

第4章 資産選択理論

4.1 はじめに

確率論の基礎を学ぶとき、確率論は金融商品の将来価格や収益率の不確実性を表現するために有効であることを指摘した。さらに、確率論によるアプローチは、金融資産のもつ危険を回避する手段を探す場合にも有用である。

1950年代、後のノーベル経済学章受賞者となるマルコヴィッツによって考案された資産選択に関する平均・分散理論は、単純な枠組みながら資産選択における危険を明確に規定した上で、ある一定の収益率を保証する資産選択の中で、もっとも危険が小さくなる資産選択の性質を明確にした。

マルコヴィッツの考案した資産選択の考え方は、様々な方向に拡張されファイナンスにおける大きな研究分野を占めることになった。実は、この講義で扱うデリバティブの価格決定の理論もヘッジを基礎としているという意味で、デリバティブの需要者の資産選択理論を含んでいるといえるのである。

さて、事前には収益率が確定しない様々な投資対象に直面するとき、投資家は投資対象が、当たれば得も大きい外れれば損が大きいか、あるいは高い収益は見込めないが大損はしないかを考慮して、自分の資産を様々な投資対象に充て、もっとも望ましい資産を構成しようとするだろう。ここでは、資産選択の理論のごく初歩を、制約条件付きの最適値問題との関連で解説する。

以下では経済主体は自らの富が大きければ大きいほど満足が高いという状況を前提に話を進める。

4.2 不確実性の数学的表現

将来の富が不確実であることをどのように表現したらよいのだろうか。例えば、ある会社の株を所有すると、その会社が挙げた利益からの配当と、株の値上がりによる株価値上がり益 (capital gain) による富の増加が生ずると考えられる。しかし、会社の業績は将来にわたって不確実であり、1年後業績不振で配当はゼロ、さらに株価も急落という憂き目にあうかもしれない。その一方で業績絶好調で配当も増加し、株価も急上昇で保有株式の価値は上がるかもしれない。

以上のような状況は、確率変数によって表現される。具体的には、将来の値(もしくは値のとり範囲)とそれが生起する確率を対にして考える。ある投資信託物件の税引き後の利回り R が、5パーセント以上になる確率、3パーセント以上になる確率、1パーセント以下になる確率等々を、考えることによって、投資信託の収益率の将来の変動を総合的に考慮するわけである。数学的には R を確率変数とみて、その分布関数 $F(x)$ あるいは確率密度関数 $f(x)$ を考える。ここで分布関数は

$$F(x) = Pr(R \leq x)$$

を表す。すでに学んだように確率密度関数は分布関数を微分したものである。すでに学んだように確率分布関数は0と1の間の値をとる単調非減少関数となる。

さらに、ある投資信託物件と別の資産対象の利回りは逆の動きを示す傾向があるかもしれない。逆に同じ動きを示す傾向があるかもしれない。例えば、ある投資信託物件の利回りは、米国債価格と非常に同じような動きをすることが過去の観察からわかっているとすると、二つの利回り R_A と R_B は互いに独立でない確率変数として表現される。

4.3 不確実性下の合理的行動

不確実性のない世界においては、人間の富の量という一次元の量に関して、多ければ多いほどよいと想定するのが自然であり、そのことに大抵の経済学者は異論は挟まない¹。数学的には、効用が富の増加関数であるとすればよい。そこに、選択の問題として困難な点は、ほとんどない。なぜなら可能な選択肢の中から、一番値の大きなものを選べばよいからである。

これに対して、不確実性のある世界では、4.2節で書いたように富は、確率変数として表現される。つまり、ある富は選択肢として、平均値は大きい、分散（あるいはその平方根である標準偏差）も大きく、最終的に得られる富の値のバラツキが大きいかもしれない。その場合、経済主体はそうした富を持つことにリスク（危険）を感じるであろう。それに対し、平均値はそれほど大きくはないが、分散が小さな富を、経済主体はリスクがない、安定した選択対象と感じるかもしれない。そのように考えると、確率変数として表現される富を評価する基準が、この段階で示されていないことに気づく。

注意 1. もし、確率変数としての富の期待値の順に富を並べることになると、確率 $1/2$ で 1 万円を受取り、確率 $1/2$ で 9000 円を支払う富（ギャンブル？）と確率 1 で 1000 円受け取る富（資産運用？）は同じ評価になるが、学生諸君は、自分自身がその 2 つを評価して本当に同じ評価を下すだろうか。

