第２章　金利計算

2.1　はじめに

この章では，利子率の計算に関わる数理を概観する．

マクロ経済学の初級の講義において登場する IS-LM 分析では利子率が，あたかもその世界に 1 つしかないかのように扱われる．そして，中央銀行の金融政策によって制御される利子率が生産者の投資行動に決定的な影響を与えると，学生は教わる．現実の世界をよく知るものには，抵抗を感ずることも多い．

第一に，金利と設備投資の関連は，教科書がいうように単純な関係にはない．正確には，設備投資を決定する要因として金利は，唯一無比といえる影響力をもっていない．(もし利子率が設備投資の第一の決定要因なら，この数年の低金利の状況では，企業の設備投資はとっくに回復していただろう．）第二に（まさにこれがこの講義に関連することだが），利子率には様々な種類があり，決定メカニズム自体も金融システムの高度化にともなって，複雑になっていると思われる．

2.2　金利とは

現在の 1 万円と将来の 1 万円は等価ではない．両者を関係づけるのが金利である．一般には，貸付取引によって，貸し手から借り手への資金の移動と借り手が貸し手に対して発行した貸借契約書の交換が現時点で行なわれ，将来時点において利子を含めて返済・償還といった資金移動が借り手から貸し手に起こり決済が完了する．この場合，一定期間資金を利用することの対価が利子 (interest) であり，利子を元本で割った値に 100 をかけてパーセント表示したものを純利子率 (net rate of interest)，あるいは単純に利子率 (rate of interest) とよぶ．

$$\text{(純) 利子率} = \frac{\text{利子}}{\text{元本}} \times 100 \tag{2.1}$$

また，利子と元本の合計を元本で割った値をパーセント表示したものを粗利子率 (gross rate of interest) とよぶ．

$$\text{(粗) 利子率} = \frac{\text{利子＋元本}}{\text{元本}} \times 100 \tag{2.2}$$

数学的には粗利子率を扱う方が便利な場合もあることに注意しよう．単位期間に対応する粗利子率がわかっているならば，複利計算で 1 単位資金のある期間後の元利合計を求める場合，その期間数だけ粗利子率を掛け合わせればよい．

注意 1. 利子率は，一般に無名数（次元のない数）である．

注意 2. 実は，同質なりんご *1* 個を現在と将来で比較した場合，同じ満足を与えるとは限らないために，仮に両者を物々交換する市場があるならば，その交換比率は *1* にならないと予想される．これを時間選好という．その場合の交換比率は，*(*粗*)* 利子率と考えることができる．

2.3　収益率

この時点で，利子率について大して知ることはないと考える諸君もいるかもしれないが，話はそれほど単純ではない．なぜなら，現代の金融システムにおいては資金融通形態が複雑化しているために，1 単位の資金が単位期間にどれだけの収益をもたらすかという観点に立たない限り，さまざまな金融商品の客観的な比較は難しい．つまり現代の金融においては，単純貸借における利子率に換わって，最終利回り (yield to maturity) あるいは収益率 (rate of return) という概念が重要となる．

2.3.1　割引現在価値と内部収益率

まず，単純な貸借契約にも様々な期間が考えられるために，通常利子率はある一定の期間（たとえば 1 年）に基準化した形で表示されるのが普通である．この場合，基準化のやり方として単利計算によるものと複利計算によるものがある．1 万円を n 年後に元利合計 $1+x$ 万円返済するという契約を考えよう．単利で収益率を計算する場合元本金額が契約期間中に不変であると想定して計算する．よって

$$\text{単利利回り} = \frac{x}{n} \times 100 \tag{2.3}$$

次に複利で計算する場合，各期末に収益率から計算される利子分が再投資されることで元本が変化すると想定して計算する．よって収益率 r は

$$(1+r)^n = 1+x$$

を満たすとして定義される．よって $r = \sqrt[n]{1+x} - 1$ と計算される．

さらに契約期間中にクーポン支払いがある場合，収益率の計算は複雑になり一般にすぐ上のように解析的に単純に解くことができない．実際には，y 単位円の資金を借入するかわりに毎期末にクーポン c 円を貸し手に支払い，契約最終時点である第 n 期末にクーポン c 円と償還金 x 円を支払う，という貸借契約である．

