2. 以下の 2 人標準形ゲームを考える。プレイヤーは X と Y であり、それぞれ純戦略として $S_X = \{x_1, x_2, x_3\}$ と $S_Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ を持つ。2 人の利得関数は以下の(双)行列表現のようにになっているが、純戦略の集合はお互いに知っているが、相手の利得関数を知っているかなどの情報構造は各小問ごとに異なる。

| X \ Y | y_1 | y_2 | y_3 |
|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | 2, 1 | 1, 4 | 1, 3 |
| x_2 | 1, 2 | 3, 1 | 3, 3 |
| x_3 | 1, 0 | 2, 0 | 5, 1 |

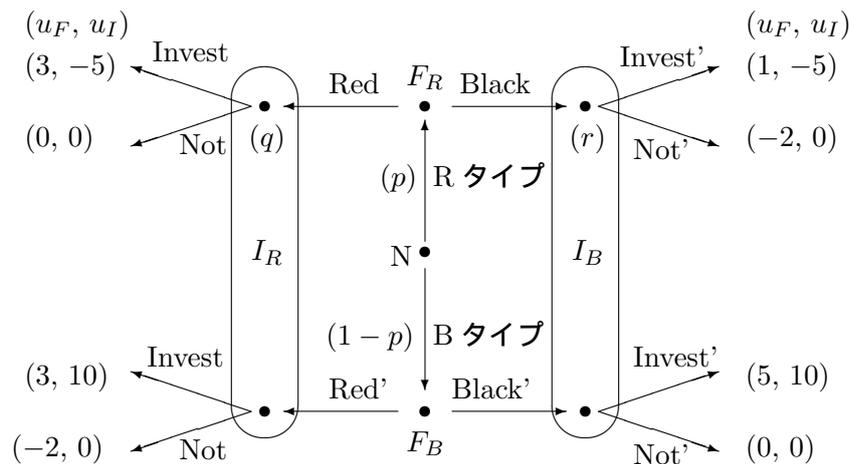
- (a) K_0 = 「各プレイヤーは自分の利得関数を知っている。また、自分の利得を最大にするように戦略を選ぶ。」とする。各プレイヤーの純戦略の中から K_0 のとき採られるはずがない純戦略を取り除き、「起こりうる純戦略の組み合わせの集合」を求めなさい。(答えの書き方は、例えば、 $\{a, b\} \times \{c, d, e\}$ のように直積で書いてもいいし、純戦略の組み合わせを列記してもよい。)
- (b) K_1 = 「各プレイヤーは K_0 を知っているし、相手の利得関数も知っている。」とする。 K_0 と K_1 だけから起こりうる純戦略の組み合わせの集合は何か？

3. 投資家 I さんはある企業 F に投資すべきか考えている。企業 F が現在のところ黒字であるか赤字であるかで投資から得られる利得は大きく異なるが、この情報は企業 F のみが知っているとする。これをベイジアンモデルで考え、最初に自然が企業 F のタイプ (赤字 R か黒字 B か) を選び、企業 F は自分のタイプを知るが、投資家 I は知らずに、投資する (Invest) かしないか (Not) を選ぶものとする。自然が赤字タイプ R を選ぶ事前確率を p とし、黒字タイプ B を選ぶ確率を $1 - p$ とする。

F が黒字タイプであるときに投資すると投資家 I の利得は 10、 F が赤字タイプであるときに投資すると I の利得は -5 であるとする。いずれの場合も投資しなければ I の利得は 0 であるとする。

- (a) 企業 F が何もしないとき、投資家は事前確率から求める期待利得を最大にするように投資すべきかを定める。このとき投資することが最適であるような p の範囲を求めなさい。

企業 F は投資家の意思決定の前に財務データを公表し、Red か Black かを表明することにした。しかし真のタイプだけが投資家の利得を左右する。企業は実はデータを改ざんすることが可能であり、赤字なのに黒字を粧ったり、黒字なのに赤字を粧ったりすることが可能であるとする。ただし、本来のタイプと異なるようにデータを改ざんするには費用がかかり、以下の樹形図のようなシグナリング・ゲームとなるとする。(1点から成る情報集合には円を描いていない。) 均衡概念は完全ベイジアン均衡であるとする。



- (b) 上記のシグナリング・ゲームにおいて、両タイプが黒字データ (Black/Black') を表明し、それを見た方の投資家 I_B は投資するような経路を持つ一括均衡が存在するような p があれば、その範囲と、そのような経路を持つ一括均衡の集合を求めなさい。(戦略の組み合わせと信念を明記すること。) もしそのような範囲の p が存在しないなら、どうしてないのかを論理的に説明しなさい。

- (c) 上記のシグナリング・ゲームで均衡において各タイプが真実のデータを（Rタイプは Red を、Bタイプは Black' を）表明する p の範囲があれば、その範囲とこのような分離均衡の集合を求めなさい。（戦略の組み合わせと信念を明記すること。）もしそのような範囲の p が存在しないなら、どうしてないのかを論理的に説明しなさい。