第1章　線形不等式と線形方程式の経済学と金融への応用

線形連立方程式の解の存在のための必要十分条件については，多くの線形代数の教科書では係数行列と拡大係数行列の回数の一致という形で解説されています．また，Cramér の公式を応用した解法はどのような教科書にもとりあげられています．

応用面からみた線形代数における線形方程式の理論の核心部分としては，そうしたことで十分なのですが，経済理論においては，もう少し特殊な想定の下で線形方程式を解くことが要請されことも多いのです．また，そこで得られた結論は，効率的資源配分を研究する科学としての経済学にとって，深い意味を持ちます．以下，それを解説していきます．

1.1　問題の所在：実例から

簡単な例を考えます．

例 1. 2×3 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

と，列ベクトル

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

を考え，線形非斉次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

を作ります．今，拡大係数行列と係数行列の間に $rank\ (A|b) = rank\ A = 2$ が成立しているとすると，非斉次方程式に関する解の公式から

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{13} \\ b_{23} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

を得ます．

ここで，(1.1) に非負となる解が存在する条件を考えてみましょう．

ここで解が非負であるとは，x の各要素が $x_i \geq 0$ を満たすことを言います．方程式の解が非負であることを要請するのは，経済理論を線形方程式を用いて数学的に定式化したときに，常に経済学的に意味のある解が望まれることを反映しているからだと，この段階では理解してください．

さて，階数に関する条件は一般解の存在を保証するにすぎません．また，具体的な解の表現 (1.2) は階数に関する条件を仮定して得られています．このままでは，非斉次方程式 (1.1) が非負の解，つまり

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

となる解の存在を保証する条件を導出するのに容易ではないことがわかります．そこで，かなり違った角度から，非斉次方程式の非負解の問題を扱うことが必要となります．

1.2　非斉次方程式の解の存在条件

一般的な非斉次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

の解の存在条件は $\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ (A|b)$ ということでした．このことから方程式 (1.3) の解の存在条件を別の形で特徴づけてみましょう．

1.2.1　行列・ベクトルに関する記法のまとめ

本論に入る前に，幾つかの行列・ベクトルの記法を，もう一度まとめた上で，便宜のためにいくつかの特殊な記法を導入します．この本では，ベクトルといえば，次のような列ベクトルを指すという約束でした．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

行ベクトルは，列ベクトルの転置として

$${}^t\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n)$$

のように転置記号「^{t}」がベクトルを表わす記号の前に付く形で表わされる．よって，読者は，ベクトルを表わす記号が出てきたとき，転置記号「^{t}」がベクトルが付いていなければ列ベクトル，付

いていれば行ベクトルとして考えるようにすれば，行列の積などの表現が式中に出てきても，迷うことはなくなるだろう．例えば，上の二つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と ${}^t\boldsymbol{y}$ について，${}^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}$ が

$$
{}^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{x} = (y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >
$$

という内積になり，$\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{y}$ が

$$
\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}
$$

という $n \times n$ 行列になります．

なお，これらの約束はゼロベクトルに関しても適用します．つまり，

$$
\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

であり，

$$
{}^t\boldsymbol{0} = (0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)
$$

となります．

$\boldsymbol{x}$ の各要素が $x_i \geq 0$(resp. $x_i > 0$) のとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ は非負 (resp. 正) であるといいます．

次に，$m \times n$ 列の行列

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

を m 個の n 次元行ベクトルが集まったものと考えるとき，行列第 i 行を

$$
{}^t\boldsymbol{a}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})
$$

というように記すことにします．同様に行列 A を n 個の m 次元列ベクトルが集まったものとみなすときに，行列第 j 列を

$$
\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}
$$

というように記します．これによって，

$$A = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}^1 \\ {}^t\boldsymbol{a}^2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}^m \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

のように記すことができます．とにかく，行ベクトルには転置を表わす「^{t}」が付くという約束を意識して読みましょう．

1.3　線形非斉次方程式の非負解と線形斉次不等式

1.3.1　Minkowski-Farkas の定理

さて，線形非斉次方程式 (1.3) が非負解 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ を持つとは，幾何学的にどのような意味を持つか考えてみましょう．