この場合収益率を r とすると，r は次の方程式を満たすと考えられる．

$$y = \frac{c}{(1+r)} + \frac{c}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{c+x}{(1+r)^n}$$

この式の両辺に $(1+r)^n$ をかけて整理すると，粗収益率 $1+r$ は

$$y(1+r)^n - c(1+r)^{n-1} - c(1+r)^{n-2} - \cdots - (c+x) = 0 \tag{2.4}$$

という代数方程式の解であるが，$n \geq 5$ の場合解析的にとくことができないことが知られている．よって数値計算によってしか収益率が求まらない．

より一般に現時点 0 時点の貸付あるいは投資 $y > 0$ に対して，n 期間にわたって償還金の非負値のキャッシュフロー

$$c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, \cdots, c_{n-1} \geq 0, c_n > 0$$

が生ずる契約を考える[1]．このとき

$$y = \frac{c_1}{(1+r)} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(1+r)^n} \tag{2.5}$$

を満たす r を **(純) 内部収益率**という．内部収益率は，キャッシュフローの割引現在価値の総和と y を等しくするような割引率として定義されている．定義 (2.5) の右辺における第 i 項

$$\frac{c_i}{(1+r)^i}$$

は，現時点 0 において，この額の資金を r で複利運用すると，i 時点においてちょうど c_i になることに注意しよう．

今 $x = \frac{1}{1+r}$ とおくと (2.5) は

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \tag{2.6}$$

と変形される，これは n 次の代数方程式である．右辺を $f(x)$ と書くことにすると，キャッシュフローの値が非負であることから，以下のことがすぐわかる．

$$f(0) = 0,\ f'(0) > 0,\ f''(x) > 0 (n \geq 2 \text{ のとき})$$

$$f'(x) > 0,\ (x > 0)$$

$$f''(x) > 0,\ (x > 0)$$

つまり $f(x)$ は $x \geq 0$ において原点を通る狭義単調増加な連続微分可能な関数である．よって中間値の定理より (2.6) をみたす $x > 0$ が一意に存在することがわかる．ただし，その $x > 0$ が $x < 1$ となって正の内部収益率をもたらすかは，すぐにはわからない．しかし，次のことはすぐにわかる．

注意 3. ある時点 i に関して $c_i > y$ ならば，$0 < x < 1$，つまり正の内部収益率が成立する．

演習 1. 上のことを証明せよ.（ヒント：$g(x) = c_i x^i$ とおき，$y = g(x)$ の解をもとめ，$y = f(x)$ の解との大小関係を調べよ.）

一般的には次の命題が成立する．

命題 1. 内部収益率を r とする．

$$r > 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i > y$$

[証明] 式の (2.6) 右辺を $f(x)$ とおく．$\sum_{i=1}^{n} c_i > y$ は $f(1) > y$ を意味する．すでに示したように，$f(x)$ は $x \geq 0$ において $f(0) = 0$ を満たす狭義単調増加関数であるから，$0 < x < 1$ である x で $y = f(x)$ を満たすものが唯一つ存在する．逆に，内部収益率 $r > 0$ は $0 < x < 1$ を意味するから $y = f(x) < f(1) = \sum_{i=1}^{n} c_i$ を得る.（証明おわり）

研究課題 1. これまでの議論で，キャッシュフロー列はすべて非負値であると仮定してきた．この仮定をはずしたとき，つまり将来的に負のキャッシュフローが生ずる（つまり，追い貸し）が生ずる場合，正の内部収益率の存在と一意性の議論は，どのように修正されるだろうか．各自，研究せよ．

[1] $c_n > 0$ としたのは，$c_n = 0$ とすると，n 次式とみなす意味を失うからである．

2.3.2 内部収益率の数値解法

投資額 y とキャッシュフロー列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ がわかっているとき，内部収益率を求めるためには，代数方程式 (2.6) を解けばよい．4 次までは，代数方程式は「解の公式」が存在するが，手間を考えると公式の適用は 2 次が限界と思われる[2]．そこで，数値解法が必要となる．$g(x) = f(x) - y$ と定義して，以下の説明を続ける．