不確実性に関しては、実は経済学者がそれを扱い出す以前に、数学者が確率論の範囲で考えていた。しかし、経済学でも使える形の分析枠組みを提供したのはフォン・ノイマンである。彼はゲーム論の枠組みの中で不確実な選択基準を示した。具体的には、確率分布の集合 S の上に定義される選好関係 \succeq の上に、いくつかの公準を想定すると、必然的にそこでの望ましさは、効用の期待値の順番として表現されることを、数学的に証明した²。

定義 1. 集合 S の上の 2 項関係 \succeq は

全称律 任意の $a, b \in S$ に対して $a \succeq b$ か $b \succeq a$

推移律 任意の $a, b, c \in S$ に対して、 $a \succeq b$, $b \succeq c$ ならば $a \succeq c$

をみたすとき、順序とよばれる。

定義 2. 集合 S の上の順序 \succeq について

$$a \succeq b \text{ かつ } b \succeq a$$

であるとき、 a と b は無差別であるといい、

$$a \sim b$$

と記す。

Herstein-Milnor は、

¹もちろん、満足が飽和するような選好を可能性として否定することはできない。

²以下、Herstein-Milnor による最もエレガントな再定式化を基礎に解説する。

定理 1. 確率分布の集合 S の上の順序 \succeq が

1. 任意の $a, b \in S$ に対して実数の 2 つの集合 $\{ \lambda \mid \lambda a + (1 - \lambda)b \succeq c \}$ と $\{ \lambda \mid c \succeq \lambda a + (1 - \lambda)b \}$ がともに閉集合 .
2. 任意の $a, a', b \in S$ に対して, $a \sim a'$ ならば $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \sim \frac{1}{2}a' + \frac{1}{2}b$.

であるとき, 集合 S から実数の線形関数 u で

$$a \succeq b \iff u(a) \geq u(b)$$

が存在する .

上の定理は, 結果の分布関数の間の選好関係にいくつかの公理をおくと, 分布関数の選好は, 結果の効用の期待値として表現されることを意味する!

この期待効用理論は, 不確実性を扱う多くの経済理論あるいはファイナンスの理論において, 期待効用仮説として理論の前提としておかれる . ここでも, それにしたがう . つまり金融商品の不確実な, 将来価格あるいは収益率をあらわすと想定される確率変数 X と Y が与えられたとき, 値に関して単調増加な効用関数 $u(\cdot)$ を考え,

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

であるとき, またそのときに限って, X は Y よりも選好されると考えるのである .

注意 2. 効用の期待値 $E[u(X)]$ と, 期待値の効用 $u(E[X])$ は異なるものであることに注意しよう .

さらに, 効用関数 u の形状に関しては特に限定されることはない . 個人によっては, 「富の限界効用が逓増する」ような選好をもつことを期待効用理論は許容するのである .

この期待効用理論に基づく資産選択の一般理論の展開は, この章の最後で行なう .

注意 3. 期待効用理論によると, 確率は将来事象に関する各主体の選好から構成されると考えられる . つまり, 最初に各主体の起こりやすさに関する主観的判断ありきという立場である . よって, 主体がもつ将来事象に関する確率判断は異なることを許容することになる .

この考え方は, 長期的な観察に基づいて客観的な確率的な判断ができない場合にも確率論を応用することができる反面, 主体間で異なる確率判断があるとき, 市場における分析が難しくなる可能性がある .

以下では, 次のように仮定する .

仮定 1. 市場に参加する投資主体の間で, 将来事象に関する確率判断は共通である .

この仮定は, 非常に強い仮定である (主観確率論としての期待効用理論の利点を無視することになる仮定であるともいえる .) この仮定により, 主体間の将来事象に関する選好の違いは, 期待効用を計算する際の効用関数の形状の違いだけだと考えることができる .