$m \times n$ 行列を

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

のように考えます．

次に示す Minkowski-Farkas の定理とよばれる線形方程式と線形不等式に関する定理が，経済学と金融分析にとって非常に重要です．この定理は通常．線形計画法，ゲーム理論，解析学における最適値問題，産業連関分析，金融商品の価格決定で用いられて，ありとあらゆる基礎的な経済理論が成立することを保証している．

定理 1. A を $m \times n$ 行列とする．また，$\boldsymbol{b}$ を m 次元ベクトルとする．このとき，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1.4}$$

が非負解 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ を持つためには，線形不等式

$${}^t\boldsymbol{y}A \geq {}^t\boldsymbol{0} \tag{1.5}$$

を満たす任意の m 次元のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して

$${}^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{b} \geq 0 \tag{1.6}$$

が成立することが必要十分条件である．

この定理は，つぎに示すように明確な幾何学的な内容を持ちます．説明の前に以下の集合を定義しておきます．

$$C = \left\{ \boldsymbol{d} \in \mathbf{R}^m \quad \exists^t(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n \quad \boldsymbol{d} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{a}_j \right\} \tag{1.7}$$

これは $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \ldots,\ \boldsymbol{a}_n$ が張る凸多面錐 (polyhedral cone) といいます．[1]一般に $\mathbf{R}^m$ の部分集合 C が錐 (cone) であるとは，任意の非負の実数 $\lambda \geq 0$ に対して，

$$y \in C \Longrightarrow \lambda y \in C$$

となる集合をいいます．これに加えて

$$x, y \in C \Longrightarrow x + y \in C$$

という条件が成立するような錐を凸錐 (convex cone) とよびます．なお，凸多面錐に関する詳細な議論は後の節で行ないますが，ここでは Minkowski-Farkas の定理の幾何学的な意味のみを議論するために凸多面錐を扱います．

演習 1. 二次元平面において，${}^t(1,2)$，${}^t(-2,3)$ という二つのベクトルが張る凸多面錐を図示せよ．また，${}^t(1,2)$，${}^t(-2,3)$，${}^t(0,-1)$ という三つのベクトルの張る凸多面錐はどうなるか．

演習 2. 有限個のベクトルが張る凸多面錐は凸錐であることを示せ．

演習 3. すべての要素が，非負である m 次元ベクトルの集合は錐であることを確かめてください．また，すべての要素が正である m 次元ベクトルの集合は錐の定義を満たすかを考えましょう．

また，m 次元ベクトル b との内積が非負となる m 次元ベクトルの集合

$$\left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \quad {}^t\boldsymbol{y}b \geq 0 \right\}$$

を b の作る半空間といいます．内積が非負になるということは，二つのベクトルのなす角度が 90 度以下であることを意味しますから，b の作る半空間は，b とのなす角度が 90 度以下であるベクトルを集めたものであるということができます．

演習 4. 次の 2 つのベクトル

$$(1,2),\ (-1,3)$$

の半空間の共通部分は凸錐になることを，平面上で幾つか図示してみて確認しみましょう．

さて，以上の幾何学的な用語を用いて定理の内容を表現してみましょう．行列 A の各列からなる n 個のベクトルが張る凸多面錐 $C \subset \mathbf{R}^m$ に b が属するとき，またそのときに限って，行列 A の各列からなる n 個のベクトルのそれぞれが作る半空間の共通部分である凸錐は b が作る半空間に含まれる．

演習 5. *Minkowski-Farkas* の定理の内容を，二次元空間で図示して確認してみましょう．

図で確認する限り，あまりに当然のように思えますが，実はそれほど自明な定理ではありません．[ファイナンス数学の講義ノートに書いた証明を挿入]

[1]三次元空間における凸多面錐は，アイスクリームのコーンに似ていることがわかります．

1.3.2　凸集合

凸集合とはへこんだところのない集合です．このことを正確に定義すると以下のようになります．

定義 1. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 C は，任意に *2* つとった点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ と，*0* と *1* の間の任意の値をとる実数 α に対して

$$\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in C$$

となるとき，凸集合とよばれます．

例 2. 線分は凸集合です．

$\mathbf{R}^n$ の部分集合についての，和とスカラー積を定義しておきます．

定義 2. $X_1, X_2 \subset \mathbf{R}^n$ について

$$X_1 + X_2 = \{\mathbf{y} \mid (\exists\mathbf{x}_1 \in X_1)(\exists\mathbf{x}_2 \in X_2)\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\}.$$