さて，問題は $g(x) = 0$ となる $x > 0$ をみつけることである．

グリッド探索

もっとも素朴な方法としてグリッド探索を示す．$g(0) = -y$ であり，$g(x)$ が狭義単調増加関数であることから，$x = 0$ を出発点として，徐々に x を増やしていって $g(x) = 0$ となる x を探すというものである．

効率的な解法としては，まず命題 1 を適用して $x < 1$ が解となることを確認した後，$x = 1$ から x を減少させるのがよい．仮に $r = 0.5$ とすると $x = 2/3$ まで減少していけば見つかる．

問題はどれだけの刻み幅で，x を減少させればよいかであるが，現実的な問題では $\sum_{i=1}^{n} c_i$ が y を大幅に上回ることはない．つまり解は 1 よりもほんの少し小さい数であることが予想される．よって，$x = 1$ の近傍で，x と r の動きはほとんど同じオーダーとなる．つまり，r の有効桁数を考慮して x の探索幅を決めればよい．

Excel などの表計算ソフトを用いれば，大した手間をかけずに，内部収益率を瞬時の内に計算できるはずである．

演習 2. $y = 100,\ c_1 = 10, c_2 = 11, c_3 = 9, c_4 = 15, c_5 = 25, c_6 = 33$ として内部収益率をグリッド探索によって求めよ．また，*visual BASIC* などのプログラミングができる人は，投資額とキャッシュフローを与えたとき，内部収益率を計算するプログラムを作成してみよ．

2.3.3 2 分法

方程式 $g(x) = 0$ の解をもとめる方法として，より手間の少ないものとして，2 分法がある．基本的な考え方は，$g(x) = 0$ の解はある原点を含むある区間 $[a, b]$ に存在するはずなので，効率的に a を増加，b を減少させればよいというものである．具体的なアルゴリズムを以下に示す．ただし，$\sum_{i=1}^{n} c_i > y$ が成立し，$0 < x < 1$ なる解が存在することがわかっているものとする．

1．初期値の設定 $a_0 = 0, b_0 = 1$

2．2 分プロセス $z = (a_i + b_i)/2$ とおき，$g(z)$ を計算する．

3．収束判定 $g(z)$ が（近似的に）0 とみなせるかどうかを判定する．

  3.No $g(z) < 0$ の場合 $a_{i+1} = z, b_{i+1} = b_i$ とおき，ステップ 2 に戻る．

  3.No $g(z) > 0$ の場合 $a_{i+1} = a_i, b_{i+1} = z$ とおき，ステップ 2 に戻る．

[2] 3 次方程式の解の公式を簡単という人は，それを使えばよい．4 次方程式の解の公式は存在するはずだが，私はしらない．

3.Yes $g(z) \approx 0$ **の場合** z を解とする．(終了)

演習 3. 演習 *2* と同じ設定の下で，*2* 分法で内部収益率を求めよ．

ニュートン法

グリッド探索，2 分法は，$g(x) = 0$ の解を求めるにあたって $g(x)$ の連続性のみを前提として解を求める数値解法である．微分可能な関数については高次微分の情報を生かしていないために，数値解法としては一般に計算量が多く，逐次計算においてスピードが遅いとされている．内部収益率の計算程度ならば，上の 2 つの解法で十分と思われるが，参考のために，1 次の微分情報を利用する方程式の数値解法として有名なニュートン法を紹介しておく．

具体的には，適当な初期値 x_0 を解の近傍（例えば $x = 1$）と設定し，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \tag{2.7}$$

の逐次代入を $g(x_{n+1}) \approx 0$ とみなせるまで行なうというものである．

ニュートン法は，収束速度が速いという利点がある反面，解への収束の安定条件が無条件に保証されるものではない．しかし，連立方程式に関しても応用が可能なために，非常に広く利用されている．

