講義ノート

伊藤幹夫

平成 12 年 7 月 4 日

第6章　技術進歩と成長

これまでの議論でも技術進歩を労働生産の成長という形で扱った。そして、一人あたり所得の成長率が均衡経路において、労働生産性の成長率に等しくなることをみた。この章では、より一般的に技術進歩と経済成長の関係を扱う。

6.1　技術進歩とはなにか

経済学の歴史のなかで生産技術・技術進歩の重要性を説いた経済学者は多い。マルクスやシュンペータはその代表である。特に後者は、技術革新の重要性を強調した。

シュンペータは、

- 技術の発明
- 技術の商品化
- 技術の模倣・伝搬

という過程として経済の中の技術革新をとらえている。もう少し具体的に技術革新をとらえるなら、

- 科学技術上の新発見
- 新商品の開発
- 生産方法の改善
- 新しい販売方法・企業組織の形成

ということであろう。しかし、経済学で扱う技術進歩はこのうち、３番目の生産方法の改善というだけである。それは、ほかのことが科学的なことに強く関係していたり、具体的な経営行動に関係していたりして、定式化が困難なためである。

経済学は、**生産方法の改善を生産関数の上方へのシフトとしてとらえる。**言葉を換えて言うなら、同じ投入でより多く産出できるようになること、より少ない投入で同じだけの産出が確保できるようになること、である。生産関数を用いて言うと、一人あたり生産関数 $f(k)$ が、任意の k に対して $\bar{f}(k) > f(k)$ となるようにシフトすることであったり、等量曲線（$\bar{Y} = F(K, L)$ を満たす K と L の組み合わせの軌跡）が、原点に引きつけられるように内側にシフトすることであったりする。

6.2　技術進歩のタイプの分類：中立性を中心として

生産関数の上方シフトとして技術進歩をとらえるとしても、上方シフトにもさまざまな可能性が考えられる。例えば、同じ生産量を確保するのに、必要労働投入量は不変だが必要資本は減る技術進歩というものもあろうし、逆に、必要労働投入量は減るが必要資本量は不変だという技術進歩もあろう。よって、技術進歩のタイプをある程度分類・整理しなくては、技術進歩が経済成長に及ぼす影響も、漠然としたものとしてしかとらえられない。この節では、技術進歩のタイプの分類を考える。

現在技術進歩のタイプを分類するとき、中立性という概念をキーワードにして分類するのが普通である。中立性は、変化前と変化後に何らかの対象を不変に保つという意味を持つ。経済学でいう中立的技術進歩というとき、所得分配が限界生産力に基づくという前提の下での所得分配率を基準として採用する。つまり、総所得における賃金所得と利潤所得の割合が、技術進歩前と技術進歩後で不変になるのは、生産関数のどのような上方シフトの下で可能か、という考え方で技術進歩を分類する。以下では、集計的生産関数において、資本の限界生産力が利潤率になり、労働の限界生産力になることを前提として話を進める。

さて賃金所得を W、利潤所得を Π と記すとき、これらは賃金率 w、利潤率 r、労働量 L、資本ストック K を用いると、次のように表わされる。

$$W = wL$$

$$\Pi = rK$$

また、総生産量を Y と記すことにすると、

$$Y = W + \Pi = wL + rK \tag{6.1}$$

が成立している。

われわれは、以下において分配率を不変に保ついくつかの可能性を、w、r、L、K、Y を用いて表現しよう。

$$\pi_K = \frac{rK}{Y}$$

$$\pi_L = \frac{wL}{Y}$$

として資本の分配率、労働の分配率を表わすことにすると、(6.1) から、

$$\pi_k + \pi_L = 1$$

が恒等的に成立することがわかる。つまり、分配率を不変に保つには、π_k と π_L を同時に不変に保つ必要はない。実際分配率を保つには、次の三つの可能性しかない。

1. $\dfrac{\pi_K}{\pi_L}$ を不変に保つ（あるいは、$\dfrac{\pi_L}{\pi_K}$ を不変に保つ）
2. π_K を不変に保つ
3. π_L を不変に保つ

第一のタイプの形で分配率を不変に保つ技術進歩を**ヒックス型の中立技術進歩**、第二のタイプの形で分配率を不変に保つ技術進歩を**ハロッド 型の中立技術進歩**、第三のタイプの形で分配率を不変に保つ技術進歩を**ソロウ型の中立技術進歩**とよぶ。

