

第1章 ファイナンスと数学

1.1 はじめに

この講義は、ファイナンスで使われる数学を解説する。前期（講義名ファイナンス数学Ⅰ）では、離散モデルを扱い、後期（講義名ファイナンス数学Ⅱ）では、連続モデルを扱う。具体的には、前期では2期モデルを用いてのリスク中立確率の考え方を中心すえて、2項モデルなどを扱う。また後期では、著名なブラック=ショールズ公式に代表される連続時間モデルにおけるデリバティブ（金融派生商品）の価格形成を扱う。

なお、本格的に講義を始める前に、基本的な事項を確認しておくことにする。

1.1.1 金融とファイナンス

ファイナンスは当然、金融の英訳語である *finance* のカタカナ読みである。しかし、昨今使われるファイナンスというカタカナ語は、日本語である金融とは若干異なるニュアンスで使われることが多い。金融は、一般に2つの意味で使われる。ひとつは、資金の融通を一般的に表す言葉。もう1つは、学問の名称をあらわす言葉である。ファイナンスというカタカナ語は、前者の意味に使われることより、後者の意味に使われることが多いと考えてよい。さらに言えば、ファイナンスを学術領域の名称とすると、金融工学に限定している場合もある。

当然、この講義の名称であるファイナンス数学は、学問の名称としての金融、それも金融工学に限定してのファイナンスにおいて使用される数学をとりあげる。

1.1.2 ファイナンスと経済学

ファイナンスは、金融それも金融工学に限定して考えた領域を念頭におくことが多いが、学科名称としての金融と経済学の関係について、混乱する学生も多いので、ここで少し整理を試みる。

金融 公的機関（中央政府・地方公共団体）以外の経済主体の資金調達・融通を中心に研究する。

経済学 財・サービスによる消費者の最大満足の達成を基準に、財・サービスの配分の仕組みを研究する。

財政学 公的機関（中央政府・地方公共団体）の資金調達、資金用途の決定の仕組みを研究する。

日本の大学において、伝統的にこれらの学術領域は、経済学部において一括して教えられることが多い。学会などでも日本国内での学術色の強い金融関連の学会は、経済学の学会にくらべて小規模であるし、金融を専門に研究する研究者も経済学者とよばれることに抵抗をもつ人も少ない（と思う）。これに対して、アメリカ合衆国では、金融は学問領域として確固としており、研究者の棲み分けもかなりはっきりしている。当然、*economics* と *finance* は、関連学問であるものの異なる学部を形成することが当然視される（日本で経済学部と商学部が、異なる学部として並存することが当然視されることと同様と考えればよいだろう。）

ちなみに、財政学も、徴税という資金調達方法をもつ政府部門の資金調達ならびに支出決定を研究する学問として、経済学と本来一線を画すべき学問であるが、伝統的に経済学部に関わり存在となっている。

財・サービスの入手は、市場を通じて行なわれる。よって物々交換(バーター)による取引がほとんど行なわれない近現代の経済システムにおいて、財・サービスの配分に資金の移動は当然ついてまわる(モノを買うときには、対価としての貨幣の支払いがあると考えるのが普通。)よって、経済学においても、資金の流れが経済主体の間で生ずることを強く認識するし、貨幣の需要や供給の決定の仕組みが、大きな問題となる。しかし、経済学において中心的な問題は、常に財・サービスの配分から生ずることに注意する必要がある。よって、誰が、どのような財の供給者、あるいは需要者であるか、そうした財の供給量・需要量がどのように決まるかは、非常に重要な問題である。また需要量と供給量が均衡するかないかという観点で分析を進めることが多い。

これに対して、金融においては、カネはカネでしかなく、どの経済主体が制度的に資金不足主体あるいは資金余剰主体であるかの区別は重要でない。ある状況である金融商品の売り手であった主体が、別の状況で買い手となることは、金融市場においては珍しくない。大雑把に言ってしまうと、様々な金融商品の間の相対価格、それぞれの利回り・利子率が、金融市場においていかに整合的に決定されるかのみ注目するのが、金融、とくにファイナンスの特徴である。

