

## Chapter 9

# 資産選択と最適化問題

事前には収益率が確定しない、様々な投資対象に直面するとき、投資家は投資対象が、当たれば得も大きいが外れれば損が大きいというとか、高い収益は見込めないが大損はしないとかを考慮して、自分の資産を様々な投資対象に充て、もっとも望ましい資産を構成しようとするだろう。ここでは、資産選択の理論のごく初步を、これまで学習した最適値問題との関連で解説する。

以下では経済主体は自らの富が大きければ大きいほど満足が高いという状況を前提に話を進める。

## 9.1 不確実性の数学的表現

将来の富が不確実であることをどのように表現したらよいのだろうか。例えば、ある会社の株を所有すると、その会社が挙げた利益からの配当と、株の値上がりによる株価値上がり益(capital gain)が基本的に富の増加として考えられる。しかし、会社の業績は、将来にわたって不確実であり、1年後業績不振で配当はゼロ、さらに株価も急落という憂き目にあうかもしれない一方、業績絶好調で配当は入るは、株価は急上昇で保有株式の価値が上がるかもしれない。

以上のような状況は、確率変数によって表現される。具体的には、将来の値(もしくは値のとる範囲)とそれが生起する確率を対にして考える。ある投資信託物件の税引き後の利回り $r$ が、5パーセント以上になる確率、3パーセント以上になる確率、1パーセント以下になる確率等々を、考えることによって、投資信託の収益率の将来の変動を総合的に考慮するわけである。数学的には $r$ を確率変数とみて、その確率分布関数 $F(x)$ あるいは確率密度関数 $f(x)$ を考える。ここで確率分布関数は

$$F(x) = \text{Probability}(r \leq x)$$

をあらわし、確率密度関数は確率分布関数を微分したものである。あきらかに確率分布関数は0と1の間をとる増加関数となる。

さらに、ある投資信託物件と別の資産対象の利回りは逆の動きを示す傾向があるかもしれないし、同じ動きを示す傾向があるかもしれない。例えば、ある投資信託物件の利回りは、米国債価格と非常に同じような動きをすることが過去の観察からわかっているとすると、二つの利回り $r_A$ と $r_B$ は互いに独立でない確率変数として表現される。

## 9.2 不確実性下の合理的行動

不確実性のない世界においては、人間の富の量という一次元の量に関して、多ければ多いほどよいと想定するのが自然であり、そのことに経済学者は異論は挟まないであろう。数学的には、効用が富の増加関数であるとすればよい。そこに、選択の問題として困難な点は、ほとんどない。なぜなら可能な選択肢の中から、一番値の大きなものを選べばよいからである。

これに対して、不確実性のある世界では、9.1節で書いたように富は、確率変数として表現される。つまり、ある富は選択肢として、平均値は大きいが、分散(あるいはその平方根である標準偏差)が大きく、最終的に得られる富の値のバラツキがおおきく、経済主体はそうした富を持つことにリスク(危険)を感じるであろう。それに対し、平均値はそれほど大きくはないが、分散が小さな富を、経済主体はリスクがない、安定した選択対象と感じるかもしれない。そのように考えると、確率変数として表現される富を評価する基準が、現段階でないことに気付く。

不確実性に関しては、実は経済学者がそれを扱いだす以前に、数学者が確率論の範囲で考えていた。しかし、経済学でも使える形の分析枠組みを提供したのはフォン・ノイマンである。彼はゲーム論の枠組みの中で不確実な選択基準を示した。具体的には、確率変数の集合の上に定義される選好関係<sup>1</sup>の上に、いくつ

<sup>1</sup> 選好関係は、ある対象ともう一つの対象のどちらが好ましいかをしめす二項関係として定義される。例えばAはBよりも選好さ

かの公準を想定すると、必然的にそこでの望ましさは、効用の期待値の順番として表現されることを、数学的に証明した。

この期待効用理論は、不確実性を扱う多くの経済理論において、期待効用仮説として理論の前提としておかれる。ここでも、それにしたがう。つまり、来期の不確実な富をあらわすと想定される確率変数  $X$  と  $Y$  が与えられたとき、富に関して単調増加な効用関数  $u(\cdot)$  を考え、

