Chapter 6

時間を通じての最大化問題 I: 最大値原理入門

最適制御問題は、経済学においても様々な形で応用されている。例えば、調整費用を含んだ投資決定のモデル、最適成長の理論、動学的最適消費の問題、枯渇性資源の最適採取の問題などがある。現在では、最適制御の理論は経済理論分析の道具箱においてなくてはならない存在であるといってよい。

以下、われわれは離散モデルにおける最適制御の問題を考える。離散モデルを考えることで、数学上の厄介な点はかなり回避できる。学生諸君は、最適制御問題の本質をこれまで学んだことを使って的確に理解できるようになるはずである。

6.1 問題の設定

$u(t),\ (t=0,\dots,T-1)$ は制御変数とよばれる m 次元のベクトル、$x(t),\ (t=0,\dots,T)$ は、状態変数とよばれる n 次元ベクトルで、

$$x(t+1)-x(t)=f(x(t),u(t)) \tag{6.1}$$

なる状態方程式とよばれる差分方程式に従うとする。ただし、$x(0)$ は所与の n 次元実ベクトルとしよう。

また、$u(t)$ は $x(t)$ に依存する制御可能集合 $G(x(t))$ に属さなければならないとする。これを、$u(t)$ が可制御であるという。なお可制御という条件 $u\in G(x(t))$ は、制御可能集合 $G(x(t))$ が

$$g:\ \mathbf{R}^{m+n}\to\mathbf{R}^{\ell}$$

という関数によって、

$$G(x(t))=\{u\in\mathbf{R}^m\mid g(u,x(t))\geq 0\}$$

という形で書けるとして、

$$g(u,x(t))\geq 0$$

読みかえるとわかりやすい。

最適制御の問題とは、$x(t),\ (t=1,\dots,T)$ が (6.1) の差分方程式に従うとき、、所与の n 次元ベクトル p に対して、

$$p\cdot x(T) \tag{6.2}$$

を最大化、または最小化するような、可制御ベクトル $u(t)\in G(x(t)),\ (t=0,\dots,T-1)$ を見いだすことである。

注意 1 この章を通じて、登場する関数はすべて二階連続微分可能な関数として話を進める。

6.2 われわれの定式化の一般性

6.1節で示した、最適制御問題の枠組は通常の教科書に載っているものと若干異なる。例えば、最適化の対象になっているものが、総和の形をしていないとか、非自律系になっていないなどである。戸惑う学生諸君もいるかもしれない。そこで、上の定式化が多分もっとも一般的であることを以下に示す。

