2009 年度　ゲームの理論 a 期末試験 (70 分)

グレーヴァ香子

以下のすべての問題に答えなさい。解答は問題の順でなくてもいいが、どの問題に答えているのかを明記しなさい。途中点があるので、思考の過程を書いておくこと。お話はすべてフィクションです。少々変でも気にしないで下さい。

1. (30 点) 以下の問い (a)-(c) に答えなさい。

   (a) 以下の３人同時ゲームの行列表現を考える。P1 は行を選ぶプレイヤーで、純戦略は U,D である。P2 は列を選ぶプレイヤーで、純戦略は L,R である。P3 は行列を選ぶプレイヤーで、純戦略は A,B である。表の中の利得は左から P1、P2、P3 のものとする。このゲームにおける純戦略によるナッシュ均衡をすべて求めなさい。

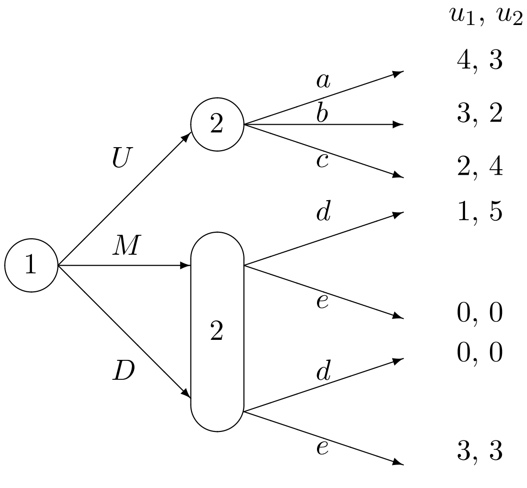
P1\P2	L	R
U	2, 2, 1	0, 4, 0
D	0, 4, 0	3, 3, 3

P3: A

P1\P2	L	R
U	2, 2, 2	4, 3, 0
D	0, 3, 0	2, 2, 2

B

以下の 2 人展開形ゲームを考える。



   (b) このゲームにおける各プレイヤー（１と２）の純戦略の集合を明記しなさい。

   (c) このゲームの純戦略による部分ゲーム完全均衡を以下のステップで求める。
   ステップ１：プレイヤー２の上の情報集合で選ばれる行動を明記しなさい。
   ステップ２：(b) で求めたプレイヤー２の純戦略の内、ステップ１で選ばれた行動を含むものだけを列とし、プレイヤー１の純戦略全体を行とした、行列表現を描きなさい。
   ステップ３：ステップ２の行列表現から、純戦略のナッシュ均衡を全て求めなさい。（これらが部分ゲーム完全均衡である。）

2. (30 点) 企業 A と B だけがいる複占市場で、価格競争している状況を考える。企業 A が価格 p_A、企業 B が価格 p_B をつけると、企業 A の需要は $Q_A(p_A, p_B) = 25 - 2p_A + p_B$ で与えられるとする。企業 B の需要は $Q_B(p_A, p_B) = 25 - 2p_B + p_A$ で与えられるとする。また両企業の限界費用は同じで、1 であるとする。各企業の戦略は価格 $p_i \geqq 0$、利得は利潤 $\Pi_i(p_i, p_j) = (25 - 2p_i + p_j)(p_i - 1) \quad (i = A, B,\ j \neq i)$ とする。（つまり対称ゲームである。）

   (a) 両企業が同時に価格を選んでゲームが終わる同時ゲームとするとき、ナッシュ均衡（価格の組み合わせ）と、そのときのそれぞれの企業の利潤を求めなさい。

上記の価格競争ゲームを無限回繰り返すゲームを考える。各企業は割引因子を δ とした、割引総利得を最大にするものとし、完全モニタリングを仮定する。両企業が談合して、価格を毎期 $p_A = p_B = 13$ に固定する約束をしたとする。もし、誰かが裏切ったら、(a) で求めたナッシュ均衡をその後ずっとプレイするとする。

(b) 談合したときの各企業の１回分の利潤を求めなさい。

(c) 企業 A が１回だけ裏切るとき、企業 B が $p_B = 13$ であることを所与として、１回だけの利潤 $\Pi_A(p_A, 13)$ を最大にする p_A を求め、そのときの A の利潤を求めなさい。

(d) 談合が部分ゲーム完全均衡の帰結になるように、(c) で求めた裏切りを１回だけして、その後ナッシュ均衡をずっとプレイするときの割引総利得が、毎回 (b) で求めた利得をもらう割引総利得を超えないような δ の範囲を求めなさい。（分数でよい。）

3. (40 点) 以下のような２人不完備情報ゲームを考える。プレイヤーは P1 と P2 とする。二人は以下の形の同時ゲームをすることは知っているが、二人とも x の値を知らない。

P1 \ P2	A	B
A	x, x	x, 0
B	0, x	2, 2

(a) x は -1 または 5 であって、その事前確率はそれぞれ 0.5 であるとして、ベイジアンゲームの（双）行列表現を書きなさい。二人とも利得関数を知らないのがポイント。

(b) (a) で構築したベイジアンゲームのベイジアンナッシュ均衡を混合戦略の範囲まで含めてすべて求めなさい。ただ均衡を書くだけでなく、どうして他の戦略の組み合わせは均衡でないかも書くこと。

P1 は何かの理由で x の値を知ることができるとする。しかし P2 は引き続き x は -1 または 5 であって、その事前確率はそれぞれ 0.5 であると予想しているとする。このことは P1 も知っているとする。

(c) 自然が最初に x の値（-1 または 5）をそれぞれ 0.5 の確率で選び、その後それを P1 だけが知り、行動 A または B を選び、P2 は P1 の行動だけを見て、自分の行動 A または B を選ぶという展開形ゲームを描きなさい。利得を明確にすること。

(d) (c) で構築した展開形ゲームの完全ベイジアン均衡として (P1 の純戦略による）pooling equilibrium が存在するか？あればそれを書いて、どうして均衡かを説明しなさい。なければ、どうして存在しないかを説明しなさい。