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

であるとき、またそのときに限って、 $X$  は  $Y$  よりも選好されると考えるのである。

**注意 1** 効用の期待値  $E[u(X)]$  と、期待値の効用  $u(E[X])$  は異なるものであることに注意しよう。

### 9.3 資産選択の平均・分散アプローチ

マーコヴィッツは、すぐ前の節の期待効用仮説にさらに、限定的な想定をすることで、金融資産選択の問題を扱いやすい形にすることを示した。それは、確率変数で示される富の期待値と分散にのみ期待効用が依存するという枠組みである。以下、それを解説する。

将来富  $W$  は、確率変数とする。 $\bar{W} = E[W]$  と表わす。効用関数  $u(w)$  を  $\bar{W}$  の回りでテイラー展開をすると

$$u(w) = u(\bar{W}) + u'(\bar{W}) \cdot (w - \bar{W}) + \frac{1}{2}u''(\bar{W}) \cdot (w - \bar{W})^2 + R \quad (9.1)$$

$R$  は高位の項である。これに確率変数  $W$  を代入し、期待値をとると、

$$E[u(W)] = u(\bar{W}) + \frac{1}{2}u''(\bar{W}) \cdot Var(W) + E[R] \quad (9.2)$$

もし高位の項  $E[R]$  が無視し得るなら、将来富の望ましさは、期待値と分散  $Var(W) = E[(W - \bar{W})^2]$  に依存し、期待値が高いほど望ましく、 $u''(\bar{W})$  が負かゼロか正かに従って、分散が小さいほど望ましいか、関係ないか、分散が大きいほど望ましいかに、分類される。

マーコヴィッツは、 $E[R]$  の項が無視できる二つの可能性を考えた。

#### 9.3.1 効用関数が二次式

将来富  $W$  は期待値と分散が存在するような確率変数であるとする。それぞれを  $\bar{W}$  と  $\sigma_W^2$  と記す。効用関数が

$$u(w) = w - \frac{1}{2}w^2, \quad b > 0$$

とする、このとき  $0 \leq w \leq 1/b$  の範囲で、 $u$  は増加関数となる。これは明らかに  $R = 0$  である。このとき

$$E[u(W)] = \bar{W} - \frac{b}{2}(\sigma_W^2 + \bar{W}^2)$$

で表わされる。

#### 9.3.2 将来富の分布が正規分布

将来富  $W$  の分布関数が正規分布なら、その分布は期待値  $\bar{W}$  と分散  $\sigma_W^2$  のみによって定まる。このとき効用関数  $u(\cdot)$  を任意に与えたとき、期待効用が  $\bar{W}$  と  $\sigma_W^2$  のみに依存することを確認しておく。

---

れるなど。この選好関係が満たすべき性質として、様々な公準が考えられる。例えば、「A が B よりも、選好され、B が C よりも選好されるなら、A は B よりも選好される」という性質は推移律とよばれ、もっとも一般的に仮定される選好関係の性質である。

今  $W \sim N(\bar{W}, \sigma_W^2)$  であるから、

$$z = \frac{W - \bar{W}}{\sigma_W}$$

とおくと、 $z \sim N(0, 1)$  であるから

$$E[u(W)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(\bar{W} + \sigma_W z) \phi(z) dz$$

と表わされる。ここで、 $\phi(z)$  は標準正規分布の確率密度関数である。

このとき

$$\frac{\partial E[u(W)]}{\partial \bar{W}} = \int_{-\infty}^{\infty} u'(\bar{W} + \sigma_W z) \phi(z) dz$$

となり、若干面倒な部分積分の評価より

$$\frac{\partial E[u(W)]}{\partial \sigma_W} \int_{-\infty}^{\infty} u''(\bar{W} + \sigma_W z) \phi(z) dz$$

が言える。後者は、 $u'' < 0$  のとき、マイナスの値をとる。以上により、経済主体にとって、富の期待値は望ましさの尺度、富の分散あるいは標準偏差はリスクの尺度とみなせる。

