

講義ノート

伊藤幹夫

平成11年 6月 16日

Chapter 5

最適成長理論

この章では、なんらかの意味での最適性を満たす経済成長経路はどんな性質を満たすかを調べる。それは、均衡成長経路上の一人あたり消費量の最大化であったり、代表的個人の通時的効用であったりする。ただし、自由主義経済における最適成長理論の応用については、解釈的な面で慎重にする必要がある。

5.1 新古典派成長理論における黄金律

最適成長理論を考えると最も簡単なのが、ソロウやトービンによる新古典派成長理論において一人あたりの消費量を最大にするという意味での最適成長を考える理論である。

くり返しになるが、貨幣を含まない新古典派理論の均衡成長の条件は

$$s f(k) = (n + \alpha)k \quad (5.1)$$

である。ここで k は効率労働単位の資本ストック、 f は k で表現された一人あたり産出を表わす生産関数、 n は人口成長率、 α は労働生産性の成長率である。つまり、均衡成長が成立するとき貯蓄率は、

$$s = \frac{(n + \alpha)k}{f(k)} \quad (5.2)$$

をみताす。

逆に、上の条件の下で一人あたり消費量を最大にする貯蓄率はどんな水準かを考えることができる。まず、一人あたり消費量は、

$$\frac{C}{L} = \frac{Y - S}{L} = \frac{AL f(k) - sAL f(k)}{L} = (1 - s)A f(k) \quad (5.3)$$

である。これに (5.2) を代入すると

$$\frac{C}{L} = A (f(k) - (n + \alpha)k)$$

である。これを最大にする k をを見つけるには、右辺を微分してゼロとおいて整理する。これにより、

$$f'(k) = (n + \alpha) \quad (5.4)$$

を得る。この条件を黄金律という。

以下では、この条件の意味を考えてみよう。上の式の左辺は資本の限界生産力である。黄金律はこれが産出量の成長率に等しいことを要求する。また、

$$\frac{C}{L} = f(k) - k f'(k)$$

とも書き直すこともできるから、一人当たり消費が労働の限界生産力に等しいと結論できる。つまりこの条件は、実質賃金率が労働の限界生産力に等しく定まるという条件が成立するならば、一人当たり消費が賃金率に等しくなると読みかえてもよい。あるいは、消費が賃金所得に等しくなるともいえる。これは、貯蓄が利潤所得に等しいともいえる。均衡で貯蓄と投資は均衡しているはずだから、投資が利潤所得に等しいとも言い換えられる。

以上のことは、興味深い結果を導く。3章で触れた労働者のみが消費し、資本家は所得のすべてを貯蓄に振り向けるという古典派経済の均衡成長の条件が、まさに黄金律にほかならない。ただし、黄金律を満たす経済が、古典派経済である必要はない。実際、黄金律は投資が利潤所得に等しいことを要求するだけで、利潤所得を投資しなければ黄金律が成立しないとはいっていない。つまり、賃金所得の一部が貯蓄に回され、利潤所得の一部が消費に回される経済でも黄金律の実現は可能なのである。

以上は、最適消費の理論のもっとも簡単なものである。

5.2 最適貯蓄の理論：ラムゼイ問題

前節では、均衡成長経路上で「一人あたり消費を最大にする」のはどんな経路かということの問題にした。このことは、均衡経路以外にあるかもしれない、望ましい経済成長経路を考慮から排除している。また、歴史的に決まっている資本ストックの初期値から出発して、望ましい均衡経路にどのように近づくかという問題も考慮の対象外になる。

この節では、ある資本ストック水準から出発して別の資本ストック水準を終点とする成長経路のうち、もっとも経済厚生の高いものはどんな成長経路かを明らかにすることを目的とする。この問題は、最適貯蓄の理論、あるいは最適消費の理論とよばれる。最初にこの問題を考えた学者の名前をとってラムゼイモデルとよばれたりする。¹具体的には、每期々々の生産物のうちどれだけを資本蓄積のための貯蓄に振り向け、どれだけを消費に振り向ければ、経済厚生が計画期間全体で高まるかを問題とする。

¹F.P.Ramsey, "A Mathematical Theory of Savings," *Economic Journal*, 38, 1928, pp.543-559 をみよ。

