2015年度　ゲームの理論a 演習第3回解答

グレーヴァ香子

1. これは授業でちょっと説明したがちゃんと分析しなかった「最後通牒ゲーム」(Ultimatum Games) の一つである。

   (a) 兄は先手で情報集合は１つしかない。ゆえに、純戦略の集合は選べる行動の集合と同じで、$S_1 = [0,1]$ とか $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$ とか、0 と 1 の間の全ての実数であることがわかればよい。

   弟の純戦略の集合を考えるのには、情報集合が兄の提案一つ一つに対応して無限個存在するのがポイント。ゆえに、$S_2 = \{s \mid s : [0,1] \to \{\text{ Yes, No }\}\}$ のように、兄の提案の関数で、値は Yes, No の２つのどちらかになるもの全体。

   (b) 兄の提案が、弟が 0.2 より多くもらえるもの（すなわち $x < 0.8$）だったら問題なく Yes である。ちょうど $x = 0.8$ の部分ゲームで、弟は Yes, No どちらも最適なので、以下の２通りの最適戦略 $BR_2(\cdot)$ と $BR_2'(\cdot)$ がある。

$$BR_2(x) = \begin{cases} \text{Yes} & \text{if } x \leqq 0.8 \\ \text{No} & \text{if } x > 0.8. \end{cases}$$

$$BR_2'(x) = \begin{cases} \text{Yes} & \text{if } x < 0.8 \\ \text{No} & \text{if } x \geqq 0.8. \end{cases}$$

   (c) 弟が上のどちらかの最適戦略をしているときに、兄の最適戦略を考える。兄は x を大きくすればするほど利得が高まるが、BR_2' だと 0.8 より下の範囲では最大値が存在しない。したがって、弟が BR_2 を取っているときだけ均衡があり、兄は $x = 0.8$ が最適戦略である。

   ゆえに、このゲームにはただ一つの純戦略による後ろ向きの帰納法の解（あるいは部分ゲーム完全均衡）があり、それは $(0.8, BR_2(\cdot))$ というものである。

   $(0.8, 0.2)$ が均衡と書いたら減点。これは均衡経路あるいは均衡利得の組み合わせである。

   （おまけ：均衡でもらえる兄の利得は弟が No のとき最低限もらえる利得に依存する。これがはっきりするように No の後の利得を異なるものにしたのである。また、よくやる最後通牒ゲームだと No の後２人とも 0 をもらうという最悪の想定になっている。）

2. (a) (B,b) と (C,c)。

   (b) 各プレイヤーの情報集合は１期目は１つ（同時だから）、２期目は前期の９通りの行動の組み合わせのどれかが観察されるので、９つそれぞれが別々な情報集合であり相手の行動はわからないからそれだけ。ゆえにこれら１０の情報集合について行動を $\{A, B, C\}$ あるいは $\{a, b, c\}$ の中から選ぶ関数となる。１０の情報集合それぞれについて何をするかという関数の集合を書く、という手もあるが、たとえば a_t^i をプレイヤー i の t 期目の行動計画とすると少し簡単に書けて

$$S_1 = \{(a_1^1, a_2^1) \mid a_1^1 \in \{A, B, C\},\ a_2^1 : \{A, B, C\} \times \{a, b, c\} \to \{A, B, C\}\}$$
$$S_2 = \{(a_1^2, a_2^2) \mid a_1^2 \in \{a, b, c\},\ a_2^2 : \{A, B, C\} \times \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}\}.$$

(c) アメとムチを使う。

P1 は $a_1^1 = A,$ １期目の行動の組み合わせを $h \in \{A, B, C\} \times \{a, b, c\}$ と書くと

$$a_2^1(h) = \begin{cases} B & \text{if } h = (A, a) \\ C & \text{otherwise.} \end{cases}$$

P2 は $a_1^2 = a,$

$$a_2^2(h) = \begin{cases} b & \text{if } h = (A, a) \\ c & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると、部分ゲーム完全均衡になることを示そう。まず、２期目は９つの部分ゲームが $h \in \{A, B, C\} \times \{a, b, c\}$ に対応してあるが、$h = (A, a)$ のときはその部分ゲームに制限した２人の戦略の組み合わせは (B, b)、他のときは (C, c) なのでいずれも段階ゲーム G のナッシュ均衡であるからこれらの部分ゲームのナッシュ均衡である。

あとはゲームの最初から始まる（部分）ゲームにおいてナッシュ均衡、即ちお互いに最適であればよい。

P2 の戦略 (a_1^2, a_2^2) を所与として、P1 は２期間の利得を最大にするように考える。これは後ろ向きに解けばよく、第２期については P2 が b を行うケースでは B を、c を行うケースでは C をするのが最適であるから、a_2^1 に従うのが最適ということになる。

これを踏まえて、P1 にとって第１期の３つの行動のどれが最適かを考える。

A をすると、総利得は $5 + 3 = 8$, B をすると $6 + 1 = 7$、C をすると $0 + 1 = 1$ であるから A をするのが最適である。ゆえに (a_1^1, a_2^1) は (a_1^2, a_2^2) に対して最適反応である。

同様にして P1 の戦略を所与として、P2 の第２期は対応する G のナッシュ均衡の行動を取ればよい。これを踏まえて第１期の最適行動を考えると

a をすると $5 + 4 = 9$、b をすると $0 + 1 = 1$、c をすると $7 + 1 = 8$ であるから a が最適である。つまり (a_1^2, a_2^2) は (a_1^1, a_2^1) に対して最適反応である。

ゆえに、全ての部分ゲームにおいて、そこに制限した戦略の組み合わせはナッシュ均衡である。 □