### 9.3.3 ポートフォリオ理論の枠組み

以上の平均・分散アプローチを使って、複数の投資対象の収益率の期待値と分散・共分散が与えられているとき、望ましい資産選択についての性質を明らかにすることができます。

今投資対象が  $n$  種類あるとしよう。現在  $w_0$  だけの価値の確定的な資産を持つ経済主体がそれらの投資対象にどれだけの金額を振り向けるかを考える。ここで、第  $i$  投資対象の粗収益率を  $r_i$  を記すことにする。これは、第  $i$  投資対象を 1 円所有していれば、将来元利合計で  $r_i$  円になることを意味する。<sup>2</sup> ただし、 $r_i$  は確率変数とする。二つの投資対象は互いに統計的に独立ではなく、片方が高いときにはもう一方も高くなる確率が高いという関係があるかもしれない。これは、二つの確率変数の共分散の大きさで測ることができる。収益率のベクトルを  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$  と記す。<sup>3</sup> 収益率ベクトルの期待値を  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$  とし、分散共分散行列を  $V$  で表わす。 $V$  の  $ij$  要素を  $\sigma_{ij}$  と書き、投資対象  $i$  と投資対象  $j$  の共分散を示す。

ポートフォリオとは、

$$w_0 = \sum_{i=1}^n y_i$$

を満たす  $n$  次元ベクトル  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  のことを指す。ポートフォリオ  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  を選択すると、将来

$$\sum_{i=1}^n r_i y_i = y^T \cdot r$$

を得る。資産の構成を変更すると、将来富が確率変数として様々に変化することがポイントである。以下では、初期の富に関係なく資産構成にのみ焦点をあてるために、 $w_0 = 1$  とおく。こうすれば、上の各  $y_i$  は第  $i$  資産の構成比を意味することになる。また

$$E[y^T \cdot r] = y^T \cdot \mu$$

となりポートフォリオの収益率の期待値は、各投資対象の収益率の期待値の加重平均であることを意味する。また、分散は

$$Var[y^T \cdot r] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} y_i y_j = y V y^T$$

<sup>2</sup> これは収益率と普通いわれるものに 1 を足したものである。

<sup>3</sup> 肩の  $T$  は転置を表わす。つまり、 $r$  は本来列ベクトルと考える

と表わされる。

### 9.3.4 ポートフォリオ選択の考え方

ポートフォリオ選択はマーコヴィツによって、二段階に分けられたと考えるべきである。それは、

1. 期待収益を所与としたとき、分散あるいは標準偏差を最初にするポートフォリオを求める
2. 上の段階で求めたポートフォリオの中で、各経済主体は自分の選好にもっともあったものを選ぶ。

第一段階は、リスクの最小化は危険回避的な選好をもつどの経済主体にとっても望ましいと考えるためである。第二段階は、個人の危険への選好の度合によって定まる部分が大きい。普通、ポートフォリオ分析というとき、第一段階、つまりフロンティア・ポートフォリオの導出を指す。

さて、ポートフォリオの期待収益の値を $\bar{r}$ とするとき、フロンティア・ポートフォリオの導出は次の二次計画問題となる。

$$\text{minimize} \quad \frac{1}{2} y^T V y \quad (9.3)$$

$$\text{subject to} \quad y^T \mu = \bar{r}, \quad y^T \mathbf{1} = 1 \quad (9.4)$$

ここで $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ というすべての要素が1の $n$ 次元列ベクトルである。

**注意 2** 制約式は、それぞれ

$$\sum_{i=1}^n y_i \mu_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1$$

を意味することに注意せよ。

今、ラグランジュ関数を作ると

$$L(y, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} y^T V y + \lambda_1 (\bar{r} - y^T \mu) + \lambda_2 (1 - y^T \mathbf{1}) \quad (9.5)$$

必要条件は、

$$\frac{\partial L}{\partial y^T} = V y - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mathbf{1} = 0 \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \bar{r} - y^T \mu = 0 \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - y^T \mathbf{1} = 0 \quad (9.8)$$

(9.6) から

$$y = \lambda_1 V^{-1} \mu + \lambda_2 V^{-1} \mathbf{1} \quad (9.9)$$

(9.9) に左から $\mu^T$ を掛け、 $\mu^T y = \bar{r}$ を使うと

$$\bar{r} = \lambda_1 \mu^T V^{-1} \mu + \lambda_2 \mu^T V^{-1} \mathbf{1} \quad (9.10)$$