5.2.1 ラムゼイ問題の定式化

モデルの設定としては、3章を踏襲する。ただし離散時間を考え、人口の初期値 L_0 、人口成長率 n 、一人あたり資本ストックの初期時点 0 における値 k_0 と、計画終期 T における値 k_T は与えられているものとする。また技術進歩は考えない。²

t 時点の一人当たりの貯蓄は、 t 時点の一人当たりの生産高から t 時点の一人当たりの消費 c_t をひいたものに等しいから、

$$f(k_t) - c_t$$

と表わされる。ここで、 $f(k)$ は一人あたり生産関数である。これの形状についてはこれまでとおり、

$$\text{仮定 2 } f' > 0, \quad f'' < 0$$

を仮定する。一方、人口成長率が n であることに注意すると、この貯蓄とバランスするのは、

$$(1 + n)k_{t+1} - k_t$$

である。

演習 11 上のふたつがバランスすることを、一人当たりでない、経済全体の貯蓄・投資のバランスから導け。

以下我々は、

$$(1 + n)k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t \tag{5.5}$$

であるような経済成長経路を考える。この経路上では、財市場がつねに均衡していることに注意せよ。

さて、上の (5.5) をみたく経路は無数にあるから、我々は、なんらかの意味での社会的厚生評価の基準を導入して、(5.5) をみたく経路の中から最適なものを選ぶ必要がある。そこで、各期の消費から得られる効用の割引現在価値の総和を社会的厚生として採用する。つまり、

$$W = u(c_0) + \frac{u(c_1)}{1 + \rho} + \cdots + \frac{u(c_{T-1})}{(1 + \rho)^{T-1}} \tag{5.6}$$

を考える。ここで、 ρ は正の値をとる実数で、時間選好率とよばれる。また、効用関数 $u(\cdot)$ については、

²人口は、

$$L_t = L_0(1 + n)^t$$

で表わされる。

仮定 3 $u' > 0$, $u'' < 0$

を仮定する。

ここで、ラムゼイ問題を形式的に整理すると、

k_0 と k_T を所与とし、(5.5)を制約として、(5.6)を最大にする、 k_1, k_2, \dots, k_{T-1} を求めよ。

ということになる。ここで、一人当たり資本蓄積計画、 k_1, k_2, \dots, k_{T-1} が決まれば、(5.5)によって、一人当たり消費計画 c_0, c_1, \dots, c_{T-1} ならびに、一人当たり産出計画 y_1, y_2, \dots, y_{T-1} が定まってしまうことに注意せよ。

5.2.2 ラムゼイ問題の解

上の問題は典型的な制約条件付きの最大化問題であり、この場合最大のための必要条件は比較的簡単に導出することができる。それは、次のようなものである。

$$(1+n) \frac{u'(c_{t-1})}{(1+\rho)^{t-1}} = (1+f'(k_t)) \frac{u'(c_t)}{(1+\rho)^t}, \quad (t=1, \dots, T-1) \quad (5.7)$$

演習 12 上の条件を導け。(ヒント：(5.5)を用いて、 c_t を消去するか、ラグランジュの未定乗数法を使うこと。)

以下では、この条件を経済学の言葉で表現しなおしてみる。まず簡単な計算によって、

$$(1+n)(1+\rho) \frac{u'(c_{t-1})}{u'(c_t)} = 1+f'(k_t) \quad (5.8)$$

という書き換えができる。この左辺は、人口比率が1対 $(1+n)$ である二時点間の経済全体の限界代替率と考えられる。右辺は、資本の限界生産力に1を加えたものに等しい。これは、「前期と今期の消費の経済全体の限界代替率が資本の限界生産力に1を加えたものに等しい。」とまとめることができる。いうなれば、時間を考慮したときのパレート最適性の条件といえるものになっている。

(5.8)をつぎのように書き換えてもよい。

$$\frac{u'(c_{t-1}) - u'(c_t)}{u'(c_t)} = \frac{1}{(1+n)(1+\rho)} (f'(k_t) - (n+\rho+n\rho)) \quad (5.9)$$

この場合、「一期あたりの効用の減少率が資本の限界生産力から成長率と時間選好率をひいた大きさに比例する」と言い換えることもできる。

5.2.3 消費ターンパイク定理

さて上で求めた、最適資本蓄積計画のための必要条件の式(5.7)は(5.5)を用いれば、 c_t を消去することができ、最終的には、 k_t についての二階の差分方程式になる。実は、これを

解くためには、 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{T-1}, k_T$ のうち二つが与えられていればよい。我々は、 k_0 と k_T を所与としたから、確実に解くことができる。³

あるいは、(5.5) と (5.7) を連立させたものが2元1階差分方程式とみなすこともできる。この場合も k_0 と k_T を所与としており、一意に解くことができる。

実は、この経路については「消費ターンパイク性」という興味深い性質が成立することが知られている。これは、上の問題の解経路 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{T-1}, k_T$ は、計画期間中の大部分において、前節で得た黄金律を満たす経済成長路の近傍に位置するというものである。以下、このことを解説しよう。

