講義ノート

伊藤幹夫

平成11年 6月 16日

Chapter 2

ハロッド＝ドーマーの理論

ここでは、戦後に経済成長理論の基礎を築いたハロッド＝ドーマーの成長理論を取り上げる。

ハロッドはケインズの弟子である。その問題意識は『一般理論』の動学化にあった。彼が、自身の経済動学の出発点となった論文を書いたのは1939年であり、ケインズ『一般理論』の出版と時期的にそれほど離れていない。その後、1948年に主著を発表している。これに対して、ドーマーはハロッドと独立に同様の考えに、戦争直後の1946年に到達し論文を発表している。問題意識も類似している。[1]

ハロッド＝ドーマーの成長理論は、成長の主要な要因としての資本蓄積と生産技術、人口増加、需要要因としての貯蓄性向などの間の関係を解明した。この理論は、枠組み自体が単純であり、その後の成長理論に大きな影響を与えている。

2.1 ハロッドのモデル

ここでは、ハロッドのモデルを簡単にみてみよう。ハロッドは、次のような仮定に従うマクロ経済を想定している。

- 貯蓄性向は一定である。
- 資本係数は一定である。
- 労働力人口と労働生産性はそれぞれ一定の成長率で成長する。

ここで、貯蓄性向は平均貯蓄性向、資本係数は産出物１単位の生産に必要な資本の量である。正確にいえば、ここで言う資本係数は限界資本係数であり、産出物の増加分に対する資本の増加分の比率を指す。

以下で次の記号を使用する。

[1] Harrod R.F., *Towards a Dynamic Economics*, Macmillan, London, 1948 ならびにDomar E.D., *Essays in the Theory of Economic Growth*, Oxford Univ. Press, New York, 1957を参照。後者は、Domarの論文集である。

G : 現実の成長率
G_n : 自然成長率(後述)
G_w : 保証成長率(後述)
Y : 産出量
K : 資本ストック
C : 資本係数
C_r : 必要資本係数(後述)
I : 投資$\equiv \Delta K$
S : 貯蓄
s : 貯蓄率
n : 人口成長率
α : 労働生産性の成長率

なお、Δを変数につけることによって、期間内増分をあらわすことにする。

まず、現実の成長率Gと資本係数C、貯蓄率sの三者の間の関係を考える。事後的に貯蓄と投資が等しくなることから、

$$I \equiv \Delta K = S = sY$$

が成立する。第二辺と第四辺の均等を考え、両辺に$\frac{1}{\Delta Y}\frac{\Delta Y}{Y}$をかけて、

$$GC = \frac{\Delta Y}{Y}\frac{\Delta K}{\Delta Y} = s$$

となる。これは、ハロッドモデルの基本方程式である。

つぎに、自然成長率G_nを定義する。これは、人口の増加と技術進歩によって可能とされる成長率である。具体的には、人口成長率と労働生産性の成長率の和である。つまり、

$$G_n = n + \alpha$$

である。もし、初期時点で完全雇用が実現されており、それ以降の産出が自然成長率に等しいなら、完全雇用が維持される。

演習 1 その理由を考えよ。

自然成長率は労働市場が、常にクリアされるような経済成長が成立するときの成長率だということができる。

最後に、保証成長率を定義する。保証成長率とは、設備を完全に利用する場合の成長率である。いまΔY_rを生産者にとって、設備の完全利用という意味で望ましい生産を行ったときの生産増加量とする。

$$G_w \equiv \frac{\Delta Y_r}{Y_r}$$

と定義される。以下、G_wに関する基本的な方程式を考える。

また、I_rを生産者にとって望ましい投資量としよう。また、必要資本係数C_rを産出の増大一単位に必要な資本の増大をあらわすことにする。資本設備が完全利用される時、望ましい投資量I_rは

$$I_r = C_r \Delta Y_r$$

となっている。

さて、上の望ましい投資量I_rが貯蓄Sに等しいなら、つまり$I_r = S$なら

$$G_w \equiv \frac{\Delta Y_r}{Y_r} = \frac{I_r}{YC_r} = \frac{sY_r}{YC_r} = \frac{s}{C_r}$$

を得る。これから、

$$G_w C_r = s$$

という別の基本方程式が得られる。以上みたように、保証成長率は財市場が常にクリアされるような経済成長が行なわれる場合の成長率ということができる。

次の節では、ハロッド モデルの成長経路の性質を基本方程式を用いて調べることにする。

2.2 均衡成長経路の存在と安定性

前の節で、現実の成長率、自然成長率、保証成長率の三つを考えた。この三者が等しい状態を均衡成長とよぶ。均衡成長では、完全雇用と資本の完全利用が一定の成長率の下で達成される。

まず均衡成長の存在の可能性を考える。均衡成長が実現されるためには、$G_w = G_n$が必要である。このことは、上に書いた二つの定義式から、

$$\frac{s}{C_r} = \alpha + n$$

を含意する。これは、それぞれ本来独立なパラメターに対して制約を課す条件式である。つまり、この条件が成立するのは偶然しかない。結論的にいうと、ハロッド のモデルでは均衡成長の成立は、現実的ではない。