を得る。一方(9.9)に左から $\mathbf{1}^T$ を掛け、 $\mathbf{1}^T y = 1$ を使うと

$$1 = \lambda_1 \mathbf{1}^T V^{-1} \mu + \lambda_2 \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1} \quad (9.11)$$

(9.10) と (9.11) により、

$$\begin{pmatrix} \mu^T V^{-1} \mu & \mu^T V^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T V^{-1} \mu & \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

という二元連立方程式が得られる。係数行列の対角要素は同じ値になっておりこれを

$$A = \mathbf{1}^T V^{-1} \mu$$

とする。また係数行列の左下の要素を

$$B = \mu^T V^{-1} \mu$$

右上の要素を

$$C = \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1}$$

書く。係数行列の行列式は

$$D = BC - A^2$$

である。

この連立方程式は、 $A, B, C, D$  と  $\bar{r}$  を用いて

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r}C - A}{D}$$

$$\lambda_2 = \frac{B - \bar{r}A}{D}$$

これらを (9.9) に代入すると、最適なポートフォリオ  $y$  が

$$y = \frac{\bar{r}C - A}{D} V^{-1} \mu + \frac{B - \bar{r}A}{D} V^{-1} \mathbf{1} \quad (9.13)$$

この式を整理すると

$$y = g + h\bar{r}$$

という  $\bar{r}$  に関する一次式になる。ここで

$$g = \frac{B(V^{-1} \mathbf{1}) - A(V^{-1} \mu)}{D}, \quad h = \frac{C(V^{-1} \mu) - A(V^{-1} \mathbf{1})}{D}$$

最適ポートフォリオを求めるには  $y^T V y$  を計算すればよい。これは

$$Var(r^T y) = \frac{C\bar{r}^2 - 2A\bar{r} + B}{D} \quad (9.14)$$

となる、 $Var(r^T y) - \bar{r}$  平面において、放物線となる。

この式を

$$\frac{Var(r^T y)}{1/C} - \frac{(\bar{r} - A/C)^2}{D/C^2} = 1 \quad (9.15)$$

と変形すれば、 $\sigma_{r^T y} = \sqrt{Var(r^T y)}$  として最適ポートフォリオの標準偏差とすると、 $\sigma_{r^T y} - \bar{r}$  平面では、双曲線となる。このとき漸近線は

$$\bar{r} = A/C \pm \sqrt{D/C} \sigma_{r^T y}$$

となる。

分散(標準偏差)を最小にするポートフォリオを MVP(minimum variance portfolio) という。これは、 $\sigma_{r^T y} - \bar{r}$  平面で点  $(\sqrt{1/C}, A/C)$  に対応するポートフォリオである。この点より上の双曲線部分に対応するポートフォリオを bf 有効ポートフォリオとよび、資産選択の対象となる。

## 9.4 最適ポートフォリオの性質

ここでは、前の節で求めたフロンティア・ポートフォリオの性質をまとめる。

**命題 1**  $g$  と  $g + h$  もフロンティア・ポートフォリオである。

これは  $y = g + h\bar{r}$  であることから、それぞれ  $\bar{r} = 0$ 、 $\bar{r} = 1$  に対応していることから明らか。

**命題 2** 任意のフロンティア・ポートフォリオは、 $g$  と  $g + h$  のアフィン結合で生成される。

これは、 $\bar{r}_0$  に対応するポートフォリオは

$$y_0 = g + h\bar{r}_0$$

であるが、これは

$$y_0 = (1 - \bar{r}_0)g + \bar{r}_0(g + h)$$

である。

ここでの論法は、相異なる二つのフロンティア・ポートフォリオを考えても成立する。

**命題 3** 任意のフロンティア・ポートフォリオは、相異なる二つのフロンティア・ポートフォリオのアフィン結合で生成される。

**演習 1** なぜかを考えよ。

**命題 4**  $MVP$  と異なる任意のポートフォリオと最小分散ポートフォリオ  $MVP$  の共分散は、 $MVP$  の分散に等しい。

$MVP$  とは異なる任意のポートフォリオと  $MVP$  を、 $\alpha : (1 - \alpha)$  で保有するポートフォリオを考える。 $MVP$  の分散を  $\sigma_{MVP}^2$ 、もう一方のポートフォリオの分散を  $\sigma_0^2$ 、共分散を  $Cov(y_0, y_{MVP})$  と書くことになると、アフィン結合で作られたポートフォリオの分散は