6.2.1 非自律系の場合

まず、(6.1) が

$$x(t+1)-x(t)=f(t,x(t),u(t))$$

という非自律系である場合にも、上の定式化に帰着されることを示そう。

$$\hat{x}(t)=(\tilde{x}(t),x(t))$$

とおく、ここで$\tilde{x}(t)$は

$$\tilde{x}(t+1)-\tilde{x}(t)=1,\quad \tilde{x}(0)=0$$

にしたがう１次元状態変数と考える。これにより、

$$\tilde{x}(t)=t$$

が保証される。さらに、

$$\hat{p}=(0,p)$$

と

$$\hat{f}\ :\ (\tilde{x}(t),x(t))\longmapsto(1,f(\tilde{x}(t),x(t),u(t))$$

として、$\hat{x}(t)$と$\hat{p}$に対して、6.1節の定式化を適用すればよい。

6.2.2 総和型の目標関数の場合

つぎに、$U:\ \mathbf{R}^{n+m}\ \longrightarrow\ \mathbf{R}$とし、

$$\sum_{t=0}^{T-1}U(x(t),u(t)) \tag{6.3}$$

を先の差分方程式(6.1)の制約のもとで最大化する問題を考える。まず、新しい状態変数$\tilde{x}(t)$を

$$\tilde{x}(t+1)-\tilde{x}(t)=U(x(t),u(t)),\quad \tilde{x}(0)=0,$$

と定義する。こうすると、(6.3)の最適化の目標関数の値は状態変数$\tilde{x}(t)$の最終時点の値$x(T)$に等しくなることがわかる。

演習 1 各自、このことを確認せよ。

よって、

$$\hat{x}(t)=(\tilde{x}(t),x(t))\,,$$

$$\hat{p}=(1,0)\,,$$

$$\hat{f}\ :\ (\tilde{x}(t),x(t))\longmapsto(U\left(x(t),u(t)\right),f(x(t),u(t))$$

とおけば、6.1節の定式化に帰着される。

6.2.3 総和型の目標関数にスクラップ価値関数が加わった場合

つぎに、6.2.2節同様$U:\ \mathbf{R}^{n+m}\ \longrightarrow\ \mathbf{R}$とし、それに加えて最終時点での状態変数に依存するスクラップ関数$\nu(x(T))$を考え、

$$\sum_{t=0}^{T-1}U(x(t),u(t))+\nu(x(T)) \tag{6.4}$$

を先の差分方程式(6.1)の制約のもとで最大化する問題を考える。

まず6.2.2節同様、新しい１次元状態変数$\tilde{x}(t)$を

$$\tilde{x}(t+1)-\tilde{x}(t)=U(x(t),u(t)),\quad \tilde{x}(0)=0$$

に従うものとして定義する。さらにもう一つ新しい１次元状態変数$\bar{x}(t)$を

$$\bar{x}(t+1)-\bar{x}(t)=\nu(x(t)+f(x(t),u(t)))-\bar{x}(t),\quad \bar{x}(0)=\nu(x(0))$$

に従うものとして定義する。

演習 2 上の式は、単に$\bar{x}(t) = \nu(x(t))$といっているにすぎないことを確認せよ。

よって、

$$\hat{x}(t) = (\bar{x}(t), \tilde{x}(t), x(t)),$$

$$\hat{p} = (1, 1, 0)),$$

$$\hat{f} \;:\; (\hat{x}(t), \tilde{x}(t), x(t)) \longmapsto (\nu(x(t) + f(x(t), u(t))) - \bar{x}(t),\; U\,(x(t), u(t)),\; f(x(t), u(t)))$$

とおけば、6.1節の定式化に帰着される。

演習 3 各自、このことを確認せよ。

6.2.4 割引因子がある場合の総和が最適化の対象になっている場合

経済学では、$\beta < 1$として

$$\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t U(x(t), u(t)) \tag{6.5}$$

を(6.1)の制約のもとで最大化するという問題も多い。この問題も、驚くべきことに、6.2.1節や6.2.2節で行なったように、新たな状態変数を導入することで、6.1節の定式化の枠組に帰着される。

演習 4 上のことを示せ。（ヒント：β^tに注目せよ。）

注意 2 *(6.5)*に*6.2.3*節のようなスクラップ価値関数が加わっても*6.1*節の定式化に帰着される。余裕のある学生諸君は、それを確認することができる。

以上の例が、如実に示しているように、6.1節の定式化の枠組は多分もっと も一般的なものである。

6.3 最適制御の必要条件：最大値原理

ここでは、最適制御問題の解の必要条件として有名な最大値原理を導いてみよう。導出に際しては、これまで学んだクーン＝タッカー条件のみ使う。この節を理解することによって学生諸君は、最大値原理を単なる公式として暗記することから解放される。

なお最大値原理は狭い意味では、以下で定義するハミルトニアンが最適値において最大化されていることを指すが、ここでは補助変数の差分方程式を規定する式（補助方程式）、状態変数・補助変数の初期・端点条件である横断条件を合わせて最大値原理というよび方をする。