次にこれら三つの技術進歩が具体的にどのようなことを意味し、生産関数に対してどのような制約を課すことになるかをみていこう。

6.2.1　ヒックス型の中立技術進歩

$$\frac{\pi_K}{\pi_L} = \frac{rK}{wL} \tag{6.2}$$

に注意すると、ヒックス型の中立性が成立するとき、またそのときに限って、一人当たり資本ストック $\dfrac{K}{L}$ が同じならば、技術進歩前と技術進歩後で $\dfrac{r}{w}$ が不変に留まることがわかる。

これは、生産関数の等量曲線を考えれば、原点から引いた直線上では、２要素間の限界代替率が技術進歩前と技術進歩後で変わらないということになる。

また解析的には、技術水準を A_H と記すとき、

$$Y = A_H\, F(K,\ L) \tag{6.3}$$

であるとき、またそのときに限ってヒックスの中立性が満たされることがわかっている。

演習 1 *(6.3)* という形の生産関数が、ヒックスの中立性を満たすことを確認せよ。

注意 1 ヒックスの中立性が満たされる生産関数は、必ず *(6.3)* という形にかけることも示せるが証明は簡単ではない。

ヒックスの中立性を満たす生産関数の上方シフトは、**産出量増大的**な技術進歩とまとめることができる。

6.2.2　ハロッド 型の中立技術進歩

$$\pi_K = \frac{rK}{Y} \tag{6.4}$$

に注意すると、ハロッド 型の中立性が成立するとき、またそのときに限って、資本産出比率 $\dfrac{K}{Y}$ が同じならば、技術進歩前と技術進歩後で利潤率 r が不変に留まることがわかる。

これは、一人当たり生産関数を考えれば、原点から引いた直線上では、限界生産力が技術進歩前と技術進歩後で変わらないということになる。

また解析的には、技術水準を A_h と記すとき、

$$Y = F(K,\ A_h L) \tag{6.5}$$

であるとき、またそのときに限ってハロッド の中立性が満たされることがわかっている。[1]

[1] これは、新古典派の成長理論を説明した第??章ですでに導入したタイプの生産関数である。

演習 2 *(6.5)* という形の生産関数が、ハロッドの中立性を満たすることを確認せよ。

注意 2 ハロッドの中立性が満たされる生産関数は、必ず *(6.5)* という形にかけることも示せるが証明は簡単ではない。次の *remark* で証明を示す。

注意 3 $Y = F(K, L; A)$ を K と L に関して一次同次の生産関数とする。このとき、

$$\frac{Y}{K} = \phi\left(\frac{L}{K}, A\right)$$

のように書くことができる。以下では $\eta = Y/K, \ell = L/K$ として

$$\eta = \phi(\ell, A)$$

と書く。資本の限界生産力 r は簡単な計算により

$$r = \phi(\ell, A) - \ell \frac{\partial \phi}{\partial \ell}(\ell, A)$$

であることがわかる。技術進歩がハロッドの中立性を満たすのは、技術進歩の前後で資本産出比率が一定である限り、利潤率が一定であるときである。つまり、

$$\frac{d\eta}{dA} = 0 \Longrightarrow \frac{dr}{dA} = 0$$

が成立するときである。これは、ϕ を使って書き直すと、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \ell}\frac{d\ell}{dA} + \frac{\partial \phi}{\partial A} = 0 \Longrightarrow -\ell\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell^2}\frac{d\ell}{dA} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial A} - \ell\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell \partial A}\right) = 0$$

これは、任意のベクトル

$$\left(\frac{d\ell}{dA} \qquad 1\right)$$

が

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \ell} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial A}\right)$$

と直交するとき、

$$\left(-\ell\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell^2} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial A} - \ell\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell \partial A}\right)$$

とも直交することを意味する。これにより後者二つが一次従属になる。よって

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \ell} & \frac{\partial \phi}{\partial A} \\ -\ell\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell^2} & \frac{\partial \phi}{\partial A} - \ell\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell \partial A} \end{vmatrix} = 0$$