$$\alpha^2 \sigma_0^2 + 2\alpha(1 - \alpha)Cov(y_0, y_{MVP}) + (1 - \alpha)^2 \sigma_{MVP}^2$$

である。これは  $\alpha = 0$  のとき  $MVP$  の定義より最小になる。よって上の式を  $\alpha$  で微分してゼロとおいた  $\alpha$  についての方程式が  $\alpha = 0$  を解として持つ条件は、その方程式に  $\alpha = 0$  を代入して得られた条件が我々の求める、

$$Cov(y_0, y_{MVP}) = \sigma_{MVP}^2$$

である。

**命題 5** フロンティア・ポートフォリオのアフィン結合はフロンティア・ポートフォリオである。また、有効ポートフォリオの凸結合は有効ポートフォリオである。

前半は、容易。後半は、有効ポートフォリオはその期待收益率が  $MVP$  の期待收益率  $A/C$  を上回るフロンティア・ポートフォリオであることを考慮すれば簡単にわかる。

**演習 2** 上の命題を証明せよ。

## 9.5 ポートフォリオ分割定理：安全資産 vs 危険資産

以上は、分散がゼロになる投資対象はないとして議論を展開してきた。マーコヴィッツの理論で興味深いのは、分散ゼロの安全資産とそれ以外の資産に関して資産選択の問題を考えるとポートフォリオ分割定理という資産選択に関するガイドラインが得られることである。

これには、これまでの  $n$  種類の危険な投資対象という枠組みに加えて、 $n + 1$  番目の投資対象として危険がゼロで収益率が  $r_0$  で固定されているものを考える。

その場合、 $n + 1$  種類の投資対象についての構成比の和が 1 となる。ポートフォリオの収益率は

$$r_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n y_i\right) + \sum_{i=1}^n r_i y_i = r_0 + \sum_{i=1}^n (r_i - r_0) y_i$$

であるから、期待収益率と分散はそれぞれ、

$$r_0 + \sum_{i=1}^n (\mu_i - r_0) y_i \quad (9.16)$$

$$y^T V y \quad (9.17)$$

最適問題は、

$$\text{minimize} \quad \frac{1}{2} y V y^T \quad (9.18)$$

$$\text{subject to} \quad (\mu - r_0 \mathbf{1})^T = \bar{r} - r_0 \quad (9.19)$$

となる。

このとき、ラグランジュ乗数法が得られる必要条件は、

$$V y - \lambda (\mu - r_0 \mathbf{1}) \quad (9.20)$$

$$(\mu - r_0 \mathbf{1})^T = \bar{r} - r_0 \quad (9.21)$$

(9.20) から

$$y = \lambda V^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}) \quad (9.22)$$

を得る。これを、(9.21) に代入して  $\lambda$  について解くと

$$\lambda = \frac{\bar{r} - r_0}{(\mu - r_0 \mathbf{1})^T V^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1})} \quad (9.23)$$

となる。特に分母を  $F$  とおくと

$$F = (\mu - r_0 \mathbf{1})^T V^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}) = B - 2r_0 A + Cr_0^2$$

である。これで最終的なフロンティア・ポートフォリオの条件

$$y = \left( \frac{\bar{r} - r_0}{F} \right) V^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}) \quad (9.24)$$

が得られる。このときポートフォリオ収益率の分散  $\sigma^2$  を求めると

$$\sigma^2 = \frac{(\bar{r} - r_0)^2}{F} \quad (9.25)$$

演習 3 実際に、(9.24) から  $\sigma^2$  を求めよ。

これは、 $\sigma - \bar{r}$  平面において、傾き  $\pm \sqrt{F}$  の半直線である。