さらに，実数 λ に対して

$$\lambda X_1 = \{\mathbf{y} \mid (\exists\mathbf{x}_1 \in X_1)\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}_1\}$$

と定義します．

また「差」についても以下のように定義します．

定義 3. $X_1, X_2 \subset \mathbf{R}^n$ について

$$X_1 - X_2 = \{\mathbf{y} \mid (\exists\mathbf{x}_1 \in X_1)(\exists\mathbf{x}_2 \in X_2)\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\}.$$

と定義します．

演習 6. 以下のような凸集合を考えます．

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$$

$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \le 1\}$$

$$C_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1x_2 \ge 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

$$C_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

1. $C_1 + C_2$ を図示してください．
2. $C_2 + C_4$ を図示してください．
3. $\{(2, 0)\} + C_2$ を図示してください．
4. $C_3 + C_4$ を図示してください．

5. $C_2 - (\{(2,0)\} + C_2)$ を図示してください．

(4 番目と 5 番目の問題は難しいです．)

次の命題が成立します．

命題 1. 1. 2 つの凸集合 $C_1, C_2 \subset \mathbf{R}^n$ の和も凸集合である．
2. 凸集合 $C \subset \mathbf{R}^n$ のスカラー倍も凸集合である．
3. 任意の個数の凸集合の交わりもまた凸集合である．

演習 7. 上の命題を証明してください．

次の命題は重要である．

命題 2. 1. 凸集合 $C \subset \mathbf{R}^n$ の閉包 clC も凸集合である．
2. 凸集合 $C \subset \mathbf{R}^n$ の内部 $\overset{\circ}{C}$ も凸集合である..

演習 8. 上の命題を証明してください．(ただし難しいです．)

1.3.3 超平面・半空間と凸集合の分離

この節では，凸集合の分離定理を扱います．凸集合の分離定理は，2 次元や 3 次元などの視覚的につかみやすい空間では，証明の必要を感じないほど明らかな定理に思える諸君も多いかもしれません．しかし，厳密な証明は，それほど簡単ではありません．

定義 4. $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ をゼロでないベクトルとし，c を実数とする．このとき

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = c\}$$

で定義される集合を超平面という．

例 3. 2 次元ユークリッド空間 (平面）における直線 $y = 3x + 1$ や $x = 3$ のグラフは超平面です．(各自確認せよ．)

注意 1. 超平面は，空間を二つの部分に分けます．

定義 5. $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ をゼロでないベクトルとし，c を実数とする．このとき超平面

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = c\}$$

を境界とする二つの集合

$$H_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \geq c, \}$$

$$H_- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \leq c\}$$

を半空間という．これら二つの内部にあたる

$$\overset{\circ}{H}_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} > c, \}$$

$$\overset{\circ}{H}_- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} < c\}$$

を開半空間とよぶ.

注意 2. $H, H_+, H_-, \overset{\circ}{H}_+, \overset{\circ}{H}_-$ は，すべて凸集合です.

次の定理が，もっとも単純な分離定理であり，すべての分離定理の出発点といえます.

定理 2. $C \subset \mathbf{R}^n$ を凸集合，$\mathbf{y} \notin cl C$ とする．このときある超平面 H が存在して，これに対応する二つの開半空間に対して $\mathbf{y} \in \overset{\circ}{H}_-, C \subset \overset{\circ}{H}_+$ となる.

注意 3. 上の定理は，定理の前提を満たす所与の $\mathbf{y}$ と C に対して

1. ${}^t\mathbf{p}\mathbf{y} < c$
2. $(\forall \mathbf{x} \in C)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} > c$

となるベクトル $\mathbf{p}$ と実数 c の存在を主張しています.

注意 4. 定理の前提における凸集合 C には，位相に関する仮定は一切おかれていないことに注意しましょう.（開集合でも閉集合でも，そのどちらでなくともよいのです.）

定理??の証明:

注意??の c と $\mathbf{p}$ として，

$$f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

で定義される実数値関数に対して決まる

$$\delta = \min_{\mathbf{x} \in cl C} f(\mathbf{x})$$

から定まる $c = \frac{1}{2}\delta^2$ と，δ をもたらす $\mathbf{x}_0 \in cl C$ から定まる $\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}$ が所望のものであることを示します.