ここで、6.1節の定式化を再び書き下してみる。ただし、より形式的に記述する。

$$maximize \quad p \cdot x(T) \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
subject\ to \quad x(t+1) - x(t) &= f(x(t), u(t)), \quad (t = 0, 1, \ldots, T-1) && (6.7)\\
g(x(t), u(t)) &\geq 0, \quad (t = 0, 1, \ldots, T-1) && (6.8)\\
x(0) &= x_0 && (6.9)
\end{aligned}$$

この問題を冷静に眺めると、$T+1$個のn次元ベクトルとT個のm次元ベクトルを動かして最適解を求める、単なる非線形最適化問題であることに気付く。[1]つまり、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdots \\ x(T-1) \\ x(T) \\ u(0) \\ u(1) \\ \cdots \\ u(T-1) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g(x(0), u(0)) \\ g(x(1), u(1)) \\ \vdots \\ g(x(T-1), u(T-1)) \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_0 - x(0) \\ f(x(0), u(0)) - x(1) + x(0) \\ f(x(1), u(1)) - x(2) + x(1) \\ \vdots \\ f(x(T-1), u(T-1)) - x(T) + x(T-1) \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

とおく。ここで、$\mathbf{x}$は$n(T+1)+mT$次元ベクトル、$\mathbf{g}:\mathbf{R}^{n(T+1)+mT} \to \mathbf{R}^{\ell T}$、$\mathbf{h}:\mathbf{R}^{n(T+1)+mT} \to \mathbf{R}^{n(T+1)}$、$\mathbf{p}$は、$\mathbf{x}$と同じ次元で、$x(T)$に対応する部分が$p$になっているものである。詳しく言うと、第$(nT+1)$要素が$p$の第1要素、第$(nT+2)$要素が$p$の第2要素、以下等々ときて、第$(nT+n)$要素が$p$の第$n$要素で、それ以外がゼロであるベクトルである。これを考えることで、$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = p \cdot x(T)$が保証される。以上のことから、最適制御問題が、

$$maximize \ \ \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \qquad subject\ to \ \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0, \ \ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$$

という非線形最適化問題に変形される。これは以前触れた、等式不等式混合型の非線形最適化問題である。ラグランジアンを

$$\mathbf{L} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \lambda\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \xi\mathbf{h}(\mathbf{x})$$

とおくと、クーン＝タッカー条件は、

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \tag{6.14}$$

$$\lambda\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda} = 0 \tag{6.15}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \xi} = 0 \tag{6.17}$$

と書かれる。ここで、λはℓT次元、ξは$n(T+1)$次元のベクトルである。

[1] $x(0)$については、x_0に等しいという制約があるので、事実上はT個であるが、上のように考えたほうがクーン＝タッカー定理を応用する場合、都合がよい。

注意 3 なおクーン＝タッカー条件による最適解の特徴づけを正確に述べると以下のようになる。もし $\mathbf{x}^* = (x^*(0), x^*(1), \ldots, x^*(T-1), x^*(T), u^*(0), u^*(1), \ldots, u^*(T-1))$ が最適制御問題の解ならば、非負のベクトルλならびにベクトルξが存在して、上のクーン＝タッカー条件 *(6.13)–(6.17)* が成立する。

以下では、上のクーン＝タッカー条件が成立していることを前提にして、$\mathbf{x}$、$\mathbf{g}$、$\mathbf{h}$ の定義に戻るとき、いわゆる最大値原理が成立することを確認する。なお、以下の議論の展開で面倒をさけるために、最適点ではクーン＝タッカーの制約想定(constraint qualification) はみたされているものとして仮定して議論を進める。

さて、上のξは$n \times (T+1)$ 次元ベクトルであるが、n 要素づつ$T+1$ 個のブロックに分けて扱うことを考える。これは、ξは制約$\mathbf{h} = 0$ の影の価格であるが、各時点t の差分方程式を制約とする解釈に戻ったとき、それぞれの影の価格を扱うためである。ただし、後のために