である。行列式を計算して、

$$-\frac{\frac{\partial \phi}{\partial A}}{\frac{\partial \phi}{\partial \ell}^2} + \frac{\ell\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell \partial A}}{\frac{\partial \phi}{\partial \ell}^2} + \frac{\ell\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell^2}}{\frac{\partial \phi}{\partial \ell}^2} = 0$$

である。

一方 $\eta = \phi(\ell, A)$ を ℓ について解いた関数 $\ell(\eta, A)$ を考えると

$$\frac{\partial \ell}{\partial \eta} = \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial \ell}},\ \frac{\partial \ell}{\partial A} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial A}}{\frac{\partial \phi}{\partial \ell}},\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta \partial A} = -\frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell \partial A}}{\frac{\partial \phi}{\partial \ell}^2} - \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell^2}}{\frac{\partial \phi}{\partial \ell}^3}$$

これを一次従属から得られる式に代入して、

$$\frac{\partial \ell}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial A} - \ell \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta \partial A} = 0$$

を得る。これは

$$\frac{\partial^2 \log \ell}{\partial \eta \partial A} = 0$$

と同値である。この式は

$$\log \ell = B(A) + C(\eta)$$

となるような $B(\cdot), C(\cdot)$ の存在を意味する。よって、

$$\eta = \psi(\tilde{A}(A)\ell)$$

である。元々の生産関数の一次同次性から

$$Y = F(K, \tilde{A}(A)L)$$

がいえる。$\tilde{A}$ を A_h と考えればよい。

ハロッドの中立性を満たす生産関数の上方シフトは、**労働増大的**な技術進歩とまとめることができる。つまり、労働の生産性が上昇することで、労働力が増大したかのような効果をもつ技術進歩として、ハロッドの中立技術進歩を捉えることができる。

6.2.3　ソロウ型の中立技術進歩

この技術進歩は、ハロッド型の中立技術進歩における資本と労働の役割を逆転したものである。

$$\pi_L = \frac{wL}{Y} \tag{6.6}$$

に注意すると、ソロウ型の中立性が成立するとき、またそのときに限って、労働生産性 $\dfrac{Y}{L}$ が同じならば、技術進歩前と技術進歩後で賃金率 w が不変に留まることがわかる。

これは、一人当たり生産関数を考えれば、原点から引いた直線上で生産関数の接線を引くと、技術進歩前と技術進歩後とも y 切片が変わらないということになる。

また解析的には、技術水準を A_S と記すとき、

$$Y = F(A_S K,\ L) \tag{6.7}$$

であるとき、またそのときに限ってソロウの中立性が満たされることがわかっている。

演習 3 *(6.7)* という形の生産関数が、ソロウの中立性を満たすことを確認せよ。

注意 4 ソロウの中立性が満たされる生産関数は、必ず *(6.7)* という形にかけることも示せるが証明は簡単ではない。

ソロウの中立性を満たす生産関数の上方シフトは、**資本増大的**な技術進歩とまとめることができる。つまり、資本の生産性が上昇することで、資本ストックが増大したかのような効果をもつ技術進歩として、ソロウの中立技術進歩を捉えることができる。

演習 4 コブ-ダグラス型生産関数は、三つの中立的技術進歩を同じに満たすことを示せ。

6.3　均衡成長と中立的技術進歩

この節では、3 種類の中立技術進歩を考えるとき、均衡成長経路と整合的であるかを調べる。結論的には、ハロッド の中立性を満たす技術進歩のみが一般的に、均衡成長と整合的であることを示す。（この事実があるため、新古典派成長理論を展開するとき、実はハロッド 中立を考えたのである。）

均衡成長が実現しているとき、産出量と資本ストックは同じ成長率で増大する。また、利潤率も一定でなくてはならない。前者の条件から、資本産出比率 $\dfrac{K}{Y}$ が一定であることが導かれる。また、後者から成長経路上では資本の限界生産力が一定でなくてはならないことが導かれる。

6.3.1　均衡成長とヒックス中立的技術進歩

ヒックスの中立的技術進歩を満たす生産関数は既にみたように、(6.3) の形に書かれる。よって、一次同次性に注意すれば、

$$\frac{K}{Y} = \frac{K}{A_H\, F(K,\, L)} = \frac{1}{A_H\, F\left(1,\, \frac{L}{K}\right)} \tag{6.8}$$