まず勝手な点 $\mathbf{z} \in C$ を一個選びます．すると $\mathbf{y} \notin cl C$ であるから，$C \subset cl C$ から $\mathbf{y} \notin C$ である．ノルムの定義から $\rho = ||\mathbf{z} - \mathbf{y}|| > 0$ である．閉球

$$B_\rho(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \leq \rho\}$$

は，明らかに有界な閉集合であり，同時に凸集合となります．つまりコンパクトな凸集合です.

$$D = B_\rho(\mathbf{y}) \cap cl C$$

も，命題??と命題??によりコンパクトな凸集合であることがわかります．Weierstrass の定理によって連続関数 $f(\mathbf{x})$ はコンパクト集合 D 上で，最小値 $\bar{\delta}$ をとります.

$\mathbf{y} \notin cl C$ から $0 < \bar{\delta} \leq \rho$ である．もし $D' \supset D, D' \neq D$ なるコンパクト凸集合 D' をとると，D' 上での連続関数 $f(\mathbf{x})$ の最小値は，$\bar{\delta}$ に等しいことがわかります．よって $\bar{\delta} = \min_{\mathbf{x} \in cl C} f(\mathbf{x})$ である．つまり $\bar{\delta}$ こそが，所望の値 δ となっています．また，D 上で $f(\mathbf{x})$ を最小化する $\mathbf{x}_0 \in cl C$ は，$cl C$ の凸性から一意に定まります．そこで $\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}, c = \frac{1}{2}\delta^2$ とおきます.

さて任意の $\mathbf{x} \in C$ と $0 < \lambda \leq 1$ なる実数 λ を任意にとると，$cl\,C \supset C$ が凸集合であることから $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}_0 \in cl\,C$ となります．さらに

$$||\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}||^2 \geq ||\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}||^2$$

が成り立ちます．これを $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ と内積とノルムの関係を使って整理すると，

$$2\lambda({}^t\mathbf{x}_0 - {}^t\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \lambda^2||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||^2 \geq 0$$

となります．この式を λ で割って $\lambda \longrightarrow 0$ とし，$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}$ とおいたことを使うと

$${}^t\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq 0$$

を得ます．

さらに

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \geq {}^t\mathbf{p}\mathbf{x}_0 &= {}^t\mathbf{p}\mathbf{p} + {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} \\ &= \delta^2 + {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} \\ &= 2a + {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} \end{aligned}$$

このことと ${}^t\mathbf{p}\mathbf{x}_0 = 2a > a$ から ${}^t\mathbf{p}\mathbf{x} > a$ がわかり，$\mathbf{p}$ の作り方から ${}^t\mathbf{p}\mathbf{y} = 0$ であることから ${}^t\mathbf{p}\mathbf{y} < a$ がわかります．(証明おわり)

定理??をもとに，次の定理を証明することができます．

定理 3. $C \subset \mathbf{R}^n$ を凸集合，$\mathbf{y} \in bd\,C$ とする．このとき $\mathbf{y} \in H$ となる超平面 H が存在して，これに対応する半空間 H_+ に対して $C \subset H_+$ となる．

定理??の証明:

$\mathbf{y} \in bd\,C$ かつ，$(cl\,C)^c$ が開集合であることから，任意の k に対して $\mathbf{y}_k \notin cl\,C$ であり，$k \longrightarrow \infty$ のとき $\mathbf{y}_k \longrightarrow \mathbf{y}$ となる点列 $\{\mathbf{y}_k\}$ が存在する．

点列 $\{\mathbf{y}_k\}$ の各点に対して，定理??によって存在が保証されるベクトルの点列 $\{\mathbf{p}_k\}$ をとる．ただし，一般性を失うことなく $||\mathbf{p}_k|| = 1$ とする．作り方から

$$(\forall\mathbf{x} \in C)(\forall k)\ {}^t\mathbf{p}_k\mathbf{y}_k < {}^t\mathbf{p}_k\mathbf{x}$$

点列 $\{\mathbf{p}_k\}$ はコンパクト集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid ||\mathbf{x}|| = 1\}$ を動くから，定理??により，$\{\mathbf{p}_k\}$ には収束する部分列がある．これを $\{\mathbf{p}_{k_i}\}$ とかくことにし，ベクトル $\mathbf{p}$ を $k_i \longrightarrow \infty$ のとき $\mathbf{p}_{k_i} \longrightarrow \mathbf{p}$ となるベクトルを $\mathbf{p}$ と定める．