経済学と金融の違いに関して、次のように記憶しておくことよい。経済学は財を扱う。金融は金融商品を扱う。経済学で扱う財の中には市場取引の対象でないという意味で商品とはいえない財がある。一方、金融で扱う金融商品は、市場取引の対象であるが、財ではない。

1.1.3 ファイナンスと数学

ファイナンス数学というとき、金融工学で使われる数学を指す。実際、どのような種類の数学が使われるかを、あらかじめ明示しておくことも意味があろう。

1. 最適化数学
2. 線形不等式の理論
3. 確率論
4. 確率微分方程式
5. 数値計算法

1番目は、個別経済主体の最適資産選択の決定を扱う場合に使われる。これは解析学の一領域になっている。2番目は、ファイナンスにおいてもっとも重要な前提である無裁定を、離散モデルで解明するために便利である。これは、線形代数の一分野をなす。3番目は、金融を考えるときに避けて通れない不確実性をあつかうためのものである。金融における様々な金融商品の価格決定が、リスク中立確率で評価するときの期待値を通じて表現されることを学生諸君は学ぶはずである。さらに、連続時間でのモデルであつかわれるデリバティブ価格の決定において、用いられるのが4番目の確率微分方程式である。また、確率微分方程式を解くことが求められる場面では、往々にして解析的に解くことを放棄して数値的に解かざるを得ないことも多い。そのため、デリバティブの価格決定をコンピュータ上で実際的に扱うための、5番目の技法が必要となるのである。

1.2 金融入門

1.2.1 金融とは

金融とは資金の余っている主体から、資金が不足する主体に、資金を融通することで資金の過不足を調整することという。ここでの融通とは、一方的に資金を譲渡することではなく、将来の返金を前提に、資金余剰主体が資金不足主体に資金を渡すという、貸借を考えていることに注意しよう。

金融という行為が経済主体間で行なわれ、「経済の潤滑油」とよばれ経済活動を円滑にする理由を考えてみる。実は、金融を通じて経済主体が満足を達成する機会 (opportunity) を拡大する機能に注目して、そのように言われるのである。この点を少し詳しく考えてみよう。

1.2.2 金融の中核：貨幣

経済主体は、最終的に財・サービスを消費することにより満足を感じるが、他主体が所有する「自分が非常に欲する財」と、自分が所有する「それほど必要を感じない財」を、その主体と交換することで、満足を現状より高めることができる。ここに、交換・生産の動機が存在する。また、交換の相手を容易にみつける仕組みとしての市場の存在意義もこのことに端を発する。

しかし、人間が交換する財の範囲が広がるにつれて、それをまったく同時点に集めることが難しくなるだろう。作物・獲物によっては、収穫の時期が異なることもあるからである。この段階で、時点が異なる取引対象を交換の俎上にのせるにはどうすればよいか。相手が信用のおける人間であれば、「次の取引には俺 (甲) はお前 (乙) の獲物 A を X だけもらうから、今回は俺の作物 B を Y だけもって行ってよい」として、次回に獲物 A を X もらえばよい。下賤な言葉で言えば、ツケにしたことになるし、別の若干高級な言い方をすれば甲は乙に信用を与えたということになる。貸借関係が甲と乙に発生したとも言える。ここで、この取引をしたことを証拠だてるものを乙が残せば、それが「借用証書」といえる。(乙による借用証書の発行!) この「借用証書」が手元に残った甲が、別の丙という主体との取引にこの「借用証書」が使えたらどうだろうか。それは、単なる物々交換以上に経済主体の取引の可能性を高めることになる。

問題はそうした「借用証書」を誰もが引き受けるかである。そうした誰もが引き受け、かつ価値の尺度をはっきりさせ、決済にも便利な「借用証書」が流通するシステムが近代以降の金融システムなのである。¹どこの馬のホネとも分からない人間が発行した「借用証書」を受け取るアホウは、あまりいないだろう。²