4.4 資産選択の平均・分散アプローチ

マルコヴィッツは、すぐ前の節の期待効用仮説に加えて、限定的な想定をおくことで、金融資産選択の問題を扱いやすい形にすることができることを示した。それは、確率変数で示される富の期待値と分散にのみ期待効用が依存するという枠組みである。以下、それを解説する。

さて不確実な将来の富の額 W は、確率変数とする。 $\bar{W} = E[W]$ と表わす。効用関数 $u(W)$ を期待値 \bar{W} の回りでテイラー展開をすると

$$u(w) = u(\bar{W}) + u'(\bar{W}) \cdot (w - \bar{W}) + \frac{1}{2}u''(\bar{W}) \cdot (w - \bar{W})^2 + S \quad (4.1)$$

S は高位の項とまとめて記したものである³。これに確率変数 W を代入し、両辺の期待値をとると、

$$E[u(W)] = u(\bar{W}) + \frac{1}{2}u''(\bar{W}) \cdot \text{Var}(W) + E[S] \quad (4.2)$$

もし高位の項 $E[S]$ が無視し得るなら、将来富の望ましさは、期待値と分散 $\text{Var}(W) = E[(W - \bar{W})^2]$ に依存し、期待値が高いほど望ましく、 $u''(\bar{W})$ が負かゼロか正かに従って、分散が小さいほど望ましいか、関係ないか、分散が大きいほど望ましいかに、分類される。

マルコヴィッツは、 $E[S]$ の項が無視できる二つの可能性を考えた。

注意 4. 現実の資産選択状況において、マルコヴィッツが考える状況が起こるとは考えにくい。よって、以下の2つの可能性は、あくまで効用の期待値が高いほうが望ましいという選好が、期待値と分散の2つの変数の選択に帰着されることが、有効な「近似」となる可能性をさぐったものだと解釈したほうがよい。

4.4.1 効用関数が二次式

将来富 W は期待値と分散が存在するような確率変数であるとする。それぞれを \bar{W} と σ_W^2 と記す。効用関数が

$$u(w) = w - \frac{b}{2}w^2, \quad b > 0$$

とする、このとき $0 \leq w \leq 1/b$ の範囲で、 u は増加関数となる。これは明らかに $S = 0$ である。このとき

$$E[u(W)] = \bar{W} - \frac{b}{2}(\sigma_W^2 + \bar{W}^2)$$

で表わされる。

4.4.2 将来富の分布が正規分布

将来の富 W の確率分布が都合よく正規分布となるなら、将来の富 W の分布は期待値 \bar{W} と分散 σ_W^2 のみによって定まる。このとき効用関数 $u(\cdot)$ を任意に与えたとき、期待効用は明らかに \bar{W} と σ_W^2 の2つのパラメータだけに依存することに注意しよう。

³これは W の項を含むという意味で確率変数である。

今 $W \sim N(\bar{W}, \sigma_W^2)$ であるから,

$$z = \frac{W - \bar{W}}{\sigma_W}$$

とおくと, $z \sim N(0, 1)$ であるから

$$E[u(W)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(\bar{W} + \sigma_W z) \phi(z) dz$$

と表わされる。ここで, $\phi(z)$ は標準正規分布の確率密度関数である。

このとき

$$\frac{\partial E[u(W)]}{\partial \bar{W}} = \int_{-\infty}^{\infty} u'(\bar{W} + \sigma_W z) \phi(z) dz$$

となり, 若干面倒な部分積分の評価を通じて

$$\frac{\partial E[u(W)]}{\partial \sigma_W} = \int_{-\infty}^{\infty} u''(\bar{W} + \sigma_W z) \phi(z) dz$$

が言える。後者は, $u'' < 0$ のとき, マイナスの値をとる。以上により, 経済主体にとって, 富の期待値は望ましさの尺度, 富の分散あるいは標準偏差は (避けるべき) リスクの尺度とみなせる。

4.4.3 ポートフォリオ理論の枠組み

以上の平均・分散アプローチを使って, 複数の投資対象の収益率の期待値と分散・共分散が与えられているとき, 望ましい資産選択についての性質を明らかにすることができる。

今投資対象が n 種類あるとしよう。現在 w_0 だけの価値の確定的な資産を持つ経済主体がそれらの投資対象にどれだけの金額を振り向けるかを考える。ここで, 第 i 投資対象の粗収益率を R_i を記すことにする。これは, 第 i 投資対象を 1 円所有していれば, 将来元利合計で R_i 円になることを意味する。⁴ただし, R_i は確率変数とする。二つの投資対象は互いに統計的に独立ではなく, 片方が高いときにはもう一方も高くなる確率が高いという関係があるかもしれない。これは, 二つの確率変数の共分散の大きさを測ることができる。収益率のベクトルを $\mathbf{R} = {}^t(R_1 \ R_2 \ \dots \ R_n)$ と記す。収益率ベクトルの期待値を $\mu = {}^t(\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n)$ とし, 分散共分散行列を V で表わす。 V の ij 要素を σ_{ij} と書き, 投資対象 i と投資対象 j の共分散を示す。つまり