このとき

$$(\forall\mathbf{x} \in C)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} = \lim_{k_i \longrightarrow \infty} {}^t\mathbf{p}_{k_i}\mathbf{y}_{k_i} \leq \lim_{k_i \longrightarrow \infty} {}^t\mathbf{p}_{k_i}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{p}\mathbf{x}$$

となる．これは，$H = \{\mathbf{x} \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{p}\mathbf{y}\}$ とすると，$\mathbf{y} \in H$ であり $C \subset H_+$ を意味する．(証明おわり)

次に分離定理を証明する．

定理 4. $C \subset \mathbf{R}^n, D \subset \mathbf{R}^n$ を凸集合，$C \cap D = \phi$ とする．このとき超平面 H が存在して，これに対応する 2 つの半空間 H_+, H_- に対して $C \subset H_+, D \subset H_-$ となる．

定理??の証明:

$C - D$ は，明らかに凸集合である．また $C \cap D = \phi$ より $\mathbf{0} \notin C - D$ である．ここで二つの場合に分かれる．

$\mathbf{0} \in bd\,(C - D)$ の場合，定理??によって $C - D$ を原点で支持する超平面 H が存在する．この場合ある $\mathbf{p}$ が存在して

$$(\forall \mathbf{w} \in (C - D))\ 0 \geq {}^t\mathbf{p}\mathbf{w}$$

これは

$$(\forall \mathbf{x} \in C)(\forall \mathbf{y} \in D)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} \geq {}^t\mathbf{p}\mathbf{x}$$

を意味する．

また $\mathbf{0} \notin bd\,(C - D)$ の場合，定理?? によってある $\mathbf{p}$ が存在して

$$(\forall \mathbf{w} \in C - D)\ 0 < {}^t\mathbf{p}\mathbf{w}.$$

これは

$$(\forall \mathbf{x} \in C)(\forall \mathbf{y} \in D)\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{y} < {}^t\mathbf{p}\mathbf{x}$$

を意味する．

どちらの場合も，$H = \{\mathbf{x} \mid {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = 0\}$ が 2 つの集合を分離していることがわかる．(証明おわり)

1.3.4　線形不等式の定理

Kuhn-Tucker の定理の証明にも登場した，Minkowski-Farkas の定理は凸集合の分離定理と密接な関係がある．また無裁定条件が状態価格の存在と同値であるという数理ファイナンスにおける最重要の主張も，本質的には凸集合の分離定理 (あるいは無限次元における対応物である Hahn-Banacha の拡張定理) を基礎としている．

準備

いくつか定義をしておく．

定義 6. n 次元 *Euclid* 空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 L で，つぎの 2 つの条件

$$(\forall \mathbf{x} \in L)(\forall \mathbf{y} \in L)\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in L$$

$$(\forall \mathbf{x} \in L)(\forall \lambda \in \mathbf{R})\ \lambda\mathbf{x} \in L$$

を満たすものを部分空間 *(subspace)* とよぶ．

例 4. *1.* 集合 $\{(x,y) \mid x+y=0\}$ は 2 次元 *Euclid* 空間 $\mathbf{R}^2$ の部分空間である．
2. 集合 $\{(x,y,z) \mid z=0\}$ は 3 次元 *Euclid* 空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間である．

定義 7. n 次元 *Euclid* 空間 $\mathbf{R}^n$ の部分空間 L に対して

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid (\forall \mathbf{y} \in L)\ {}^t\mathbf{x}\mathbf{y} = 0\}$$

を満たす集合を L の直交補空間とよび $L^{\perp}$ と記す．

注意 5. 直交補空間も部分空間である．

$\mathbf{R}^n$ の非負のベクトルからなる集合を $\mathbf{R}^n_+$，正のベクトルからなる集合を $\mathbf{R}^n_{++}$ と記す．

注意 6. $\mathbf{R}^n_+$ の内部が $\mathbf{R}^n_{++}$，$\mathbf{R}^n_{++}$ の閉包が $\mathbf{R}^n_+$ になっており，$\mathbf{0} \notin \mathbf{R}^n_{++}$，$\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n_+$ に注意しよう．