(5.9) の両辺がゼロになるのはどんな経済成長経路かを考えてみる。このとき、 c_t はあらかじめ一定値をとる。よって、 k_t も右辺がゼロになる水準、つまり

$$f'(k) = n + \rho + n\rho \approx n + \rho \quad (5.10)$$

を満たす k にとどまる。実は、これが修正された黄金律とよばれるものなのである。なんとなれば、 $\rho = 0$ とおけば、前節と同じ条件が導かれる。

さて(5.10)をみたます k^* をここでは黄金律経路とよぶ。これとすぐ上で求めたラムゼイ問題の解経路 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{T-1}, k_T$ には、関係がある。

定理 1 ラムゼイ問題の解 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{T-1}, k_T$ を考えるとき、

$$\varepsilon > |k_t - k^*| \geq \varepsilon$$

となる、 t は T から独立に決まる期間数 T' にとどまる。

この定理の意味は、初期点と終端点を所与とするとき、黄金律の近傍を与えるとその近傍にとどまらない期間数は、全体の計画期間数から独立に決まる。よって、計画期間数を大きくするに従って、黄金律から大きく乖離した経路に属する期間数が相対的に小さくなっていくということを意味する。つまり、日常生活において、出発点と終点が与えらるとき、まず高速道路(ターンパイク)に乗り、そこで十分時間を過ごしたあと、高速道路を降り目的地に向かうのが効率がよいという言い方と似ている。このため、この定理がターンパイク定理とよばれるのである。

以下キヤスによる証明を基礎に解説を行なう。⁴

前節では、一人あたりの資本 k_t についての二階差分方程式あるいは、 k_t と一人あたり消費 c_t の連立差分方程式とみなした。しかし、ここでは

$$q_t = u'(c_t) \quad (5.11)$$

とにおいて、一人あたり消費の限界効用を問題にする。また、変数の差分をこれまでどおり Δ をつけて表わすことにする。(5.5) と (5.11) から

$$q_t = u'(f(k_t) - nk_{t+1} - \Delta k_{t+1}) \quad (5.12)$$

³この場合の差分方程式を解く問題を、境界値問題という。

⁴Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation A Turnpike Theorem," *Econometrica*, 34, 1966, pp.1-1 をみよ。

を得る。⁵

一方、最適化のための必要条件(5.7)を(5.11)を使って書き直すと、

$$\Delta q_t = -\frac{1}{(1+n)(1+\rho)} (f'(k_t) - (n + \rho + n\rho)) q_t \quad (5.13)$$

となる。以上の(5.12)と(5.13)がわれわれの、基本動学方程式体系である。

以下、

1. 動学方程式の定常点と修正黄金律経路の関係
2. $\Delta k = 0$ であるような k と q の組み合わせ
3. $\Delta q = 0$ であるような k と q の組み合わせ
4. 位相図
5. 初期条件と終端条件を設定したときの経路の性質
6. ターンパイク性質

の順で、上の動学体系を調べていく。

動学方程式の定常点と修正黄金律経路の関係 定常点とは、(5.12)と(5.13)において、 $\Delta k = 0$ かつ $\Delta q = 0$ をみたす経路をいう。ただし、経路といっても定義から両変数とも時間を通じて一定であるような特別な経路である。

これは、容易にわかるように、前節でみた修正された黄金律経路に対応している。つまり、(5.10)を満たす経路になっている。

演習 13 上のことを確認せよ。

$\Delta k = 0$ であるような k と q の組み合わせ 定常点は $\Delta k = 0$ かつ $\Delta q = 0$ が同時に満たされる点であった。では $\Delta k = 0$ のみが満たされるの k と q の組み合わせはどんなものだろうか。つまり、これは(5.12)で $\Delta k = 0$ とおいて得られる

$$q = u'(f(k) - nk) \quad (5.14)$$

である。これは、 $u'(\cdot)$ が右下がりの関数であること、 $f(k) - nk$ が元々の黄金律を満たす k^+ 、つまり

$$f'(k) = n$$

である k^+ で最大となる単峰の山なりの関数であることから、 k^+ で最小となる U 字型の曲線となる。

⁵この式は、 $u'(\cdot)$ に逆関数があるとすれば、 $\Delta k_{t+1} = f(k_t) - nk_{t+1} - u'^{-1}(q_t)$ という、動学方程式らしい形に書きかえることもできる。

$\Delta q = 0$ であるような k と q の組み合わせ 今度は、 $\Delta q = 0$ であるような k と q の組み合わせを考える。つまり、(5.13) で $\Delta q = 0$ とおいて得られる

$$f'(k) = n + \rho + n\rho$$

である k と q であるが、上の式は、 q に依存しないから $k = k^*$ という $k - q$ 平面における垂直線である。ただし、 k^* は修正された黄金律 (5.10) を満たす k である。