$$\mu_i = E[R_i], \quad (i = 1, \dots, n) \tag{4.3}$$

$$\sigma_{ij} = Cov[R_i, R_j], \quad (i, j = 1, \dots, n) \tag{4.4}$$

ポートフォリオとは,

$$w_0 = \sum_{i=1}^n y_i$$

⁴つまり, ここでは粗収益率をあつかう。

を満たす n 次元ベクトル $\mathbf{y} = {}^t(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$ のことを指す。ポートフォリオ $\mathbf{y} = {}^t(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$ を選択すると、将来

$$\sum_{i=1}^n R_i y_i = {}^t \mathbf{y} \mathbf{R}$$

を得る。これは確率変数であることに注意しよう。資産の構成を変更すると、将来富が確率変数として様々に変化することがポイントである。

今、 w_0 を 1 として、1 円の資産を n 種類の金融商品に分割して保有することを考える。その保有額を x_i , ($i = 1, \dots, n$) と記すことにする。このとき、

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

になっている。その形態で保有される資産の粗収益率は、 $\sum_{i=1}^n x_i R_i$ という n 個の確率変数の加重平均で表現された確率変数である。この期待値は

$$E\left[\sum_{i=1}^n x_i R_i\right] = \sum_{i=1}^n x_i E[R_i] = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i$$

である。また、その分散は

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i R_i\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i R_i - E\left[\sum_{i=1}^n x_i R_i\right]\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i R_i - \sum_{i=1}^n x_i \mu_i\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i (R_i - \mu_i)\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)] x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}[R_i, R_j] x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

注意 5. 収益率ベクトルの共分散行列は対称行列である。つまり

$${}^t V = V$$

を満たす。

4.4.4 ポートフォリオ選択の考え方：平均分散分析

ポートフォリオ選択はマーコヴィッツによって、二段階に分けられたと考えるべきである。それは、

1. 期待収益を所与としたとき，分散あるいは標準偏差を最初にするポートフォリオを求める
2. 上の段階で求めたポートフォリオの中で，各経済主体は自分の選好にてらして最も好むものを選ぶ。

第一段階は，リスクの最小化は危険回避的な選好をもつどの経済主体にとっても望ましいと考えるためである。第二段階は，個人の危険への選好の度合によって定まる部分が多い。普通，ポートフォリオ分析というとき，第一段階，つまりフロンティア・ポートフォリオの導出を指す。

さて，ポートフォリオの期待収益の値を \bar{r} とするとき，フロンティア・ポートフォリオの導出は次の2次計画問題となる。

$$\text{minimize} \quad \frac{1}{2} {}^t \mathbf{y} V \mathbf{y} \quad (4.5)$$

$$\text{subject to} \quad {}^t \mathbf{y} \boldsymbol{\mu} = \bar{r}, \quad {}^t \mathbf{y} \mathbf{1} = 1 \quad (4.6)$$

ここで $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$ というすべての要素が1となる n 次元列ベクトルである。

注意 6. 制約式は，それぞれ

$$\sum_{i=1}^n y_i \mu_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1$$

を意味することに注意せよ。

また目的関数は， y_i に関する2次式となり，微分可能な関数であることに注意せよ。

今，ラグランジュ関数を作ると

$$L(\mathbf{y}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{y} V \mathbf{y} + \lambda_1 (\bar{r} - {}^t \mathbf{y} \boldsymbol{\mu}) + \lambda_2 (1 - {}^t \mathbf{y} \mathbf{1}) \quad (4.7)$$

必要条件は，

$$\frac{\partial L}{\partial {}^t \mathbf{y}} = V \mathbf{y} - \lambda_1 \boldsymbol{\mu} - \lambda_2 \mathbf{1} = {}^t \mathbf{0} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \bar{r} - {}^t \mathbf{y} \boldsymbol{\mu} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - {}^t \mathbf{y} \mathbf{1} = 0 \quad (4.10)$$

(4.8) から

$$\mathbf{y} = \lambda_1 V^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 V^{-1} \mathbf{1} \quad (4.11)$$

(4.11) に左から ${}^t \boldsymbol{\mu}$ を掛け， ${}^t \mathbf{y} \boldsymbol{\mu} = \bar{r}$ を使うと

$$\bar{r} = \lambda_1 {}^t \boldsymbol{\mu} V^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 {}^t \boldsymbol{\mu} V^{-1} \mathbf{1} \quad (4.12)$$

