投資支出

- 投資支出は、時間的に大きく変動する
- 景気の動向にも大きな影響を与える
- 理論的には、投資支出が利子率に依存するとしてきた
- 投資支出はどんな原理に基づいて決定されるのか

用語の確認

- **資本**とは生産された生産要素の累積 (stock)
- **投資**あるいは**資本形成**とは資本ストックの水準を維持したり積み増したりすること
- 資本と対立する概念が、本源的生産要素（労働用役・土地・天然資源）
- 労働者が提供するものは労働用役、資本財が提供するものが資本用役
- 労働用役の価格が**賃金率**、資本財の価格と資本用役の価格である**資本の賃料**は厳密に区別しなくてはならない

粗投資と純投資

- **粗投資**は、資本ストックの純粋な増加分である**純投資**に資本ストック減耗への引き当てである**減価償却**の和
- t 期の、資本ストックを K_t、粗投資を I_t、純投資を J_t、減価償却を D_t とすると

$$I_t = J_t + D_t,$$

$$K_{t+1} - K_t = J_t$$

粗投資の累積としての資本(PI法)

- 資本減耗は資本ストックの一定割合だと想定することが多い。その場合

$$D_t = \delta K_t$$

- 以上をまとめると、K_t に関する差分方程式が得られる

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

- 資本ストックは、過去の投資の累積として

$$K_t = \sum_{i=0}^{\infty}(1 - \delta)^i I_{t-i-1}$$

- 上の式は、資本ストックの推定法として使われる

投資支出決定の枠組み

- 企業は生産技術の制約と、市場で定まる価格や利子率を与件として、利潤を最大化するように行動する
- 生産技術の制約は、生産関数として表現される

$$y = f(k, \ell)$$

- 生産要素や生産物価格、金融関連の利子率などは、市場で定まると想定するのが普通

生産関数の基本的な想定

- 代替性
- 規模に関する収穫不変
- 限界生産力逓減
- 限界代替率逓減

代替性の前提

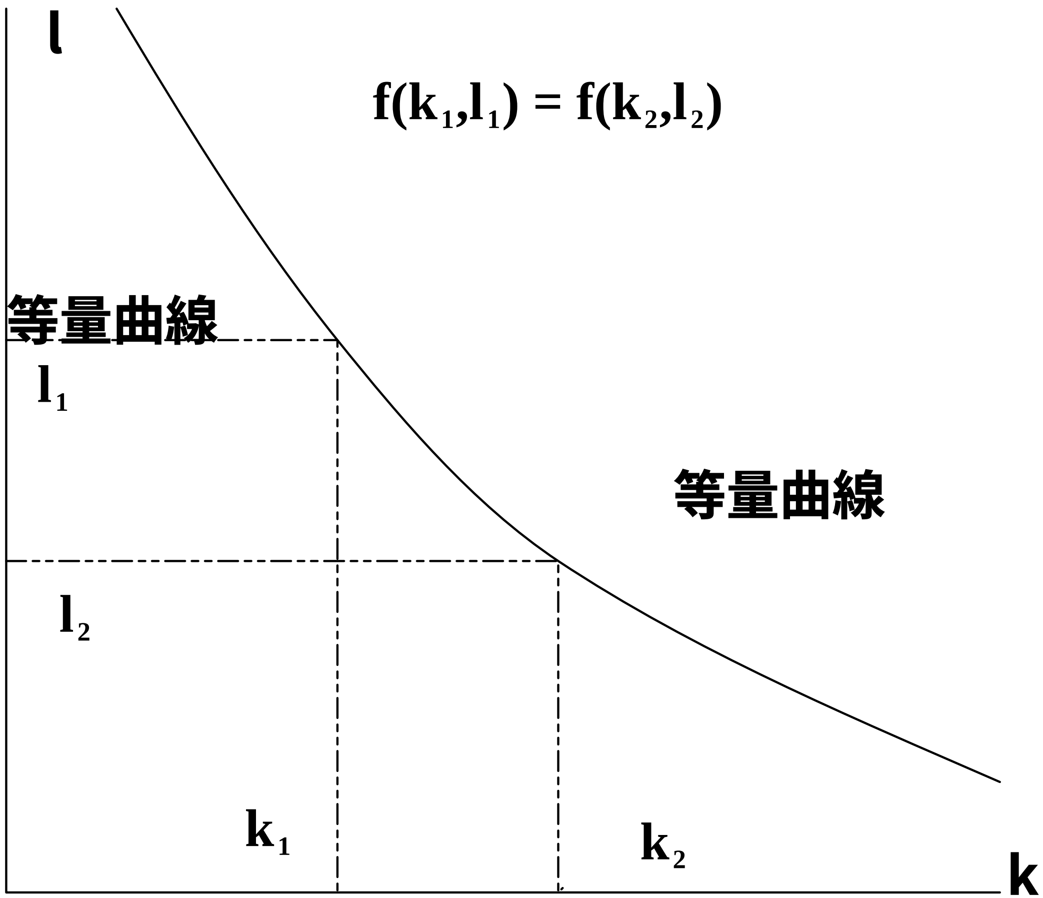
- 一定の産出量 y をもたらす、資本と労働の組み合わせが複数存在すること
- 一定の産出量もたらす資本 k と労働 ℓ の組み合わせを $k-\ell$ 平面にプロットしたものを**等量曲線**という
- 一般に等量曲線は右下がりである
- なぜならば