注意 4. 実務の世界では，次の値を方程式 *(2.4)* を解いた結果として得られる収益率 r の近似解として利用される．

$$\frac{c + \dfrac{x-y}{n}}{y + \dfrac{n-1}{2n} \times (x-y)}$$

このような資金調達は一般に相対契約ではなく，債券市場においてクーポン債の発行によって行なわれる．毎期末にクーポン c 円を貸し手に支払い，契約最終時点である第 n 期末にクーポン c 円と償還金 x 円を支払うという有価証券であるクーポン債が y 円で市場で売買されるわけである．よって，このクーポン債の収益率 r と，観察される市場利子率が同一視される場合（つまり代替的な金融商品が存在し，その金融商品の最終利回りが分かっている場合）には，式 (2.4) は実践的な意味を持つ．つまり市場利子率の変動に依存して債券価格 y が変化する．例えば $\frac{\partial y}{\partial r}$ あるいはその弾力性である $\frac{\partial y}{\partial r}\frac{r}{x}$ などは変化をあらわす典型的な指標である．

演習 4. クーポン債価格 y と利子率 r の依存性をあらわす，

$$\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

クーポン債価格 y とクーポン c の依存性をあらわす

$$\frac{\partial y}{\partial c}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial c^2}$$

の計算を試み，定性的な関係が確立できるか考えよ．

2.4　元利均等返済

典型的な金利計算の一種として住宅ローンのように，複利計算の下で毎期一定額ずつ返済する元利均等返済 (amortization) を考えてみよう．次のような設定とする．借入金は y 円，金利を i，毎期 s 円ずつ返済するとして n 期で完済する．

借入時点で y 円の残存元本があるとして，最初の返済を行なうと 1 期後には返済対象となる残存元本は $y+iy-s$，さらに次の返済を行なうと 2 期後には残存元本は $(y+iy-s)+i(y+iy-s)-s = y+2iy+i^2y-2s-is$ である．これで残存元本が随時減少し n 期後に残存元本がちょうどゼロになればよい．

さて，第 k 回目の返済の対象となる残存元本を P_k であらわすとすると，第 k 回目の返済が済んだ後の残存元本 P_{k+1} と P_k には,

$$P_{k+1} = P_k + iP_k - s \tag{2.8}$$

という関係がある．これは定差方程式とみなせる．ただし，最初の設定から $P_0 = y$ である．一般解は

$$P_k = y(1+i)^k - \frac{s\{(1+i)^k - 1\}}{i}$$

として求められるから，完済の条件 $P_n = 0$ を使うと，毎期の返済額が

$$s = \frac{iy}{1-(1+i)^{-n}} \tag{2.9}$$

として求まる．ここで

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

を amortization factor とよび，平均的な割引率と考える．

演習 5. 借入金 y と n 期間だけ毎期 s のキャッシュフロー続く割引現在価値が等しいとしても，s を求めることができる．試みよ．

2.5　割引関数と金利

これまで，時間の扱いは離散的であった．しかし，金利計算を行なう場合時間を連続的に扱うほうが数学的操作が簡単になる場合も多い．連続的に時間を扱う場合，貸借関係における状況を表現するために，割引関数を考えると都合がよい場合が多い．特に国債のように，貸し倒れが起きるかもしれないという信用リスク (credit risk) がないと一般に考えられる債券についての市場を考える場合には必須である[3]．

これまで単純な貸借を，1 円を借りて満期時点で元利合計を返済する契約を結ぶと考えてきた．ここでは発想をかえて，満期時点で 1 円の価値を保証する有価証券を市場で販売し，資金を調達する (借入する) ことを考える．このような有価証券を割引債 (discount bond) という．ある主体が

[3] 民間企業の社債は一般に信用リスクが必ず存在する．

割引債を購入後，満期時点まで転売せずもった場合，販売価格の逆数が粗利子率をあらわす．そこで，将来の T 時点において 1 円の償還が保証される割引債の t 時点の価格を $v(t,T)$ とあらわすことにする．ただし $t \leq T$ である．この関数は，将来の 1 円の価値を現在価値 (present value) に割り戻すことに使えるために，割引関数 (discount function) とよばれる．