を得る．

一方 (4.11) に左から ${}^t\mathbf{1}$ を掛け、 ${}^t\mathbf{y}\mathbf{1} = 1$ を使うと

$$1 = \lambda_1 {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mu + \lambda_2 {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mathbf{1} \quad (4.13)$$

(4.12) と (4.13) により、 λ_1, λ_2 に関する

$$\begin{pmatrix} {}^t\mu V^{-1}\mu & {}^t\mu V^{-1}\mathbf{1} \\ {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mu & {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

という 2 元連立方程式が得られる．係数行列の非対角要素は同じ値になっており、これらを

$$A = {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mu$$

とする．また係数行列の左上の要素を

$$B = {}^t\mu V^{-1}\mu$$

右下の要素を

$$C = {}^t\mathbf{1}V^{-1}\mathbf{1}$$

書く．係数行列の行列式は

$$D = BC - A^2$$

である．

注意 7. ここで、 $D = BC - A^2 > 0$ である．なんとなれば、正の定符号をもつ行列 V の逆行列 V^{-1} も正の定符号をもつから、これと $\mathbf{x} = A\mu - B\mathbf{1}$ から作る 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}$ は正の値をもつが、実際に展開してみると

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x} &= (A^t\mu - B^t\mathbf{1})V^{-1}(A\mu - B\mathbf{1}) \\ &= B(BC - A^2) > 0 \end{aligned}$$

$B > 0$ は明らかだから、 $BC - A^2 > 0$

この連立方程式は、 A, B, C, D と \bar{r} を用いて

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r}C - A}{D}$$

$$\lambda_2 = \frac{B - \bar{r}A}{D}$$

のように解ける．これらを (4.11) に代入すると、最適なポートフォリオ \mathbf{y} が

$$\mathbf{y} = \frac{\bar{r}C - A}{D}V^{-1}\mu + \frac{B - \bar{r}A}{D}V^{-1}\mathbf{1} \quad (4.15)$$

この式を \bar{r} に関して整理すると

$$\mathbf{y} = \mathbf{g} + \bar{r}\mathbf{h}$$

という \bar{r} に関する一次式になる．ここで

$$\mathbf{g} = \frac{B(V^{-1}\mathbf{1}) - A(V^{-1}\boldsymbol{\mu})}{D}, \quad \mathbf{h} = \frac{C(V^{-1}\boldsymbol{\mu}) - A(V^{-1}\mathbf{1})}{D}$$

である．

最適ポートフォリオを求めるには，各 \bar{r} の水準に対応する ${}^t\mathbf{y}V\mathbf{y}$ を計算すればよい．つまりある期待収益率水準をもたらすポートフォリオのうちリスクを最小にした場合の収益率の分散である．この分散を σ_y^2 と書くことにする．

\mathbf{y} は分かっているから，厄介な計算の後

$$\sigma_y^2 = {}^t\mathbf{y}V\mathbf{y} = \frac{C\bar{r}^2 - 2A\bar{r} + B}{D} \quad (4.16)$$

を得る．

演習 1. σ_y^2 を導出せよ．

式 (4.16) は $\sigma_y^2 - \bar{r}$ 平面における放物線を表現している．

式 (4.16) を

$$\frac{\sigma_y^2}{1/C} - \frac{(\bar{r} - A/C)^2}{D/C^2} = 1 \quad (4.17)$$

と変形すれば， σ_y を平方根として最適ポートフォリオの標準偏差とすると， $\sigma_y - \bar{r}$ 平面では，双曲線となる．この双曲線をポートフォリオ・フロンティアという．この双曲線の漸近線は

$$\bar{r} = A/C \pm \sqrt{D/C}\sigma_y$$

となる．

また，ポートフォリオ・フロンティア上の点に対応するポートフォリオをここではフロンティア・ポートフォリオとよぶ．

リスクの指標である分散（あるいは標準偏差）を最小にするポートフォリオを MVP (minimum variance portfolio) という．これは， $\sigma_y - \bar{r}$ 平面で点 $(\sqrt{1/C}, A/C)$ に対応するポートフォリオである．この点より上の双曲線部分（有効ポートフォリオ・フロンティアとよぶ）に対応するポートフォリオは有効ポートフォリオとよばれ，資産選択の対象となる．