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \xi(1) \\ \xi(2) \\ \ldots \\ \xi(T) \end{pmatrix}$$

であるとして扱う。同様に、各時点の制御可能性も時点ごとに分けて扱うために、制約$\mathbf{g} \geq 0$ の影の価格λを、

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda(0) \\ \lambda(1) \\ \ldots \\ \lambda(T-1) \end{pmatrix}$$

と分けて考える。

以上の準備のもと、最大値原理を導く。まずハミルトニアンを

$$H(x(t), u(t), \xi(t+1)) = \xi(t+1) \cdot f(x(t), u(t)) \tag{6.18}$$

と定義する。われわれは、クーン＝タッカー条件をハミルトニアンを用いて書き換える。まず (6.11) と (6.12) から、

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \lambda \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \xi \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \xi(t+1) \cdot (f(x(t), u(t)) - x(t+1) + x(t)) \\
&+ \sum_{t=0}^{T-1} \lambda(t) \cdot g(x(t), u(t)) \\
&+ \xi(0) \cdot (x_0 - x(0)) + p \cdot x(T) \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \xi(t+1) \cdot f(x(t), u(t)) - \sum_{t=0}^{T-1} \xi(t+1) \cdot (x(t+1) - x(t)) \\
&+ \sum_{t=0}^{T-1} \lambda(t) \cdot g(x(t), u(t)) \\
&+ \xi(0) \cdot (x_0 - x(0)) + p \cdot x(T) \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} [\xi(t+1) \cdot f(x(t), u(t)) + \lambda(t) \cdot g(x(t), u(t))]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{t=0}^{T-1} (\xi(t+1) - \xi(t))\, x(t) \\
&+ \xi(0)x_0 - \xi(T)x(T) + p \cdot x(T) \\
= &\sum_{t=0}^{T-1} [H(x(t), u(t), \xi(t+1)) + \lambda(t) \cdot g(x(t), u(t))] \\
&+ \sum_{t=0}^{T-1} (\xi(t+1) - \xi(t))\, x(t) \\
&+ \xi(0)x_0 - \xi(T)x(T) + p \cdot x(T)
\end{aligned}
$$

となる。

今度は上のように表現されたラグランジアンを用いて、クーン＝タッカー条件(6.13)-(6.17) をきちんと書き下してみよう。まず(6.13) から、$(t = 0, 1, \ldots, T-1)$ に対して

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u(t)} = \frac{\partial}{\partial u(t)} H(x(t), u(t), \xi(t+1)) + \lambda(t) \cdot \frac{\partial}{\partial u(t)} g(x(t), u(t)) = 0 \tag{6.19}$$

と

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x(t)} = \frac{\partial}{\partial x(t)} H(x(t), u(t), \xi(t+1)) + \lambda(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x(t)} g(x(t), u(t)) + \xi(t+1) - \xi(t) = 0, \tag{6.20}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x(T)} = p - \xi(T) = 0 \tag{6.21}$$

が得られる。また、(6.16) から、$(t = 0, 1, \ldots, T-1)$ に対して

$$\lambda(t) \geq 0 \tag{6.22}$$

が得られる。(6.14) から、$(t = 0, 1, \ldots, T-1)$ に対して

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda(t)} = g(x(t), u(t)) \geq 0 \tag{6.23}$$

が得られる。

(6.15) から、$(t = 0, 1, \ldots, T-1)$ に対して

$$\lambda(t) \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda(t)} = \lambda(t) \cdot g(x(t), u(t)) = 0 \tag{6.24}$$

最後に(6.17) から、$(t = 0, 1, \ldots, T-1)$ に対して

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \xi(t+1)} = \frac{\partial}{\partial \xi(t+1)} H(x(t), u(t), \xi(t+1)) + x(t) - x(t+1) = 0 \tag{6.25}$$

と

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \xi(0)} = x_0 - x(0) = 0 \tag{6.26}$$

