

2010年度 ゲームの理論 a 期末試験 (70 分)

グレーヴァ香子

以下のすべての問題に答えなさい。解答は問題の順でなくてもいいが、どの問題に答えているのかを明記しなさい。解答は、その導出過程も書いておくこと。(途中点あり。) お話はすべてフィクションです。

1. (30 点) 以下の 2 人標準形ゲームを考える。

1 \ 2	L	C	R
U	1, -2	1, -4	1, -1
M	0, 0	3, 1	0, 0
D	-1, -1	2, -1	2, 0

- (a) このゲームの純戦略によるナッシュ均衡を全て求めなさい。
 (b) プレイヤー $i = 1, 2$ の純戦略の集合を S_i と書く。純戦略の範囲での、プレイヤー i のミニマックス値は以下のように定義される。(ここで j は i でないもう一人のプレイヤーである。)

$$\min_{s_j \in S_j} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_j)$$

上のゲームにおける各プレイヤーの純戦略の範囲でのミニマックス値を求めなさい。

- (c) (a)、(b) の議論を踏まえて、一般の 2 人標準形ゲーム $G = (\{1, 2\}, S_1, S_2, u_1, u_2)$ について以下の主張を証明しなさい。

『各プレイヤー $i = 1, 2$ について、純戦略の範囲でのミニマックス値は、任意の純戦略のナッシュ均衡におけるこのプレイヤーの利得以下である。』

(記号で書くと、任意の $i = 1, 2$ と任意の純戦略ナッシュ均衡 (s_1^*, s_2^*) について、

$$\min_{s_j \in S_j} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_j) \leq u_i(s_i^*, s_j^*)$$

が成立する。)

2. (30 点) 講義でやったキャンディを分けるゲームを少し変形する。プレイヤーは A さんと B さんとする。2 個のキャンディがあって、これ以上は分割できないとする。最初に A さんがこのうち何個欲しいか (0, 1, 2 のどれか) を要求する。要求を見てから、B さんは Yes か No かを選ぶ。B さんが Yes だったら A さんの要求通りの数が A さんに与えられ、B さんは残りをもらう。B さんが No を選んだら 1 個ずつが二人に与えられるとする。二人の利得はもらうキャンディの数とする。

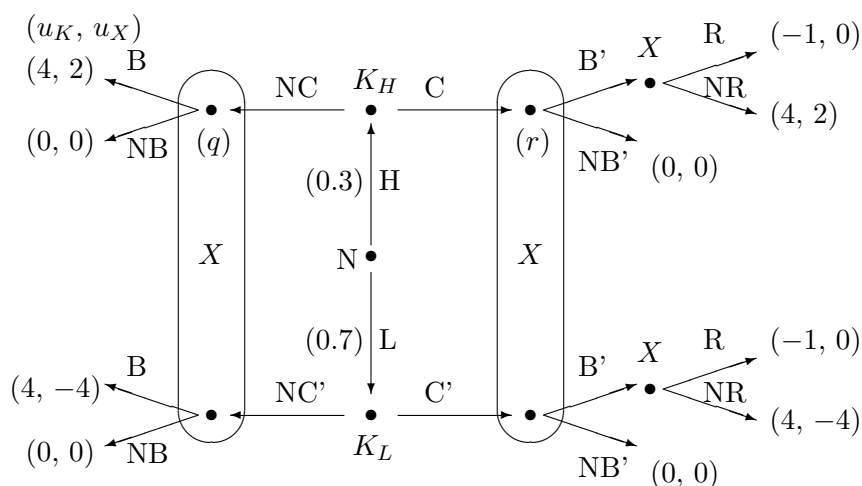
- (a) 上記のゲームの樹形図を描きなさい。
 (b) このゲームの純戦略による部分ゲーム完全均衡を全て求めなさい。また部分ゲーム完全均衡で達成される二人の利得の組み合わせ $((v_A, v_B))$ という形) を全て書きなさい。
 (c) このゲームを 2 回繰り返すとする。両回とも A さんが先に要求するものとし、B さんは Yes か No かで答えるだけである。また、1 回目の結果が完全に分かってから 2 回目をプレイする (完全モニタリング) とする。繰り返しゲーム全体の利得は 2 回の利得の合計であるとする。
 この繰り返しゲームで、純戦略の部分ゲーム完全均衡として達成できる二人の (繰り返しゲームの) 利得の組み合わせを全て求めなさい。
 (d) 1 回限りのときと 2 回繰り返したときで、均衡で達成される 平均利得の集合 にどのような変化が生じたか、生じなかったのかを説明し、その理由を簡潔に述べなさい。(1 回限りのときは利得そのもの、2 回繰り返しのときは 2 回の和を 2 で割ったものが平均利得である。)

3. (40 点) K 社は新製品『電動靴』を開発した。この靴をはけば、疲れていても、坂道でも、どんどん歩いてくれるというものであるらしい。ただし、誰もまだ買って使っていない。代表的消費者を一人考え、買ってくれるかどうかを考える。簡単化のため価格は 4 (万円) で固定しておく。

消費者 X はこの製品が実際に役に立つかわからない。役に立つものであれば、消費者は購入することで効用 6 を得るとする。そこから価格 4 を引いて $6 - 4 = 2$ を利得とする。役に立たないものであった場合効用は 0 で、価格を考えると購入の利得は -4 であるとする。買わなければ利得は 0 であるとする。

- (a) 『電動靴』が役に立つものである事前確率を p とすると、期待利得を最大にする消費者は p がどんな値の範囲のとき買うべきか？

K 社はこの製品が役に立つかわかっていて、消費者に何らかのシグナルを送ろうとすることを考える。役に立つ製品であるときをタイプ H、そうでないときをタイプ L とする。以下では消費者の予想はタイプ H である確率が $p = 0.3$ であるとして、これは K 社と消費者の共有知識であるとする。K 社は、「お買い上げ後に気に入らなかったら送料当社負担で返品可能」というキャンペーンを打つことができると考えた。このキャンペーンをすることを C と書き、しないことを NC と書くとする。消費者 X はこのキャンペーンが行われるか否かだけを観察して購入する (行動 B) かしない (行動 NB) を選び、キャンペーンが行われ、購入した後は、製品が役に立つかわかるので、さらに返品する (行動 R) か、しない (行動 NR) かも選べる。この状況を以下のような樹形図で示す。利得は左が K 社、右が消費者 X のものである。黒い●だけの手番は一点からなる情報集合であるとする。



- (b) K 社がどちらのタイプであってもキャンペーンをするという一括戦略を取っているとき、キャンペーンを見た後の消費者 X を考える。2 点が入っている情報集合における整合的な信念 r を求めなさい。これを踏まえ最適な購買行動 (B' または NB') と、買った後の意思決定点 (2 つ) における最適な行動をそれぞれ求めなさい。(ヒント：この順に解かなくてよい。)
- (c) (a)、(b) を踏まえて、K 社がどちらのタイプであってもキャンペーンをするという一括均衡 (完全ベイジアン均衡) があるかを調べ、あればそれを書きなさい。なければどうしてないかを書きなさい。