注意 8. 同じ値の分散（あるいは標準偏差）に対して，2つフロンティア・ポートフォリオが存在し，一方は高い期待収益率をもちもう一方は低い期待収益率をもつ．

演習 2. MVP より下の双曲線部分が資産選択の対象となれない理由を考えよ．

4.5 最適ポートフォリオの性質

ここでは、前の節で求めたフロンティア・ポートフォリオの性質をまとめる。

命題 1. g と $g + h$ もフロンティア・ポートフォリオである。

これは $y = g + \bar{r}h$ に注意すると、それぞれ $\bar{r} = 0$ 、 $\bar{r} = 1$ に対応していることから明らか。

命題 2. 任意のフロンティア・ポートフォリオは、 g と $g + h$ のアフィン結合で生成される。

これは、 \bar{r}_0 に対応するポートフォリオは

$$y_0 = g + \bar{r}_0 h$$

であるが、これは

$$y_0 = (1 - \bar{r}_0)g + \bar{r}_0(g + h)$$

と書ける。よって命題は示された。

ここでの論法は、相異なる 2 つのフロンティア・ポートフォリオを考えても成立する。

命題 3. 任意のフロンティア・ポートフォリオは、相異なる二つのフロンティア・ポートフォリオのアフィン結合で生成される。

演習 3. なぜかを考えよ（証明は容易である。）

注意 9. この命題は、効率的ポートフォリオを張るためには、たった 2 つの効率的ポートフォリオのみが必要であることを意味する（計算量が非常に少なくすむことを保証する。）

演習 4. 2 つのフロンティア・ポートフォリオがあれば、それらが有効でなくても効率的ポートフォリオ・フロンティアが構成できることに注意せよ。

命題 4. (MVP と異なる) 任意のポートフォリオと最小分散ポートフォリオ MVP の共分散は、 MVP の分散に等しい。

MVP とは異なる任意のポートフォリオを、比率 $\alpha : (1 - \alpha)$ で保有するポートフォリオを考える。 $(\alpha$ は負でもよい。) MVP の分散を σ_{MVP}^2 、もう一方のポートフォリオの分散を σ_0^2 、共分散を $Cov(y_0, y_{MVP})$ と書くことにすると、アフィン結合で作られたポートフォリオの分散は

$$\alpha^2 \sigma_0^2 + 2\alpha(1 - \alpha)Cov(y_0, y_{MVP}) + (1 - \alpha)^2 \sigma_{MVP}^2$$

と表される。これは $\alpha = 0$ のとき MVP の定義より最小になる。

よって上の式を α で微分してゼロとおいた α についての方程式が $\alpha = 0$ を解として持つ条件は、その方程式に $\alpha = 0$ を代入して得られた条件が我々の求める、

$$Cov(y_0, y_{MVP}) = \sigma_{MVP}^2$$

である。(証明おわり)

上の命題は、次にのべる命題の特殊な場合である。

命題 5. 期待収益率を $r_1 \neq r_2$ とする 2 つの効率的ポートフォリオの y_1 と y_2 の共分散は ${}^t y_1 V y_2$ と表される．具体的な値は

$$\frac{C r_1 r_2 - A(r_1 + r_2) + B}{D}$$

証明は，g, h の定義を使って，計算すればよい．

命題 6. フロンティア・ポートフォリオのアフィン結合はフロンティア・ポートフォリオである．また，有効ポートフォリオの凸結合は有効ポートフォリオである．

前半は，容易．後半は，有効ポートフォリオはその期待収益率が MVP の期待収益率 A/C を上回るフロンティア・ポートフォリオであることを考慮すれば簡単にわかる．

演習 5. 上の命題を証明せよ．

4.6 ポートフォリオ分割定理：安全資産 vs 危険資産

以上は，危険がゼロになることはないことを前提とした議論である．つまり，収益率の分散がゼロになるような投資対象はないと仮定して議論を展開してきた．マルコヴィッツの理論で興味深いのは，分散ゼロの安全資産とそれ以外の資産に関して資産選択の問題を考えるとポートフォリオ分割定理という資産選択に関するガイドラインが得られることである．

これには，これまでの n 種類の危険な投資対象という枠組みに加えて， $n+1$ 番目の投資対象として危険がゼロで収益率が r_0 で固定されているものを考える．

その場合， $n+1$ 種類の投資対象についての構成比の和が 1 となる．ポートフォリオの収益率は

$$r_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n y_i\right) + \sum_{i=1}^n R_i y_i = r_0 + \sum_{i=1}^n (R_i - r_0) y_i$$