を得る。

ここで、幾つかの式の組み合わせてみて、それがどんな意味を持つか考えてみる。まず(6.19) と(6.22)、(6.23)、(6.24) は各時点t において

$$maximize \quad H(x(t), u(t), \xi(t+1))$$

$$subject\ to \quad g(x(t), u(t)) \geq 0$$

という最大化問題のクーン＝タッカー条件が成立していることを意味している。つまり、最適な$x(t)$と$u(t)$は、クーン＝タッカー定理によって存在が保証される$\xi(t+1)$を固定して考えると、各時点tにおいてハミルトニアンを制約の下で最大にしなくてはならないということである。

次に、(6.20) と (6.25) は組みあわせて

$$\xi(t+1)-\xi(t)=-\frac{\partial}{\partial x(t)}H(x(t),u(t),\xi(t+1))-\lambda(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x(t)}g(x(t),u(t)) \tag{6.27}$$

$$x(t+1)-x(t)=\frac{\partial}{\partial \xi(t+1)}H(x(t),u(t),\xi(t+1)) \tag{6.28}$$

というハミルトニアン・ダイナミクスとよばれる差分方程式体系を形成する。特に、(6.20) は補助方程式、$\xi(t)$は補助変数とよばれる。また、(6.25) は (6.1) に等しいことがハミルトニアンの定義からわかる。

(6.26) は、元々の (6.1) の初期条件であると同時に、上に述べたハミルトニアン・ダイナミクスの初期条件の一部になっている。これに対して、(6.21) は横断条件とよばれるもので、数学的には差分方程式体系としてのハミルトニアン・ダイナミクスの境界条件を形成する。

6.4 最大値原理の意味

6.3節でみたように、最大値原理は基本的には非線形計画法であるから、制約に対応するラグランジュ乗数が現れる。それは、二つの範疇に分けられる。一つは、各時点の制約に対応する$\lambda(t)$であり、もう一つは、動学的な制約としての差分方程式 (6.1) に対応する$\xi(t)$である。後者が、最適制御問題に特有のものであり、(6.27) にみられるように、それが満たす条件自体が差分方程式を形成する。

ラグランジュ乗数はすでに学習したように、制約の個数だけ投入があり、目標関数の値をその産出水準として考えるときの、制約の「限界生産力」と解釈できる。つまり、制約を限界１単位緩めたとき、どれだけ目標関数の値が増加するかを表現する。そして、それを影の価格 (shadow price) とよんだ。補助変数$\xi(t)$についても、$x(t)$の増加分$x(t)-x(t-1)$に関する制約が緩和されたとき、最終時点での$x(T)$の価値$p\cdot x(T)$がどれだけ高まるかをあらわすという意味で「投資財」の影の価格と考えられる。

あと、最大値原理の意味を考えるとき、忘れてはならないのは「投資財」の潜在価格は最終時点において、所与の財価格pと一致しなくてはならないという、横断条件、(6.21) である。差分方程式体系 (6.27) と (6.28) のうち最初のものは、初期条件でなく境界条件が与えられるということを意味する。最終時点の価格が現在からの「投資財」の価格を決める大きな要因になっているということもできる。

経済学における応用は、次章でくわしく述べる。

補論 I：初期値条件と境界値条件

これまで、状態変数の初期値を$x(0)=x_0$という形で与えておいて、最大値原理、補助方程式、補助変数の横断条件を導いた。しかし、最適制御問題において、すべての場合において状態変数の初期値が与えられるとは限らない。たとえば最適成長問題を考え最終期の資本ストック水準が固定されているという問題においては、投資が制御変数、投資や各期の経済厚生水準などが状態変数を構成するが、経済厚生水準などは最初期時点の投資に依存するため、その初期値を固定されたものと想定するわけにはいかない。