安定性を考察する前に、均衡成長が成立するとき、それぞれのパラメターと成長率の関係をまとめておこう。均衡成長時には、

$$G = \frac{s}{C_r} = \alpha + n \tag{2.1}$$

となる。これは、人口成長率あるいは技術進歩が大きいほど経済成長率が高い。また、貯蓄率が高いほど、経済成長率が高いことを示す。ハロッド モデルでは、労働と資本の代替が考えられていないから、資本と所得は同一の成長率で成長する。一方、貯蓄率が高いほど、資本蓄積率$I/K = sY/K = s/C_r$は高くなるためである。

次に、この三者に乖離が生じているとき、ハロッド モデルはどのような挙動を示すか考えてみよう。現実の成長率Gと保証成長率G_wの関係にしたがって、つぎのような動きをする。

$G > G_w$**のとき** $GC = s = G_w C_r$が成立しているから、$C < C_r$となる。よって、投資不足。資本ストックはますます増加し、Gはさらに上昇する。

$G < G_w$**のとき** 上とまったく逆の過程をたどって、Gは減少していく。

結局、$G = G_w$が成立しないとき、$G = G_w$を成立させようとする力は一切存在しない。この命題をハロッドの不安定性原理という。

演習 2 自然成長率と現実の成長率が乖離するとき、何がおこるかを考えよ。

2.3 ハロッドモデルの意義

ハロッドモデルは、1950年代、1960年代に展開されたほとんどすべての経済成長理論の先駆けとして高く評価される。実際、ハロッド以降のモデルはハロッドの仮定を修正することによって、彼の不安定性原理と逆の結論を得るという理論が多い。

(2.1)に表われる、資本係数、人口成長率、貯蓄率、労働生産性の成長率の四者になんらかの可変性を仮定して、均衡成長経路の安定性を得る。実際には、どれに可変性を求めるかによって成長理論のタイプが幾つかに分類される。

C_r ソロウ、トービンらの新古典派成長理論

s ケンブリッジ学派の成長理論

n いわゆる経済発展論

α 誘発的技術進歩を含む成長理論

これらの幾つかを次章で取り扱う。

ほかに、ハロッドの不安定性原理の論証自体に問題が存在するという立場も存在する。これについては、補論で取り扱う。

補論：ハロッドの不安定性原理の問題

ハロッド自身の不安定性原理は、本論で述べたような叙述的なものである。動学経路を差分方程式あるいは微分方程式の解として特徴づけていなため、そのような接近法を採ったとき、不安定性原理が本当に成立するかについては、疑問の余地があることが指摘されている。[2]

それは以下に述べるような問題である。現実の成長率と保証成長率が$G < G_w$という関係にあるとき、確かに$C > C_r$である。このことが投資を増加させ、ひいては所得を増加さ

[2]例えば、Jorgenson D.W., “On Stability in the Sense of Harrod,” *Economica*, **27**, 1960, pp.243-248を見よ。

せる。しかし、このことはよく考えると、来期の現実の成長率が今期の現実の成長率を上回ることを、直接には含意しない。

さらには、ハロッドの安定性は産出量の時間経路のどういう性質を指すのかということについての混乱も当時生じた。具体的には、時間 t にしたがって変動する系列、X_t と Y_t を考えて、後者が一定の成長率で増加する時、前者がどういう経路をとれば安定というかという問題である。X_t と Y_t の差の絶対値が時間の経過につれてゼロになるということも考えられるし、X_t の成長率が時間の経過にしたがって、固定的な Y_t の成長率に近づくということも考えられる。この二者は明らかに異なる安定の概念である。実際、$X_t = 3\exp((2+1/t)t)$、$Y_t = 4\exp(2t)$ とするとき、前者の概念では不安定であるが、後者の概念では安定になる。

ハロッドが問題にした不安定性は、当然後者の安定性であることに注意すべきである。なお、もしこの意味で安定なら、二つの経路の比率は一定値に近づくことに注意せよ。

安定の可能性：ジョルゲンソンの論理

実は、資本財市場での不均衡解消のメカニズムについての仮定の置き方によっては、ハロッドモデルでの安定性を示すことができる。つまり、乖離した現実の成長率は、保証成長率に再び戻りうることを示せる。以下、これを示す。

まず、ハロッドのモデルを差分方程式体系として、厳密に定式化しなおす。

$$sY_{t-1} = C(Y_t - Y_{t-1}) \tag{2.2}$$

である。これは、現実の成長率と資本産出比率の積が貯蓄率に等しいという関係である。[3]