であり、

$$r = A_H\, \frac{\partial F}{\partial K}(K,\, L) \tag{6.9}$$

となる。

今、労働が成長率 n で増大し、A_H が成長率 α_H で増大しているとする。均衡成長が実現するために、資本産出比率、利潤率が一定でなくてはならないが、上の式から、$F\left(1,\, \dfrac{L}{K}\right)$ と $\frac{\partial F}{\partial K}(K,\, L)$ がともに、成長率 $-\alpha_H$ で減少しなくてはならない。このようなことは、一般には起こり得ない。正確には、生産関数の形状について追加的制約を課さない限り、こうした条件はみたされない。

6.3.2　均衡成長とハロッド中立的技術進歩

ハロッドの中立的技術進歩を満たす生産関数は既にみたように、(6.5) の形に書かれる。よって、一次同次性に注意すれば、

$$\frac{K}{Y} = \frac{K}{F(K,\ A_h L)} = \frac{1}{F\left(1,\ \frac{A_h L}{K}\right)} \tag{6.10}$$

であり、

$$r = \frac{\partial F}{\partial K}\left(1,\ \frac{A_h L}{K}\right) \tag{6.11}$$

となる。

今、労働が成長率 n で増大し、A_h が成長率 α_h で増大しているとする。均衡成長が実現するために、資本産出比率、利潤率が一定でなくてはならないが、上の式から、$F\left(1,\ \dfrac{A_h L}{K}\right)$ と $\frac{\partial F}{\partial K}(1,\ \frac{A_h L}{K})$ がともに、一定値でなくてはならない。これは、均衡経路上で満たされる。なぜなら、ハロッド＝ドーマー条件より、資本ストックの成長率は $\alpha_h + n$ であり、これはまさに $A_h L$ の成長率に等しい。よって、均衡経路上では $\dfrac{A_h L}{K}$ は一定値となり、(6.10) と (6.11) より資本産出比率、利潤率がともに一定になることがわかる。

6.3.3　均衡成長とソロウ中立的技術進歩

ソロウの中立的技術進歩を満たす生産関数は既にみたように、(6.7) の形に書かれる。よって、一次同次性に注意すれば、

$$\frac{K}{Y} = \frac{K}{F(A_S K,\ L)} = \frac{1}{A_S\ F\left(1,\ \frac{L}{A_S K}\right)} \tag{6.12}$$

であり、

$$r = A_S\ \frac{\partial F}{\partial K}\left(1,\ \frac{L}{A_S K}\right) \tag{6.13}$$

となる。

今、労働が成長率 n で増大し、A_S が成長率 α_S で増大しているとする。均衡成長が実現するために、資本産出比率と利潤率が一定でなくてはならないが、上の式から、$F\left(1,\ \dfrac{L}{A_S K}\right)$ と $\frac{\partial F}{\partial K}(1, \frac{L}{A_S K})$ がともに、成長率 $-\alpha_H$ で減少しなくてはならない。このようなことは、一般には起こり得ない。正確には、生産関数の形状について追加的制約を課さない限り、こうした条件はみたされない。

6.4　内生的技術進歩と成長

これまで、扱ってきた技術進歩は経済システムの外から与えられたものである。言葉を換えれば、技術進歩の水準は経済の活動水準から無関係に決められていた。こういう技術進歩を外生的技術進歩という。

しかし、研究開発（R&D）に対する投資は経済活動水準に依存するかもしれないし、基礎科学研究ですら経済活動水準から独立ではないかもしれない。よって、技術進歩の進展も経済システム内で決まるという可能性も考慮する必要が生ずる。これにより、これまで外生的であった均衡経済成長率（人口成長率と労働生産性の成長率の和）も内生化される可能性が生ずる。

ハロッド＝ドーマー条件は、

$$\frac{s}{C_r} = \alpha + n$$

であった。ここで、s は貯蓄率、C_r は望ましい資本産出比率、α は労働生産性の成長率、n は人口成長率であった。均衡成長の存在を考えるとき、

$$\frac{s}{C_r} > \alpha + n$$

ならば α が上昇し、

$$\frac{s}{C_r} < \alpha + n$$

ならば α が下落するメカニズムが存在するなら、均衡成長の存在がいえる。その場合、均衡成長率自身は内生化されていることに注意せよ。以下では、この考え方を新古典派モデルに導入する。