その代わり、初期値の与えられている状態変数、資本ストックは、最終時点の値（境界値）が所与となっているため、辻褄はあうようになっている。問題は前の節の論証が影響を受けるかであるが、実は影響を受けない。(6.12) において、第一行は$x(0)$の初期値を与えるn個の方程式だと考えると、その一般化として$x(0),x(1),\ldots,x(T)$という総計$n\times(T+1)$個の実数のうち、nが所与とされればよく、その場合前節の証明も一切影響を受けないことがわかる。

実際にはさらなる一般化が可能であり、

$$\varphi:\ \mathbf{R}^{n\times(T+1)} \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

という微分可能写像を考え、任意の点におけるヤコビ行列の階数が n であるとき

$$\varphi(x(0), x(1), \ldots, x(T)) = 0$$

をもって一般化された境界値条件とみなしてよい。

演習 5 初期資本ストックが K_0、最終期資本ストックが K_T と与えられており、t 時点の産出量 $Y(t)$ は $F(K(t))$ という生産関数で決まるとする。また、減価償却はないとし資本蓄積は

$$K(t+1) - K(t) = I(t)$$

で規定され、産出物は消費と投資に使われるとしよう。

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

各期には $U(C(t))$ の社会的厚生が達成されるとして、0 期から T 期までの総厚生が

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} U(C(\tau))$$

と計算されるとしよう。

以上の設定で、最適な投資計画 $I(0), I(1), \ldots, I(T-1)$ を選んで、総厚生を最大にするという問題を考える。

1. 以上の問題を最適制御の問題として、定式化しなおせ。

2. 最大値原理を適用して、最適問題の必要条件を列挙せよ。

補論 II：連続型モデルの最大値原理

これまで、最大値原理の本質を理解するために、離散モデルに限って最適制御の問題を扱ってきた。しかし、最大値原理は連続型のモデルについてもあてはまることが知られている。ただし、その証明は技術的にやっかいなのでここではとりあげない。[2]

まず、連続型モデルの最適制御問題を定義しておく。基本的には、(6.1) が差分方程式から微分方程式になるだけである。

つまり、n 次元ベクトル p を所与として、T を 0 より大きな実数として、x が $t \in [0,\ T]$ に関して微分可能な n 次元ベクトル関数。u は、$t \in [0,\ T]$ に関する連続な m 次元ベクトル関数。ただし、x は次の微分方程式に従うとする。

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{6.29}$$

ただし、初期値は既知として

$$x(0) = x_0 \tag{6.30}$$

とする。一方、u は各時点 t において、可制御集合とよばれる集合 $G(x(t))$ に属さなくてはならないとき、

$$p \cdot x(T) \tag{6.31}$$

[2] 凸解析と位相幾何に関する知識が必要となる。興味のある学生は、岩橋亮輔「最適制御理論入門」サイエンス社、などで厳密な証明を読むことができる。経済数学の解説書レベルで厳密な証明をやっているものは、ほとんどない。

を最大あるいは最小にする、$t \in [0,\ T]$ に関する関数 x と u を見つける。とまとめられる。

連続系の最大値原理は、最適制御問題の最適解 (x^*, u^*) が存在するなら、$t \in [0,\ T]$ に関する微分可能な n 次元ベクトル関数 ξ が存在して

$$H(x,\ u,\ \xi) = \xi \cdot f(x,\ u)$$

と定義されるハミルトニアンが各時点 $t \in [0,\ T]$ において、最大化されている。つまり、

$$\forall t \in [0, T] \forall u \in G(x^*(t)):\ H(x^*(t), u^*(t), \xi(t)) \geq H(x^*(t), u, \xi(t))$$

である。また、解経路は、次のハミルトニアン・ダイナミクスに従う。

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{\partial}{\partial x} H(x^*, u^*, \xi) \\ \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} H(x^*, u^*, \xi) \end{aligned}$$

ただし、それぞれの横断条件・初期条件は、

$$\begin{aligned} \xi(T) &= p \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

である。