誰もが信用できる発行主体の「借用証書」のみが、一般受容性を持って、交換の媒体として機能することが予想される。この「誰もが信用できる発行主体」こそ銀行であり、それが発行する「借用証書」が現代の貨幣なのである。これにより経済主体間での財・サービスの取引にともなう資金の移動を、経済主体のもつ銀行部門の債権の増減としてとらえることが可能になる。例えば、財・サービスの売り手が、売却代金として現金をえることは、その売り手のもつ中央銀行に対する債権が増加することになる。またその売り手が、自らが預金口座をもつ銀行振り込みにより売却代

¹ 価値保蔵といっても、結局異なる時点の取引を保証するものであれば、当然付随するものであり、ここでは取り立て重視はしない。

² このような「借用証書」は実は無意味ではない。実際、手形というものはこうした馬のホネが第三者への流通を前提として発行する「借用証書」である。手形決済については、青木雄二によるマンガ『ナニワ金融道』(講談社)が参考になる。

金をえることは、市中銀行に対する債権が増加するになる（買い手の場合は、財・サービスの入手にともない、銀行部門に対する債権が減少することに注意。）

中央銀行の発行する現金通貨という一般人にわかりやすい貨幣に加えて、銀行預金が現代の金融システムにおいて貨幣の中核をなす理由もここにある。

1.2.3 貨幣以外の金融商品

現代の金融は、次のような特徴をもつと考えられる。

貨幣経済 中央銀行ならびに市中銀行を中核とする貨幣供給システムを金融の中核とする。

金融市場の拡大 経済の規模の拡大にともない、より大きな余剰資金と、資金不足が生じている。

金融市場のボーダーレス化 国内で吸収しきれない余剰資金は海外の投資先に向かい、国内で調達しきれない資金不足は海外市場での調達を目指す。

金融システムの多様化 金融システムは、あらゆる側面で多様化・複雑化をとげている。

リスクの拡大 これは、昔にくらべてリスクが増大したという意味ではなく、金融市場でヘッジの対象となるリスクの範囲が拡大したという意味である。

金融商品の多様化 人々がより多様なリスクをヘッジしたいという欲求が高まるのに呼応して、多くの金融商品が開発されてきた。

金融機関の多様化 金融仲介業・ブローカー業は、金融商品の多様化、決済システムの複雑化にともなって、多様な営業形態をもつようになり、特別なサービスに特化する機関も増加している。

投機の拡大 金融の進歩は一面では、リスク・ヘッジ技術の進歩である。もう一方では、その技術を知らない主体がいる場合裁定が生じやすくなり、投機の大きな誘引になる。株式や債券のオプションは本来ヘッジ目的で開発されたが、投機に用いられるとき、非常に大きなレヴァレッジ効果（少ない資金で大きな収益を得る）をもつ。

貨幣は金融取引の中核をなすが、現代の金融システムは複雑であり、さまざまな金融商品・有価証券が取引される。これらは、取引形態から現物取引による金融商品と、そうした金融商品から派生する金融商品（デリバティブ）に大別される。

1. 現物取引

- (a) 株式取引
- (b) 為替取引
- (c) 債券取引

2. 先物取引・オプション取引

- (a) 商品先物
- (b) 株式先物
- (c) 為替先物
- (d) 債権先物

- (e) 株式オプション
- (f) 債権オプション
- (g) その他

注意 1. ここで現物取引・先物取引と区別しているのは、有価証券取引におけるカテゴリである。資金移動（キャッシュ・フローの発生）に関して原理的に定義される、現物取引・貸付取引・先物取引の区別を目的とはしていない。