6.4.1　学習モデル

1960 年代において成長論がさかんに展開された時期に、技術進歩を内生化するという理論もおおく提示された。Arrow(1962) が有名である。[2] この時期における内生技術進歩をともなう成長論は、6.2 節で示した生産関数の中立技術進歩指標が、他の経済変数と関係するとして均衡成長経路が存在するかを調べるものがほとんどである。

Arrow(1962) は、資本設備が導入された時期ごとに異なるものとして、他時期の資本設備と代替的な生産要素とならないとするヴィンテージ・アプローチに、累積粗投資の増加関数としての技術進歩関数を導入した。彼は、過去の経済活動に依存する技術進歩を学習とよんだ。その設定のもとで、

- 均衡成長経路が存在すること
- 異時点間の外部性が導入されることにより、均衡成長経路がパレート最適でない

ことを示した。Arrow の論文は、多くの関連研究を生み、また 1980 年代半ばに成長理論の研究が活発化するきっかけを作った P. Romer にも強い影響を与えた。ここでは、Sheshinski(1967) によって簡単化された学習モデルを導入する。[3]

[2] Arrow,K.J.,"The Economic Implications of Learning by Doing," *REview of Economic Studies*,vol.29,pp.155-73

[3] Sheshinski,E."Optimal Accumulation with Learning by Doing," in K.Shell ed.,*Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*,MIT Press

これまで通りハロッド中立技術進歩をもつ資本ストック K と効率労働 AL に関して一次同次な生産関数

$$Y = F(K,\, AL) \tag{6.14}$$

を考えよう。資本財に関して、ヴィンテージ・アプローチをとらず、これまで通りの扱いをする。また、資本の減耗はないものとする。これにより純投資と粗投資の区別はなくなり、累積投資は資本ストック K そのものと考えることができる。

中立技術進歩指標（労働生産性）A に対して、以下のものを考える

$$A = K^{\gamma}, \quad (0 < \gamma < 1) \tag{6.15}$$

これを (6.14) に代入して気づくのは

$$Y = F(K,\, K^{\gamma}L) \tag{6.16}$$

となり、右辺を $\tilde{F}(K,\, L)$ のように K と L の生産関数としてみるとき、資本 K と労働 L について収穫逓増となることである。実際、任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\lambda K,\, \lambda L) &= F\left(\lambda K,\, (\lambda K)^{\gamma} \cdot (\lambda L)\right) && (6.17)\\
&= F(\lambda K,\, \lambda^(1+\gamma)K^{\gamma}L) && (6.18)\\
&> F(\lambda K,\, \lambda K^{\gamma}L) && (6.19)\\
&= \lambda \tilde{F}(K,\, L) && (6.20)
\end{aligned}$$

となる。

注意 5 学習関数 *(6.15)* の導入は、一定とされた労働生産性の成長率を内生変数に依存させるように変更したことを意味する。つまり

$$\alpha = \frac{\dot{A}}{A} = \gamma \frac{\dot{K}}{K}$$

学習関数 *(6.15)* を、労働節約的な技術の生産関数とみると、資本減耗がないという想定の下で、

$$\dot{A} = \gamma A \frac{\dot{K}}{K} = \gamma A \frac{I}{K} = \gamma A^{1-\frac{1}{\gamma}}\, I \tag{6.21}$$

という関数と考えられる。これは、A と I について規模に関して収穫逓減な関数となっている。

注意 6 学習の程度を示すパラメータ γ が *0* でもなく *1* でもないと想定されていることに注意しよう。$\gamma = 0$ ならば、労働生産性の上昇率が *0* を仮定したことになるので技術進歩自体が問題とされない。$\gamma = 1$ のとき、以下の均衡成長経路の議論が成立しない。

gamma が *1* に近づくにつれて何がおこるか、コブ・ダグラス関数で考えてみる。

$$\lim_{\gamma \to 1} K^{\alpha}(K^{\gamma}L)^{1-\alpha} = KL^{1-\alpha}$$

であるから、人口成長がないとき AK モデルを考えることに等しくなる。

注意 7 収穫逓増とみえる生産関数 $\tilde{F}(K, L)$ は分析者の視点からのもので、*Arrow* らはモデル内の生産者が *(6.15)* を知らずに、$F(K, AL)$ に対して利潤最大化などの合理的行動をとり、限界生産力に従う要素所得分配が成立すると想定した。