位相図 今度は、位相図を用いてわれわれの動学体系を解析してみよう。すでに、 $\Delta k = 0$ を満たす k と q の組み合わせ、 $\Delta q = 0$ を満たす k と q の組み合わせを表わす曲線の形状はみた。また、その二つの曲線の交点が修正された黄金律に対応することも確認した。

あとは、その二つの曲線で囲まれる四つの領域での k と q の動きを考える。まず、 $\Delta k = 0$ である U 字型の曲線の上の部分では、 $\Delta k > 0$ 、つまり $k_t > k_{t-1}$ となり、 k が増加し、 $\Delta k = 0$ である U 字型の曲線の下部分では、 $\Delta k < 0$ 、つまり $k_t < k_{t-1}$ となり、 k が減少することがわかる。

演習 14 上のことを確認せよ。

また、 $\Delta q = 0$ である垂直線の右の部分では、 $\Delta q > 0$ 、つまり $q_t > q_{t-1}$ となり、 q が増加し、また、 $\Delta q = 0$ である垂直線の左の部分では、 $\Delta q < 0$ 、つまり $q_t < q_{t-1}$ となり、 q が減少することがわかる。

大ざっぱにいうと、図のような動きを示す。

さらに、 $\Delta k = 0$ である U 字型の曲線を横切る経路は、曲線を横切るとき q 軸に平行な方向で横切る。また、 $\Delta q = 0$ である垂直線を横切る経路は、曲線を横切るとき k 軸に平行な方向で横切る。

k^* に収束していく経路が $k - q$ 平面に一本、 k^* から遠ざかる経路も $k - q$ 平面に一本描ける。

演習 15 以上のことを確認せよ。

初期条件と終端条件を設定したときの経路の性質 われわれは、動学方程式を満たす経路のうち、 k_0 から出発して、 k_T にたどり着く経路を考える。位相図を使って考えると、 $k = k_0$ である垂直線のどこかの点から出発して、 $k = k_T$ である垂直線のどこかの点にたどり着く経路である。こうした経路は、無数にある。しかし、最初の問題設定に合致するのは、 T 期間でたどり着く経路である。この経路は実は、一つしかない。

それを示すために、次の事実を示す。 $\Delta k = 0$ である U 字型の曲線の上方(下方)では、 q が大きいほど k の変化 $\Delta k > 0$ ($-\Delta k > 0$) が大きい。 $\Delta q = 0$ である垂直線の左方(右方)では、 k が大きいほど q の変化 $\Delta q > 0$ ($-\Delta q > 0$) が大きい。(5.12) から、

$$\frac{\partial \Delta k}{\partial q} = -\frac{1}{u''(c)} > 0 \quad (5.15)$$

と(5.13) から

$$\frac{\partial \Delta q}{\partial k} = -\frac{1}{(1+n)(1+\rho)} f''(k)q > 0 \quad (5.16)$$

であるから、 k_0 から単調に増加（あるいは減少）して k_T に達する経路も、 k_0 から overshoot してから k_T に達する経路も、 k が同じなら q が上方に属する点を通る経路の k の速度 Δk が大きく、 q が同じなら k が右方に属する点を通る経路の q の速度 Δq が大きいためである。このことは、「定常点の近傍ほど時間がゆっくり流れる」という性質としてまとめられる。

このため、垂直線 $k = k_0$ の上の方の点を出発点として垂直線 $k = k_T$ に達する経路の期間数を考えるとき、出発点を下にずらすほど、要する期間数は増加する。よって、適当なところで、計画期間が T である経路が存在する。

ターンパイク性質 上のことから、長期の計画ほど定常点のヨリ近くを通り、修正された黄金律経路の近くで長時間を過ごす。

5.3 補論

この節で述べた、最適成長論はどちらかというとな規範的な枠組み展開された。しかし、最近では最適成長論は、実証的な文脈で用いられることが多い。それは、ある条件のもとで最適成長経路が市場均衡による均衡経路と同一と見なせるからである。これは、厚生経済学の基本定理によってパレート最適な資源配分と市場均衡による資源配分が所得の再分配を前提とすれば一致することに対応している。つまり、市場均衡を捉えるために最適配分を考えるという、接近法を採用しているわけである。

こうした最適成長論は、ここ10年ほどに盛んになった実景気循環理論の核をなしている。つまり、景気循環という実証的な現象を扱うために最適成長理論という本来規範的な理論が、利用できるのである。