分離定理を使うと以下の定理が証明できる．この定理が一連の線形不等式の定理の出発点となる．

定理 5. n 次元 *Euclid* 空間 $\mathbf{R}^n$ の部分空間 L とその直交補空間 $L^{\perp}$ をとるとき，次の二つの条件は同値である．

$$\begin{array}{ll} (1) & L \cap \mathbf{R}^n_+ = \{\mathbf{0}\} \\ (2) & L^{\perp} \cap \mathbf{R}^n_{++} \neq \phi \end{array}$$

定理??の証明:

(2)⇒(1) の証明は，簡単である．(2) を仮定すると，すべての要素が正であるような $L^{\perp}$ に属するベクトル $\mathbf{y}$ が存在する．このとき $\mathbf{0}$ でない任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n_+$ と内積をとると ${}^t\mathbf{y}\mathbf{x} > 0$ である．これは $\mathbf{R}^n_+$ には $L^{\perp}$ と直交するベクトルは $\mathbf{0}$ 以外ないことを示す．つまり $(L^{\perp})^{\perp} \cap \mathbf{R}^n_+ = \{\mathbf{0}\}$ である．ここで $(L^{\perp})^{\perp} = L$ に注意して (1) をえる．

(1)⇒(2) の証明は背理法でおこなう．(2) が成立しないと仮定する．$L^{\perp}$ と $\mathbf{R}^n_{++}$ がともに凸集合であることから，定理??によって，$L^{\perp}$ と $\mathbf{R}^n_{++}$ を分離する超平面 H が存在する．よりくわしくいうと，H を決める $\mathbf{0}$ でない法線ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ が存在して

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n_{++})\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \geq 0$$

$$(\forall \mathbf{x} \in L^{\perp})\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} \leq 0$$

となる．最初の条件より $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ がわかる．また第 2 の条件において，$L^{\perp}$ が部分空間であることから任意の $\mathbf{x} \in L^{\perp}$ に対して $-\mathbf{x} \in L^{\perp}$ であることを使うと ${}^t\mathbf{p}\mathbf{x} < 0$ ではありえないことがわかる．つまり

$$(\forall \mathbf{x} \in L^{\perp})\ {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} = 0$$

となる．これは $\mathbf{p} \in (L^{\perp})^{\perp} = L$ を意味する．つまり

$$\mathbf{p} \in L \cap \mathbf{R}^n_+ \text{ かつ } \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$$

これは (1) に矛盾する．(証明おわり)

線形不等式に関する定理として Stimke の補題とよばれるものが，議論の出発点になる．A を $m \times n$ 行列とすると，A は，$\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$ と考えれば $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ への線形写像と考えられるし，その転置 ${}^tA$ は $\mathbf{y} \longmapsto {}^tA\mathbf{y}$ と考えれば $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像と考えられる．このとき ${}^tA$ の値域と A のカーネルをそれぞれ

$$\mathrm{Range}^t A = \{\mathbf{z} \mid (\exists \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m)\ \mathbf{z} = {}^tA\mathbf{y}\}$$

$$\mathrm{Ker}A = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

とかくと，$\mathrm{Range}^t A$ と $\mathrm{Ker}A$ は線形部分空間であり，$\mathrm{Ker}A$ は $\mathrm{Range}^t A$ の直交補空間になっている．よって，$L = \mathrm{Range}^t A$ とおいて，定理??を適用すると

定理 6 (Stimke の補題). A を $m \times n$ 行列とするとき，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる，すべての要素が正であるベクトル $\mathbf{x}$ が存在するための必要十分条件は ${}^tA\mathbf{y} > \mathbf{0}$ となる $\mathbf{y}$ が存在しないことである．

次に，Kuhn-Tucker 定理の証明でも重要な役割を果たす Minkowski-Farkas の定理を証明する．

定理 7 (Minkowski-Farkas). A を $m \times n$ 行列，$\mathbf{b}$ を $\mathbf{R}^m$ とする．次の 2 つの条件は同値である．

$$(1)\quad (\forall \mathbf{p})\quad \left[{}^t\mathbf{p}A \geq \mathbf{0} \Longrightarrow {}^t\mathbf{p}\mathbf{b} \geq 0\right]$$

$$(2)\quad (\exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0})\quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

定理??の証明:

(2)⇒(1) の証明は簡単である．(2) と ${}^t\mathbf{p}A \geq \mathbf{0}$ を仮定して，${}^t\mathbf{p}\mathbf{b} \geq 0$ を示せばよい．実際

$${}^t\mathbf{p}\mathbf{b} = {}^t\mathbf{p}(A\mathbf{x}) = ({}^t\mathbf{p}A)\mathbf{x} \geq 0$$