$$f(k,\ell) = f(k+\Delta k, \ell + \Delta \ell) \Longrightarrow \Delta k \Delta \ell < 0$$

と考えるのが自然だからである

等量曲線

- 等量曲線を図示してみる



規模に関する収穫不変

- $f(\lambda k, \lambda \ell) = \lambda f(k, \ell), \quad \lambda \geq 0$ が成立することを規模に関する収穫不変という
- 資本と労働の投入比率を一定に保ったまま生産規模を大きくしても、その生産規模の拡大率と同じだけ生産量が増加することをいう
- 投資支出決定において、この想定の果たす役割は小さい
- 経済学では、通常よくおかれる想定

限界生産力逓減

- 一方の投入量を一定に保ったまま、もう一方の投入量を増加させせると産出量の増分が次第に小さくなることを指す
- 数学的には、偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial k}, \quad \frac{\partial f}{\partial \ell}$$

で表される**限界生産力**が、それぞれ k、ℓ の減少関数であることに対応する

限界代替率逓減

- 限界代替率は、ある同一の産出量水準を実現するごく「近い」二つの組み合わせを考えたとき資本と労働の増分（あるいは減分）の比率をいう
- $f(k,\ell) = f(k+\Delta k, \ell+\Delta\ell)$ が成立するとき $\Delta\ell/\Delta k$ の極限であるところの $\frac{d\ell}{dk}$
- 数学的には、限界生産力の比として表される

$$\frac{d\ell}{dk} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial k}}{\frac{\partial f}{\partial \ell}}$$

- **限界代替率逓減**とは、ここでは限界代替率 (にマイナスの符号をつけたもの)$-\frac{d\ell}{dk}$ が k の減少関数になることに対応する

生産関数の例

- コブ-ダグラス型

$$f(k,\ell) = k^{\alpha}\ell^{\beta}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0$$

- CES 型

$$f(k,\ell) = (k^{\rho} + \ell^{\rho})^{1/\rho}, \quad \rho > 1$$

- コブ-ダグラス型は $\alpha + \beta = 1$ のとき収穫不変となる
- レオンチェフ型

$$f(k,\ell) = \max(ak, b\ell), \quad a, b > 0$$

企業の合理的生産計画 I

- w を賃金率、p を投資財の価格、δ を資本減耗率、y を産出量、i を利子率とする
- 投入のタイミングから産出まで、一定期間がかかるとする
- 企業の生産活動による収益を産出時点で計ると

$$\frac{y - w\ell + (1-\delta)pk}{1+i} - pk = \frac{y - (w\ell + (i+\delta)pk)}{1+i}$$

- 生産計画を立てる時点で、売り上げ高 y は不明なので企業家が予想するものとする
- 結局企業は予想産出量 y を所与として、上記の収益を生産関数 $y = f(k, \ell)$ の制約の下で最大化するような k と ℓ を選択する