実は、学習モデルにおいて均衡配分とパレート最適配分が乖離する理由は、この点に求められる。つまり、分析者の視点からの収穫逓増は、モデル内の生産主体にとっての外部性になっているのである。

以下の議論は、通常のものとほぼ同じとなる。

$$I = \dot{K} = sY \tag{6.22}$$

が財市場の均衡条件である。人口成長率も一定とし

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \quad (n > 0) \tag{6.23}$$

とおく。効率労働 AL で測った資本 $k = \dfrac{K}{AL}$ に関して

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{K} - \gamma\frac{\dot{K}}{K} - n = (1-\gamma)\frac{\dot{K}}{K} - n \tag{6.24}$$

F が K と AL に関して一次同次であることから、資本ストック K と産出量 Y は同じ成長率で成長する均衡成長経路上では、k と資本産出比率 K/Y は一定値をとる。よって

$$\frac{\dot{k}}{k} = 0$$

から

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{n}{1-\gamma} \tag{6.25}$$

を得る。技術進歩率も「内生的」に

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{n\gamma}{1-\gamma} \tag{6.26}$$

として求まる。

注意 8 ここで $n = 0$ であるとき、そのときに限って経済成長率がゼロである。つまり、このモデルでは、本源的生産要素の拡大なしには、経済は拡大再生産を行わない。その意味で、「内生的成長」は生じていない。

また、均衡経路上の効率労働単位の資本 k^* は、Solow モデルでおいた関数

$$f(k) = F(k, 1) = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right)$$

を用いれば

$$sf(k) = \frac{n}{1-\gamma}k \tag{6.27}$$

の解として求められる。

$$\frac{f(k)}{k}=\frac{n}{(1-\gamma)s}$$

と上の式を書き換えれば、左辺が k の減少関数となることから、s の増加が均衡経路上の効率労働単位の資本 k^* を低下させることがわかる。（逆は逆。）

注意 9 以上、技術進歩関数（学習関数）が、*(6.15)* の形をしている場合には、モデルの特性は、*Solow* モデルとかわらない。成長率は、人口成長率 n、労働生産性に関するパラメタ γ のみから定まり、貯蓄率のような選好パラメターから独立となる。貯蓄率の変化は効率労働単位の資本 k^* のみを引き起こす。これは、*90* 年代の内生的成長理論の多くの帰結と異なる。

6.4.2 Romer の成長モデル

Romer(1986) は、人口成長率一定という仮定のもとで、技術進歩を原動力として経済成長が起こるモデルを考えた。[4] Romer は技術進歩関数を、技術（ストック）A と投資 I に関しての一次同次の関数で表現される「生産関数」

$$\dot{A}=G(A,\ I) \tag{6.28}$$

で表わされるとした。簡単化のために

$$\dot{A}=I^{\nu}A^{1-\nu}$$

のようなコブ=ダグラス型を考える。さらに、人口が成長する Solow モデルとの対比をするために、われわれは

$$\dot{A}=\gamma\left(\frac{I}{L}\right)^{\nu}A^{1-\nu} \tag{6.29}$$

とする。これは、労働生産性の技術進歩に関して

$$\begin{aligned}\frac{\dot{A}}{A} &= \gamma\left(\frac{I}{AL}\right)^{\nu}\\ &= \gamma\left(\frac{K}{AL}\right)^{\nu}\left(\frac{I}{K}\right)^{\nu}\\ &= \gamma k^{\nu}\left(\frac{I}{K}\right)^{\nu}\end{aligned} \tag{6.30}$$

という内生技術進歩を考えることになる。

以上の設定の下で人口成長率 n 一定の下での均衡成長

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{K}}{K}=\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{L}}{L} \tag{6.31}$$

[4] Romer,P.M.”Increasing Returns and Long-Run Growth,” *Journal of Political Economy*,vol.94,pp.1002-37