最後の不等式は，非負ベクトル同士の内積がゼロ以上であることによる．

(1)⇒(2) の証明は，以下のようになる．(1) は次の条件と同値である

$$(\forall \mathbf{p})\quad \left[(\mathrm{not}\ {}^t\mathbf{p}A \geq \mathbf{0}) \vee {}^t\mathbf{p}\mathbf{b} \geq 0\right]$$

これはさらに，次の条件と同値である．

$$\mathrm{not}\ (\exists \mathbf{p})\quad \left[{}^t\mathbf{p}A \geq \mathbf{0} \wedge {}^t\mathbf{p}\mathbf{b} < 0\right]$$

これより，A に m 次元ベクトル $-\mathbf{b}$ を並べて作った $m \times (n+1)$ 行列

$$B = [A; -\mathbf{b}]$$

に関して ${}^t\mathbf{p}B > \mathbf{0}$ となる $\mathbf{p}$ が存在しないことがわかる．これに (転置されたバージョンの) 定理??を適用すると，正の要素だけからなるある $n+1$ 次元ベクトル $\mathbf{z} = (z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1})$ が存在して $B\mathbf{z} = \mathbf{0}$ となる．$\mathbf{y} = (z_1 z_2 \cdots z_n)$ とかくことにすると，$A\mathbf{y} - z_{n+1}\mathbf{b} = \mathbf{0}$ である．ここで各 i について $x_i = z_i / z_{n+1}$ として $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n) \geq \mathbf{0}$ を作ると $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ となる．(証明おわり)

1.3.5 Minkowski-Farkasの定理の周辺

さらに次の定理は，Minkowski-Farkasの定理から導かれます．あとの節で展開される議論にとって有効です..

定理 8. A を $m \times n$ 行列とする．また，$\boldsymbol{b}$ を m 次元ベクトルとする．このとき，

$$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \tag{1.8}$$

が非負解 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ を持つためには，線形不等式

$$^t\boldsymbol{y}A \geq {^t\boldsymbol{0}} \tag{1.9}$$

を満たす任意の非負の m 次元のベクトル $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ に対して

$$^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{b} \geq 0 \tag{1.10}$$

が成立することが必要十分条件となる．

Proof. m 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を導入します．これにより，不等式 $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}$ が非負解 $\boldsymbol{x} \geq 0$ をもつことと，方程式 $A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ が非負解 $\boldsymbol{x} \geq 0$，$\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$ を持つことは同値になることがわかります．$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を単位行列 I を用いて，Minkowski-Farkasの定理が適用しやすい形に書くと，

$$[A, I]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{1.11}$$

となります．

$m \times (n+m)$ の行列 $[A, I]$ に Minkowski-Farkas の定理を適用すると (??) が非負解を持つことと，任意の $\boldsymbol{y}$ に対して

$$^t\boldsymbol{y}[A, I] \geq {^t\boldsymbol{0}} \Longrightarrow {^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{b}} \geq 0$$

が必要かつ十分であることになることがわかります．すなわち，任意の $\boldsymbol{y}$ に対して

$$({^t\boldsymbol{y}A} \geq {^t\boldsymbol{0}} \text{ かつ } {^t\boldsymbol{y}} \geq 0) \Longrightarrow {^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{b}} \geq 0$$

が成り立ちます．結局，$^t\boldsymbol{y}A \geq {^t\boldsymbol{0}}$ を満たす任意の非負解 $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ が，$^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{b} \geq 0$ となることが必要十分であることがわかります． □

次の定理も同様に証明することができます．

定理 9. B を $n \times m$ の行列とする．また $\boldsymbol{d}$ を m 次元のベクトルとする．このとき，

$$^t\boldsymbol{x}B \geq {^t\boldsymbol{d}}$$

が非負解 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ を持つためには，線形不等式

$$B\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}$$

を満たす任意の非負の m 次元のベクトル $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ に対して

$$^t\boldsymbol{d}\boldsymbol{y} \leq 0 \tag{1.12}$$

が成立することが必要十分条件となる．

演習 9. *Minkowski-Farkas* の定理の系??を使って，すぐ上の定理を証明してください．