であるから，期待収益率と分散はそれぞれ，

$$r_0 + \sum_{i=1}^n (\mu_i - r_0) y_i \tag{4.18}$$

$${}^t y V y \tag{4.19}$$

最適問題は，

$$\text{minimize} \quad \frac{1}{2} {}^t y V y \tag{4.20}$$

$$\text{subject to} \quad ({}^t \mu - r_0 {}^t \mathbf{1}) y = \bar{r} - r_0 \tag{4.21}$$

となる．

このとき，ラグランジュ乗数法から導かれる必要条件は，

$$V y - \lambda (\mu - r_0 \mathbf{1}) = \mathbf{0} \tag{4.22}$$

$$({}^t\mu - r_0 {}^t\mathbf{1})\mathbf{y} = \bar{r} - r_0 \quad (4.23)$$

(4.22) から

$$\mathbf{y} = \lambda V^{-1}(\mu - r_0 \mathbf{1}) \quad (4.24)$$

を得る．これを，(4.23) に代入して λ について解くと

$$\lambda = \frac{\bar{r} - r_0}{{}^t(\mu - r_0 \mathbf{1})V^{-1}(\mu - r_0 \mathbf{1})} \quad (4.25)$$

となる．特に分母を F とおくと

$$F = {}^t(\mu - r_0 \mathbf{1})V^{-1}(\mu - r_0 \mathbf{1}) = B - 2r_0 A + Cr_0^2$$

である．これで最終的なフロンティア・ポートフォリオの条件

$$\mathbf{y} = \left(\frac{\bar{r} - r_0}{F} \right) V^{-1}(\mu - r_0 \mathbf{1}) \quad (4.26)$$

が得られる．このときポートフォリオ収益率の分散 σ^2 を求めると

$$\sigma^2 = \frac{(\bar{r} - r_0)^2}{F} \quad (4.27)$$

演習 6. 実際に，(4.26) から σ^2 を求めよ．

上の式を標準偏差に関する 2 本の直線をあらわすと考えると， $\sigma - \bar{r}$ 平面において，傾き $\pm\sqrt{F}$ の切片 r_0 半直線である．

いわゆるポートフォリオ分割定理が成立するのは，

$$r_0 < \frac{A}{C} \quad (4.28)$$

の場合である．この場合 4.4.4 節で示した MVP に対応する期待収益率が安全資産の収益率を上回っていることに注意しよう．

効率的ポートフォリオ・フロンティアは，実は上の場合標準偏差・平均平面において危険資産のみからなる効率的ポートフォリオフロンティアに対応する双曲線に対して接するように安全資産を示すポートフォリオから延ばした直線に対応している．

双曲線上の接点に対応するポートフォリオを接点ポートフォリオ (tangent portfolio) といい，安全資産を含まないことから， ${}^t\mathbf{1}\mathbf{y} = 1$ より

$$\mathbf{y}^T = \frac{1}{A - r_0 C} V^{-1}(\mu - r_0 \mathbf{1}) \quad (4.29)$$

としてもとめられる．

すべての効率的ポートフォリオは，安全資産と接点ポートフォリオのアフィン結合によって複製できるから，そこに含まれる危険資産同士の割合は明らかに一定である．このことをポートフォリオ分割定理が成立しているという．

4.7 ゼロ β ポートフォリオとリスクの価格

ここで、平均分散分析の応用として、金融資産のリスク尺度である収益率の分散あるいは標準偏差を用いて、各金融資産の期待収益率がどのような関係にあるかを明かにしよう。

まず重要な定義からはじめよう。

定義 3. $\sigma - \bar{r}$ 平面における効率ポートフォリオ・フロンティア上の 1 点における接線を描くとき、その \bar{r} 切片の大きさに等しい期待収益率をもつフロンティア・ポートフォリオをゼロ β ポートフォリオとよぶ。

注意 10. ゼロ β ポートフォリオは、効率的ポートフォリオではない。(上の定義に立ちかえて、作図してみよ。)