割引関数が，現時点 (例えば 0 時点) 以降のすべての $t \geq T$ である，実数の対 (t,T) について定義されていると想定することは，各時点であらゆる短期・長期の貸付取引が存在していると解釈できる．現実にはありえないことだが，利子率あるいは割引率・収益率の本質を理解するためには都合がよいので，以降，そのように仮定する．さらには，$v(t,T)$ の連続微分可能性を想定する．

注意 5. 各時点において，

$$v(t,t) = 1$$

が成立する．

例 1. 既出のクーポン支払いのある場合の債券の価格を同様に $v_c(t,T)$ とあらわすことにすると，$\Delta t = (T-t)/n$ 期間とおけば

$$v_c(t,T) = \sum_{i=1}^{n} cv(t, t+\Delta t) + xv(t,T)$$

がクーポン債の価格と割引債の価格の関連を示すことになる．

2.6　連続複利とイールド

さて割引債が途中で再投資が認められないとして計算される単位時間あたりの利回りは，

$$r_1(t,T) = \frac{\frac{1}{v(t,T)} - 1}{T-t} \tag{2.10}$$

となる．これを変形して

$$\frac{1}{v(t,T)} = 1 + (T-t)r_1(t,T)$$

単利の計算式と考えてよい．

つぎに，$T-t$ 期間中の中間点で元利合計が再投資された結果が割引債を 1 単位購入した場合の収益だと考えた場合の，単位時間当たりの利回り $r_2(t,T)$ は

$$\frac{1}{v(t,T)} = \left\{1 + \frac{(T-t)r_2(t,T)}{2}\right\}^2$$

を満たす．同様に $T-t$ 期間中の n 等分されて時点で元利合計が再投資された結果が割引債を 1 単位購入した場合の収益だと考えた場合の，単位時間当たりの利回り $r_n(t,T)$ は

$$\frac{1}{v(t,T)} = \left\{1 + \frac{(T-t)r_n(t,T)}{n}\right\}^n \tag{2.11}$$

をみたす．これを両辺の逆数をとって

$$v(t,T) = \left\{1 + \frac{(T-t)r_n(t,T)}{n}\right\}^{-n} \tag{2.12}$$

とすると，話の都合がよい．

さて $n \to \infty$ として期間分割の数を限りなく大きくしていった場合の利回りは，指数関数の定義から得られる関係

$$e^{-x} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

と (2.12) から

$$y(t,T) = \lim_{n\to\infty} r_n(t,T) \tag{2.13}$$

のように考えて，

$$v(t,T) = e^{-(T-t)y(t,T)} \tag{2.14}$$

を得る．ここでの $y(t,T)$ を割引債に 1 円投資した場合の最終利回り，イールド (yield to maturity) とよぶ．イールドは平均利子率を表す．イールドを割引債価格であらわすことにすると，

$$y(t,T) = -\frac{\ln v(t,T)}{T-t}, \quad (T > t) \tag{2.15}$$

注意 6. イールド $y(t,T)$ を，t が固定された場合に T の関数としてみると，t 時点で購入可能な，さまざまな満期時点をもつ割引債の収益率の一覧を表すと考えることができる．

特に T を独立変数と考えて，様々な満期時点の割引債の収益率を対応させて描いたグラフをイールド・カーブという．これは，資金の運用期間と収益率の関係である金利の期間構造 *(term structure)* を表現しているという言い方をすることがある．

現実に観察されるイールド・カーブの形状は，上方に対して頭打ちになる増加関数であることが多い．しかし，理論的にはイールド・カーブはさまざまな形状を取りうる．

演習 6. 式 *(2.15)* を参考にして，イールド・カーブが，

1. 水平になる条件
2. 右上がりになる条件
3. 右下がりになる条件
4. 山型になる条件

をそれぞれ考えてみよ．(確定的な答えを出すのは，難しいかもしれないので，まず具体例で考えてみよ．)

2.7　スポットレート

イールドは有限満期の割引債の平均利子率というべきものであった．それでは，$T \to t$ として満期までの期間をゼロに近づけていった値には何か意味があるだろうか．