の条件を求める。これは、Solow モデル同様、効率労働 1 単位あたりの k が定常値をとることだから

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\dot{k}}{k} && (6.32)\\ &= \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} && (6.33)\\ &= \frac{\dot{K}}{K} - \gamma k^{\nu}\left(\frac{I}{K}\right)^{\nu} - n && (6.34)\\ &= \frac{\dot{K}}{K} - \gamma k^{\nu}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{\nu} - n && (6.35)\\ & && (6.36) \end{aligned}$$

が、その条件である。一方、財市場の均衡条件から、通常の Solow モデル同様

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sf(k)}{k} \tag{6.37}$$

である。結局、均衡における、効率労働 1 単位あたりの k と資本の成長率 $\frac{\dot{K}}{K}$ に関する連立方程式

$$\begin{cases} \frac{\dot{K}}{K} = \gamma k^{\nu}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{\nu} - n \\ \frac{\dot{K}}{K} = \frac{sf(k)}{k} \end{cases} \tag{6.38}$$

として均衡成長の条件が表現される。

演習 5 二番目の式は、$k - \frac{\dot{K}}{K}$-平面において右下がりの曲線をもたらすことを示せ。また最初の式は、$k - \frac{\dot{K}}{K}$-平面においてどんな曲線になるか確定できるか？

注意 10 明らかに *(6.38)* において、貯蓄率 k は資本の成長率、さらに産出量の成長率に影響をもっている。

注意 11 *Romer* は消費者の異時点間最適問題を含むような形でモデルを展開している。しかし、上で見たように貯蓄率が成長率に影響をもつという彼の結論を導くために本質的なのは、異時点最適問題の定式化ではなく、奇妙*?*な技術進歩関数の設定である。

多くの内生成長モデルが、異時点最適化の枠組みで議論される。しかし、ほとんどのモデルが定常状態を考え、また多くのモデルが相対危険回避度一定の効用関数を考える。結局、ラムゼイ問題を考えることは、*Solow* 型新古典派成長モデルの貯蓄率一定の想定を内生化する意味しかないことを考えると、上のことは当然といえば当然である。

6.4.3　人的資本モデル

これまで、労働生産性 A と労働人口 L の積 AL を効率労働とよんだ。ここでは、これをより一般的な人的資本という概念でひとまとめにして H という記号で表わす。ただし、H の時間的な変化は経済の状態に依存すると考える。人的資本という考え方は、生産性上昇

の背後には、教育に対する投資活動、労働生産性上昇に対するソフト・ハードな投資活動があるということを基礎とする。

ここで、生産関数を

$$Y = F(H,\ K) \tag{6.39}$$

で表わし、Y、K はこれまで通り、産出量と（物理的）資本ストックを表わす。また、生産関数の形状についても、一次同次、限界生産力逓減その他の通常の仮定を課すことにする。また、人的資本ストック１単位あたりの資本ストックを k、人的資本ストック１単位あたりの生産関数をこれまでとおり、$f(k)$ と書くことにする。

これまで異なるのは、投資が物的資本の増加に振り向けられる部分と、人的資本の増加に振り向けられる部分に分けられるという点である。つまり、投資を I と書くと、

$$I = I_K + I_H \tag{6.40}$$

ということになる。また、人的資本への投資について次のような関数に従うと仮定する。

$$I_H = G(\dot{H}, H) \tag{6.41}$$

関数 $G(\cdot,\cdot)$ は一次同次であるとする。[5] 物的資本の増分ついては、減耗を考えずに

$$I_K = \dot{K} \tag{6.42}$$

と考える。

一方、総貯蓄は

$$S = sY = sH\ f(k) \tag{6.43}$$

である。

貯蓄と投資の均等条件は、(6.40) と (6.41) と (6.42) と (6.43) から、

$$sH\ f(k) = \dot{K} + G(\dot{H},\ H) \tag{6.44}$$

と書かれる。両辺を H で割って、

$$\begin{aligned} s\ f(k) &= \frac{\dot{K}}{H} + \frac{G(\dot{H},\ H)}{H} \\ &= \frac{\dot{K}}{K}\frac{K}{H} + G\left(\frac{\dot{H}}{H}, 1\right) \\ &= \frac{\dot{K}}{K}k + G\left(\frac{\dot{H}}{H}, 1\right) \\ &= \zeta_K k + g(\zeta_H) \end{aligned} \tag{6.45}$$

