2015年度　ゲームの理論a 演習第2回解答

グレーヴァ香子

1. (a) プレイヤー2について、LはCに厳密に支配されるが、他にはない。Lを消去しても、

P1\ P2	C	R
U	1, 2	2, 1
M	3, 5	1, 0
D	2, 1	2, 1

残ったものの中に厳密な支配関係はない。ゆえに $\{U, M, D\} \times \{C, R\}$ が答え。

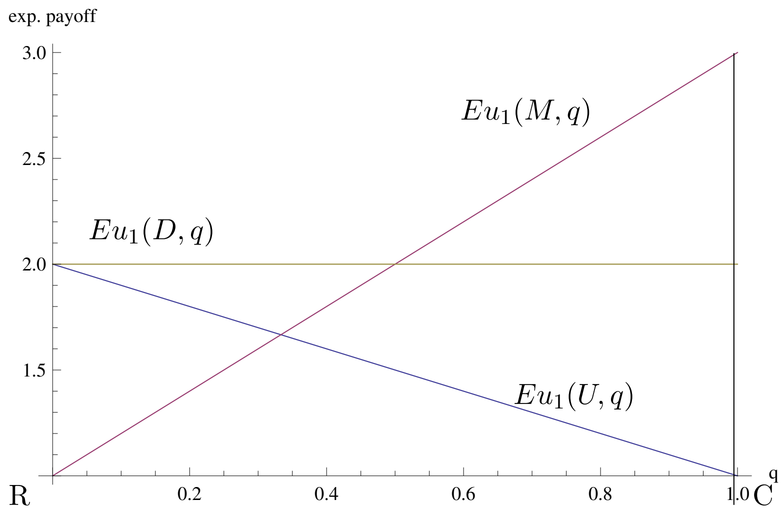
(b) まず純戦略の最適反応に対応する利得の数値に下線をつける。

P1\ P2	L	C	R
U	0, 1	1, $\underline{2}$	$\underline{2}$, 1
M	$\underline{4}$, 1	$\underline{3}$, $\underline{5}$	1, 0
D	2, 0	2, $\underline{1}$	$\underline{2}$, $\underline{1}$

ゆえに純戦略のナッシュ均衡は2つあり (M, C) と (D, R) である。($(2, 1)$ などと書いたらどれだかさっぱりわからない！)

(c) P1がどんな混合戦略をしてきたとしても、L をするより C をする方が利得が高いのだから、L は最適反応に正の確率で入れることはありえない。

(d) これはけっこう難しい。まず、(c) よりP2は混合戦略の範囲でも、Lはしないので、P2の混合戦略としては $(0, q, 1-q)$ という形のものだけを考えればよい。(確率は第1項からL, C, Rの確率の順。) すると例えばP1の各純戦略の期待利得のグラフを考えるか、頭で考えるとUはP2がRという純戦略 ($q = 0$) をしない限り最適反応になりえないことがわかる。(a) の縮小ゲームを見るとよい。



するとP1がP2の何らかの $(0, q, 1-q)$ に対して最適反応として混合戦略をする可能性は

(1) $q = 0$ のときUとDを混ぜる

(2) $q=1/2$ のとき D と M を混ぜる
しかない。
(1) のようなナッシュ均衡はない。なぜなら、P1 が U と D だけに正の確率を付けると、P2 の最適反応は C であり、$q=0$（純戦略 R) ではないから。
(2) のようなナッシュ均衡もない。なぜなら、P1 が D と M だけに正の確率を付けると、P2 の最適反応は C であり、$q=1/2$ ではないから。
したがって、混合戦略の範囲を考えてもナッシュ均衡は (b) で求めたものだけなのである。

2.
$$\max_{(x,y)\in Z} f(x,y) \leqq \max_{x\in X}\{\max_{y\in Y(x)} f(x,y)\} \tag{1}$$
かつ
$$\max_{(x,y)\in Z} f(x,y) \geqq \max_{x\in X}\{\max_{y\in Y(x)} f(x,y)\} \tag{2}$$
を示す。

(1) の証明：
まず任意の x,y について、
$$f(x,y) \leqq \max_{y'\in Y(x)} f(x,y').$$
両辺を x を動かして最大化しても不等号は変わらない：
$$\max_{x\in X} f(x,y) \leqq \max_{x\in X}\{\max_{y'\in Y(x)} f(x,y')\}.$$
この右辺はすでにただの実数である。さらに $(x,y)\in Z$ の範囲で左辺を最大化しても不等号の向きは変わらず、
$$\max_{(x,y)\in Z} [\max_{x\in X} f(x,y)] \leqq \max_{x\in X}\{\max_{y'\in Y(x)} f(x,y')\}.$$

同様にして
$$f(x,y) \leqq \max_{x\in X} f(x,y)$$
$$\Rightarrow \max_{(x,y)\in Z} f(x,y) \leqq \max_{(x,y)\in Z} [\max_{x\in X} f(x,y)]$$
であることから、(1) が示された。

(2) の証明：
任意の x について
$$\max_{(x,y)\in Z} f(x,y) \geqq \max_{y\in Y(x)} f(x,y)$$
が常に成立する（変数を動かす範囲が大きい方が値が小さくなることはない）ところから出発して同様にやる。左辺は実数だから、右辺を $x\in X$ の範囲で最大化しても不等号はかわらず、
$$\max_{(x,y)\in Z} f(x,y) \geqq \max_{x\in X}[\max_{y\in Y(x)} f(x,y)].$$
ゆえに (2) が示された。 $\square$

しかし、y が動ける範囲 $Y(x)$ が x に依存するので、$\max_{x\in X} f(x,y)$ は well-defined ではない。（任意の y について定義されていない。）