数学的には (2.15) から

$$r(t) = -\lim_{T\to t}\frac{\ln v(t,T)}{T-t} = -\left.\frac{\partial}{\partial T}\ln v(t,T)\right|_{T=t} \tag{2.16}$$

と表現されるものである．これをスポットレート (spot rate) とよぶ．

スポットレートは，無リスクで運用できる短期資産の利子率であると考えられる．それゆえ 1 円を t から T までスポットレートで連続複利で運用することを考えた場合の t 時点の元利合計を $B(t)$ であらわすとすると，現時点 0 において $B(0)=1$ であり，元利合計の増加は

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)dt$$

であらわされるから，結局元利合計は上の式を積分することで

$$B(t) = e^{\int_t^T r(\tau)d\tau} \tag{2.17}$$

と表現することができる．つまり無リスク預金と考えることができる．

注意 7. 現実には，満期の比較的短い国債（あるいはそれに準ずる資産）の金利をもって，スポットレートとみなす．また無リスク預金といっても，現実に破綻の危険のない銀行は存在しないために，単純に銀行預金とみなすことはできないことにも注意しよう．

なおスポットレートは，デリバティブの価格を扱う場合に決定的に重要な役割をはたす．

2.8　フォワードレート

つぎに，$t < T < \tau$ として，将来時点 T からさらなる将来時点 τ までの (平均) 利回りを，(2.15) を参考にして

$$f(t,T,\tau) = -\frac{\ln\frac{v(t,\tau)}{v(t,T)}}{\tau - T} \tag{2.18}$$

と定義して，フォワード・イールドとよぶ．フォワード・イールドは割引債の先渡市場における利回りと考えることができる．

注意 8. 先渡市場が，不特定多数の取引者間の市場として組織化され，マージンを基礎とする決済システムをもったものが，先物市場とよばれる．理論的には，先渡 *(forward)* と先物 *(futures)* を区別する必要はない．

ここで，イールドからスポットレートを導いたのと同様に，$\tau \to T$ とおいて

$$\begin{aligned} f(t,T) &= -\lim_{h\to 0}\frac{\ln v(t,T+h) - \ln v(t,T)}{h} \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}\ln v(t,T) \end{aligned}$$

をフォワードレートという．なお極限において，

$$r(t) = f(t,t)$$

が成立する．

注意 9. すぐ上の式から

$$v(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds} \tag{2.19}$$

が成立するが，フォワードレートもスポットレート同様，市場で実際に取引される金融資産の金利でない．つまり割引債価格を厳密に知るためには将来におけるスポットレートの動向を知る必要があるが，先渡市場・先物市場の様々な金利から近似的にしか割引債の価格決定を取り扱うことができない．（ここに，ファイナンスの専門家のメシの種があったりする．）

さらに将来の金利変動に関する不確実性がない場合には，

$$r(T) = f(t,T), \quad (T > t)$$

が任意の時点 T で成立すると想定される．そのときに限って割引債による資金運用の元利合計が，無リスク預金とみなされる．なぜかというと，このとき *(2.19)* より

$$v(0,T) = e^{-\int_0^T r(s)ds}$$

となるが，無リスク預金は *(2.17)* であったから，結局

$$B(T) = \frac{1}{v(0,T)}$$

が成立するからである．

演習 7. 上の注意の中の最後の式の意味を考えよ．

演習 8.

$$y(t,T) = \frac{\int_t^T f(t,s)ds}{T-t}$$

が成立することを示せ．これにより，イールドとはフォワードレートの平均であることがわかる．

2.9 おわりに

以上，金利計算と称してファイナンスにおける中心概念である収益率と金融商品がどのように関連するかを，不確実性が存在しない世界で考えた．実は，明示的に示さなかったがこれまでのところに，無リスク・無費用で設ける機会は存在しないという「無裁定」の考え方がすでにいくつかの場面で登場している．

無裁定価格理論は現代ファイナンスにおいて中心となる考え方である．特に金融商品 (金融資産) の時間的変動を確率的変動として捉えて，複数の金融商品の間で裁定機会を排除することで金融商品間の価格の関係が確定する．

次章で，リスクを含む資産を取り扱う準備のために確率論を学ぶ．