[5] G は

$$\dot{H} = J(I_H,\ H)$$

という人的資本生産関数から得られたと考えてもよい。(6.30) と比較せよ。

を得る。ここで

$$\zeta_K = \frac{\dot{K}}{K}, \quad \zeta_H = \frac{\dot{H}}{H}$$

$$g(\zeta_H) = G(\zeta_H, 1)$$

とおいた。

単純化のために貯蓄のうち、人的資本形成に回す分と物的資本形成に回す分の比率は一定であると仮定する。つまり、$0 < \beta < 1$ として、

$$\zeta_K k = \beta s\ f(k), \quad g(\zeta_H) = (1-\beta)s\ f(k) \tag{6.46}$$

であると仮定する。

あとは、均衡成長の条件が、$\dot{k} = 0$ となることから、

$$\zeta_K = \zeta_H \tag{6.47}$$

と書き直される。均衡成長は、(6.46) と (6.45) と (6.47) から求められる。（未知数は k と ζ_K と ζ_H である。）結局、均衡成長の条件は、

$$\begin{cases} (1-\beta)s\ f(k) = g(\zeta) \\ \beta s\ f(k) = \zeta k \end{cases} \tag{6.48}$$

となる。これをさらに、

$$\begin{cases} \frac{1-\beta}{\beta} k = \frac{g(\zeta)}{\zeta} \\ \frac{s\ f(k)}{k} = \frac{\zeta}{\beta} \end{cases} \tag{6.49}$$

ここで、

仮定 1 　　$g' > 0, \quad g'' > 0, g(0) = 0$

とすると、第 1 式から

$$\frac{d\zeta}{dk} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{g'(\zeta)\zeta - g(\zeta)}{\zeta^2} \tag{6.50}$$

となるが、この右辺が正となることがわかる。一方、第 2 式から

$$\frac{d\zeta}{dk} = \beta \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} \tag{6.51}$$

が負になる。（生産関数の限界生産力逓減に注意せよ。）

よって、(6.49) の解は、右上がりの曲線と右下がりの曲線の交点で表わされる。これにより、解が存在するなら一意であることが示された。

このモデルにとってのパラメタである貯蓄率 s や人的資本・物的資本の配分比率 β の変化に対して、資本装備率 k や成長率 ζ がどのように変化するかを調べることができる。

最初に、貯蓄率の上昇を考える。連立方程式 (6.49) で貯蓄率が関係するのは、第 2 式である。s の上昇は、第 2 式の右下がりの曲線の右シフトをもたらす。これにより均衡成長率は上昇し、人的資本 1 単位あたりの物的資本は増加することが結論される。

演習 6 人的資本・物的資本の配分比率 β の変化によって、均衡成長率や人的資本 1 単位あたりの物的資本はどのように変化するかを考察せよ。

注意 12 ここでの人的資本モデルは、本源的生産要素を考えず、要素は資本のみであることに注意しよう。二種類の資本を単純に集計することはできないが、均衡経路上のおいて一定の比率合成された「資本」に関して限界生産力が逓減しない。この点は AK モデルと酷似している。

6.4.4 人的資本成長モデルの黄金律

黄金律を考えるためには、実際の人口 L の時間経路を与えて、労働生産性 $A = \frac{H}{L}$ を定義し、一人あたり消費を計算し、これを均衡成長の条件 (6.49) の制約のもとで最大化するという問題設定を立てる。この問題により、最適な資本装備率と最適な成長率が同時に定まる。

6.4.5 AK モデル

ここでは、よく議論される AK モデルを簡単にまとめる。生産関数を

$$Y = AK$$

のように簡単なものとする。資本の限界生産力は一定で逓減しないことに注意しよう。テキストでよく使われるのは、粗投資 $\dot{K} + \delta K$（δ は資本減耗率）と総貯蓄 sY の均等という財市場の均衡 c 条件である。

$$\dot{K} + \delta K = sY$$

以上の式から成長経路上で、

$$\frac{\dot{K}}{K} = sA - \delta = \frac{\dot{Y}}{Y}$$

が成立する。

注意 13 成長率は、本源要素の成長率に依存せずに、パラメータ A や貯蓄率 s に依存して決まっている。その意味で、AK モデルはモデルはもっとも単純な内生的成長なのである。

演習 7 *1980* 年代後半以降に登場した内生的成長理論は、どのような政策的含意をもつだろうか。