1.2.4 金融取引の本質

金融取引は、経済主体間で資金の過不足を補い合う行為である。友人間でお金の貸し借りから、銀行が企業に対して行なう融資、株式という形の企業活動資金を出資などは金融取引の例である。基本的に貸付取引あるいは先物取引のように、契約時点・資金移動時点・決済完了時点が、ある期間にまたがって行なわれることに特徴がある。これらは、すでに述べた通貨単位で契約がおこなわれるのが普通である。貨幣には、よくいわれるように、以下の機能が備わっているためである。

- 交換手段
- 価値尺度
- 決済手段
- 価値保蔵手段

交換手段としての意味は、物々交換のように相対の取引相手を探す手間・コストを劇的に軽減する点に注目すれば明らかであろう。預金通貨にしる現金通貨にしる決済を終了させる資金移動が保証されている³。価値尺度も説明の必要はないであろう。

貸付取引は、契約時点と決済完了時点が同時点となる現物取引と異なり、契約時点（現在）と決済完了時点（ある将来時点）が分かれる。その場合、時間を通じて価値が減少とみなされるものは、交換手段にならないし価値尺度としてもふさわしくないと人々は考える。

さらに、将来に対する不確実性の存在から、単に異時点間の取引可能性を拡大するための貸付取引以外の金融取引が、歴史的に必要とされるようになりさまざまな金融商品市場が形成されてきた。そうした市場は、ある主体にとってはヘッジ目的で、ある主体にとっては投機目的に利用される。言葉を換えれば、リスクを分散させるという機能を金融取引を提供するのである。リスク分散を目的とする市場として典型的なものは、保険市場である。

金融取引は、経済主体間の資金の融通行為である。相対で行なわれる場合もあれば、不特定多数の主体が参加する市場における有価証券の発行・購入を通じて行なわれることもある。金融取引は、貸付取引の場合異時点間取引の機能によって、経済主体の活動機会を拡大する。さらに金融市場は、将来の不確実性が避けられない場合においても、危険を分散させる機能をもつ。

³何人も現金による決済を拒否することはできないと日銀法で定められている。

注意 2. 金融において、信用供与 (与信)、信用授受 (受信) という言葉が使われることがある。一定の期間、一定額の資金の利用を許容することを信用供与という。逆に利用を許容されることを信用授受という。

銀行の融資は当然、与信・受信が発生するが、商品のツケ払いの場合にも発生することに注意しよう。ある製パン会社が製粉会社から原料として小麦粉を購入したとしよう。この場合代金の支払いを一ヶ月後にするという契約だったとすると、製粉会社は製パン会社に代金分の信用を供与したことになる。なぜなら、製パン会社は一ヶ月間は代金だけの金額を別の用途に使えるからである。これに対して、製パン会社が代金支払いの資金を銀行から融資してもらう場合、信用を供与する主体は銀行となる。受信主体である製パン会社にとっての経済効果は同一であることに注意しよう。

ただし、会計上は、前者の場合は製パン会社の負債項目における買掛金増と製粉会社の資産項目の売掛金増、後者の場合は製パン会社の負債項目における借入金増と銀行の資産項目における貸付金増、という違いはある。

1.2.5 講義内容

ファイナンス数学 I, とファイナンス数学 II では以下のような講義内容を予定している。

1. 金利計算：単利と複利，連続複利
2. 不確実性
3. 確率論入門
4. 資産選択（平均・分散分析）
5. 離散モデルによる市場価格決定（分離定理の応用）
6. リスク中立確率
7. 2項モデルによるデリバティブ価格決定
8. ウィーナー過程（ブラウン運動）
9. 確率積分
10. 伊藤の公式
11. オプション価格決定モデル
12. ブラック・ショールズ公式
13. デリバティブ価格決定の一般公式
14. 数値計算

7番目の2項モデルくらいまでが、いわゆる離散モデルによる分析であり、そこまでをファイナンス数学 I の範囲とする。8番目以降は、連続形のモデルによる分析であり、内容もやや高度になる。（歴史的には、デリバティブの価格決定理論では連続形のほうが先に登場している。）