数理経済学第１回 (9901) *　　　　　　　**慶應義塾大学経済学部：矢野　誠**

１．需要の理論

１．１．需要関数と効用の最大化

消費者の最適化行動： $\max_{x \geq 0} \; u(x) \;\; \text{s.t.} \;\; px = M$

需要とはこの最大化問題の解のこと.

$p = (p_1, \ldots, p_N)$ ：　**価格ベクター**
$x = (x_1, \ldots, x_N)$ ：　**需要ベクター**
N ：　**市場で取り引きされている財の種類**
M ：　**所得**
$u(x)$ ：　**効用関数**

１．２．予算集合

$$B(p, M) = \{x \geq 0 : px \leq M\} \quad .$$

１．３．需要対応

$$D(p, M) = \arg\max_{x \geq 0} \; u(x) \;\; \text{s.t.} \;\; x \in B(p, M) \quad .$$

註： $\arg\max$ **とは 最大化問題の解の集合のこと.**

１．４．需要の存在

定理 1.4.1:　**効用関数が連続で，$p >> 0$ かつ $M > 0$ ならば需要が存在する．**

証明：　**もし $M > 0$ ならば，$p >> 0$ について，$B(p) \neq f$ ．**

さらに $p >> 0$ ならば，予算集合はコンパクト．コンパクト集合の上の連続関数は最大値を持つので，$D(p, M) \neq f$ ．証明終わり．

１．５．効用関数が厳密な凹関数の場合における需要関数の存在：

註：需要対応 $D(p, M)$ がどの p についても，ただ一つの要素を持つときには，需要関数と呼ばれる．つまり，どの p についても，消費者の最適化行動がただ一つの解を持つということ．

註：ある関数 $f(x)$ が凹関数であるというのは，もし $0 < a < 1$ ならば，

$$f(ax' + (1-a)x'') \geq af(x') + (1-a)f(x'')$$

が成立するということ．とくに，必ず厳密な不等号が成り立つときには，f は厳密な凹関数であるという．

定理 1.5.1:　**効用関数が厳密な凹関数ならば，$D(p, M)$ は需要関数である．**

証明：　**もし，$D(p, M)$ が関数でなければ，ある p について，x' と x'' が存在して，$x' \neq x''$ かつ $x' \in D(p, M)$ および $x'' \in D(p, M)$ が成立する．このとき，$px' \leq M$ かつ $px'' \leq M$ なので，$p(ax' + (1-a)x'') \leq M$ が成立するので $ax' + (1-a)x'' \in B(p)$ である．さらに，u が厳密な凹関数なので，**

$$u(ax' + (1-a)x'') > au(x') + (1-a)u(x'')$$

となるので，x' や x'' は需要ではありえない．証明終わり．

１．６．需要関数と予算

註：効用関数が局所的に非飽和であるとは，どんな x **とどんな** $e>0$ **をとっても，** $|x'-x|<e$ **なる** x' **が存在して，**

$$u(x')>u(x)$$

定理 1.6.1: **もし** $x\in D(p,M)$ **ならば，** $px=M$ **.**

証明: **各自に任せる.**