次に、保証成長率の定義を再びあげる。

$$G_w = \frac{s}{C_r} \tag{2.3}$$

ここで、資本財の超過需要を D_t と書くことにする。つまり、

$$D_t = C_r(Y_t - Y_{t-1}) - C(Y_t - Y_{t-1}) \tag{2.4}$$

である。

さて、ハロッドの不安定性の論証には、資本財の超過需要があるとき生産者は次期の資本財の注文を増やすという仮定が用いられている。これを、

$$D_t - D_{t-1} = kD_{t-1} \tag{2.5}$$

という定式化をする。つまり、超過需要が正のとき、次期の超過需要の増加は超過需要に比例する。当然 k は正の定数である。

(2.2) と (2.4) から

$$D_t = C_r(Y_t - Y_{t-1}) - sY_{t-1} \tag{2.6}$$

これを Y_t について解いて、

[3] 左辺が投資に等しいとすると、形式的に加速度原理と等しくなる。

$$Y_t = \left(1 + \frac{s}{C_r}\right) Y_{t-1} + \frac{1}{C_r} D_t \tag{2.7}$$

を得る。さらに、(2.3) と (2.5) を代入して、

$$Y_t = (1 + G_w) Y_{t-1} + \frac{1+k}{C_r} D_{t-1} \tag{2.8}$$

一方、(2.5) を

$$D_t = (1+k) D_{t-1} \tag{2.9}$$

と変形すれば、(2.8) と (2.9) は連立差分方程式を形成する。
この方程式体系の固有値は$1 + G_w$と$1 + k$であるから、Y_tについての解は、

$$Y_t = A(1 + G_w)^t + B(1+k)^t \tag{2.10}$$

となる。AとBは初期値によって定まる任意定数である。
保証成長経路は、

$$X_t = H(1 + G_w)^t \tag{2.11}$$

と表わされる。ここで、Hは初期値によって定まる任意定数である。
$\dfrac{Y_t}{X_t}$を求めると

$$\frac{Y_t}{X_t} = \frac{A}{H} + \frac{B}{H}\left(\frac{1+k}{1+G_w}\right)^t \tag{2.12}$$

が得られる。$t \longrightarrow \infty$としたとき、$G_w \geq k$なら左辺が定数に収束することがわかる。つまり、ハロッドの意味で安定となる。
この条件の否定つまり、不安定であることは、上の枠組みで、「資本財の超過需要が正なら、生産者は産出の増加率をあげる。」と言い換えることができることを示す。

$$\begin{aligned} k > G_w \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 + k > 1 + G_w \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{D_{t+1}}{D_t} > \frac{Y_t}{Y_{t-1}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{D_{t+1}}{C_r Y_t} > \frac{D_t}{C_r Y_{t-1}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{s}{C_r} + \frac{D_{t+1}}{C_r Y_t} > \frac{s}{C_r} + \frac{D_t}{C_r Y_{t-1}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

(2.7) を変形して、

$$\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{s}{C_r} + \frac{D_t}{C_r Y_{t-1}} \tag{2.14}$$

と１期ずらした関係から、上の最後の不等式(2.13) は、

$$\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t} > \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} \tag{2.15}$$

となる。

以上展開したことをまとめると、ハロッドの不安定性原理が成立するためには、「資本財に超過需要があるとき、生産者は生産の増加率を大きくする」あるいは上に述べた枠組みではおなじことであるが、「資本財に超過需要の増加率は、保証成長率より大きい」が成立することが、必要かつ十分である。

演習 3 上に述べた条件、*(2.5)* をほかのものに、替えてハロッドの不安定原理が成立するかを調べよ。

不安定の可能性：ハーン＝マシューズの論理

まず、望ましい資本蓄積率と現実の資本蓄積率を区別する。これらは、意思決定と実行の時間ずれにより互いに異なっているかもしれない点に注意しよう。

ξ_t^*を望ましい蓄積率として、次のように考える。

$$\xi_t^* = \frac{s}{C_r} + h\left(\frac{K_t^* - K_t}{K_t}\right), \quad h > 0 \tag{2.16}$$

蓄積率の変化率は、望ましい蓄積率と現実の変化率との差に依存すると仮定する。つまり、以下のように仮定する。

$$\dot{\xi}_t = c(\xi_t^* - \xi_t), \quad c > 0 \tag{2.17}$$

しかし、

$$\frac{sY_t}{K_t} = \xi_t$$

だから、これの両辺に

$$C_r = \frac{K_t^*}{Y_t}$$

をかけると

$$\frac{K_t^*}{K_t} - 1 = \frac{\xi_t C}{s} - 1 \tag{2.18}$$

となり、これを *(2.16)* に代入し、*(2.17)* を使うと、

$$\xi_t = \frac{s}{C} + \left(\xi_0 - \frac{s}{C}\right) e^{c\left(\frac{hC}{s}-1\right)t} \tag{2.19}$$

を解とする微分方程式を得る。明らかに、$h < \frac{s}{C}$であることと、$t \longrightarrow \infty$のとき$\xi_t \longrightarrow \frac{s}{C}$となることが同値になる。