企業の合理的生産計画 II

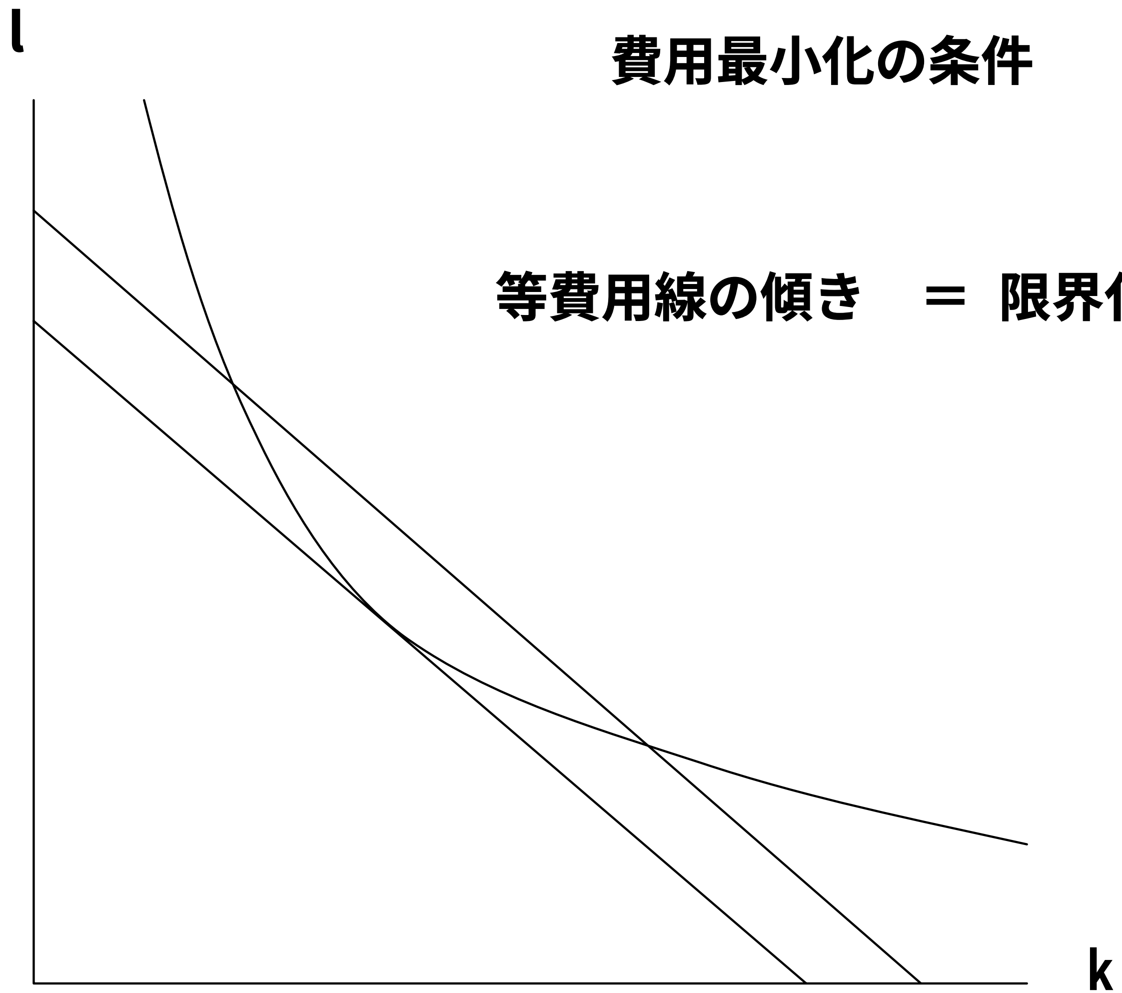
- 最適な投入の組み合わせ (k, ℓ) は、$y = f(k, \ell)$ の制約の下で費用 $w\ell + (i+\delta)pk$ を最小化するものである
- これは $k-\ell$ 平面において $y = f(k, \ell)$ に対応する等量曲線と等費用線 $C = w\ell + (i+\delta)pk$ が交わるとき、切片 C/w をもっとも小さくするような (k, ℓ) である
- そのとき、$k-\ell$ 平面において点 (k, ℓ) では、等費用線の傾き $\frac{(i+\delta)p}{w}$ と等量曲線の接線の傾きが等しくなっている
- この条件は

$$\frac{(i+\delta)p}{w} = \frac{\frac{\partial f}{\partial k}}{\frac{\partial f}{\partial \ell}}$$

- 左辺の分子は、生産物価格単位の資本用役価格（賃料）と考えられる

費用最小化(接点条件)

- 費用が最小になる様子を図示してみる



企業の合理的生産計画 III

- 最適な生産のための条件

$$\frac{(i+\delta)p}{w} = \frac{\frac{\partial f}{\partial k}}{\frac{\partial f}{\partial \ell}}$$

の右辺は限界代替率にマイナスの符号をつけたものである

- 限界代替率逓減の前提から
- 最適な資本ストックは (名目賃金率単位の) 資本賃料 $\frac{(i+\delta)p}{w}$ の減少関数
- 最適な労働投入は (名目賃金率単位の) 資本賃料 $\frac{(i+\delta)p}{w}$ の増加関数
- 最適な資本ストックは予想産出 y の増加関数

企業の合理的生産計画 IV

- 最適な投資支出は、最適な資本ストックと現状の資本ストックの差である
- たいていの場合最適な資本ストックは現状の資本ストックを上回る
- 結局、投資支出は資本賃料 $\frac{(i+\delta)p}{w}$ の減少関数
- 投資支出は予想産出 y の増加関数、当然利子率 i の減少関数

コブ-ダグラス型生産関数の例

- 特に簡単な $y = \sqrt{k\ell}$ を考える
- 限界代替率は ℓ/k
- 最適な資本ストック k^* は

$$k^* = \frac{w}{(i+\delta)p}\ell$$

- $y^2 = \ell k$ より、最終的に

$$k^* = \sqrt{\frac{w}{(i+\delta)p}}y$$

- これは、示したとおりの性質をもっている