命題 7. (*MVP* 以外の) 任意の効率的ポートフォリオとゼロ β ポートフォリオの収益率の共分散はゼロである。

[証明の概略] 効率的ポートフォリオを Q とよび、その期待収益率を μ_Q 、収益率の標準偏差を σ_Q で表す。このとき $\sigma - \bar{r}$ 平面における Q の接線の方程式は

$$\mu - \mu_Q = \frac{D}{C\mu_Q - A} \sigma_Q (\sigma - \sigma_Q)$$

である。これよりゼロ β ポートフォリオの期待収益率 μ_Z を求めると、

$$\mu_Z = \mu_Q - \frac{D\sigma_Q^2}{C\mu_Q - A}$$

これに、 μ_Q と σ_Q の関係 (双曲線) を使って整理すると、

$$\mu_Z = \frac{A\mu_Q - B}{C\mu_Q - A}$$

を得る。

ここで、 Q と Z の 2 つのフロンティア・ポートフォリオ ${}^t y_{Q,YZ}$ の共分散が ${}^t y_Q V y_Z$ となることと g, h による各ポートフォリオの表現式を使って、共分散を計算すると、ゼロであることが示せる (証明おわり)

演習 7. 上のラフな証明を完全なものにせよ。

次の命題は、すべての金融資産の期待収益率の表現式が線形になることを示す。

命題 8. 任意の効率的ポートフォリオとそれに対するゼロ β ポートフォリオを考え、 ${}^t y_{Q,YZ}$ とおく。それぞれの期待収益率を μ_Q, μ_Z とおくと、(非効率なポートフォリオを含めて) すべてのポートフォリオ y の期待収益率 μ は

$$\mu = \mu_Z + \beta_Q (\mu_Q - \mu_Z)$$

と表せる。ここで、

$$\beta_Q = \frac{{}^t y V y_Q}{{}^t y_Q V y_Q}$$

である。

[証明の概略] $y_Q = g + \mu_Q \mathbf{h}$ を使って, ごちゃごちゃ計算すると

$${}^t y_Q V y = \frac{C\mu_Q - A}{D} \mu + \frac{B - \mu_Q A}{D}$$

となる. 一方ゼロ β ポートフォリオと Q に対応する効率的ポートフォリオの間には,

$$\mu_Z = \mu_Q - \frac{D\sigma_Q^2}{C\mu_Q - A}$$

の関係があるから,

$$\frac{D}{C\mu_Q - A} = \frac{\mu_Q - \mu_Z}{\sigma_Q^2}$$

である. また, 前の命題により, μ_Z は μ_Q だけでも表せることを使って, 所望の式を得る (証明おわり)

注意 11. 命題は, 任意の金融商品の期待収益率が基準ポートフォリオ (効率ポートフォリオに対するゼロ β ポートフォリオ) の期待収益率をどれだけ上回るかは, 効率ポートフォリオの期待収益率がゼロ β ポートフォリオの期待収益率をどれだけ上回るかに比例することを主張している.

これまで述べた議論は, すべて経済主体の金融商品の需要モデルといえるものであった. しかし, 金融資産の供給が一定であることを考えると, 経済全体の資産額のシェアで個別の金融資産を所有するポートフォリオ (市場ポートフォリオ) が効率的ポートフォリオであることを用いると, 上の議論は市場の理論としての解釈をもつ. 以下, そのことを簡単に解説する.

定義 4. 市場ポートフォリオとは, 利用可能な証券をそれぞれの市場価値に比例するように組み込んだポートフォリオをいう.

注意 12. なお, 主体 k のポートフォリオの組み入れ比率を

$$(y_1^k y_2^k \cdots y_n^k)$$

とし, 各主体の資産額を w^k とすると,

$$v_j = \sum_k y_j^k w^k, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

が第 j 証券の市場価値である. よって, 市場ポートフォリオの組み入れ率は

$$\frac{v_j}{\sum_m v_m}$$

なお, 分母の総和に安全資産の市場価値も含まれていてもよい (分析の文脈によって読みかえればよい)

命題 9. 市場ポートフォリオは効率的ポートフォリオである.

[証明の概略] 一般の ℓ 人の場合の証明も簡単であるが，ここではさらに分かりやすくするために $\ell = 2$ の場合を考える．今 2 人の主体が，効率的ポートフォリオ $\mathbf{y}^1 = (y_1^1 y_2^1 \cdots y_n^1)$ と $\mathbf{y}^2 = (y_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2)$ を選択しており，各人の総資産は w_0^1, w_0^2 とする．第 i 証券に対する市場ポートフォリオの組み入れ率 y_i^M は

$$y_i^M = \frac{w_0^1 y_i^1 + w_0^2 y_i^2}{w_0^1 + w_0^2} = \frac{w_0^1}{w_0^1 + w_0^2} y_i^1 + \frac{w_0^2}{w_0^1 + w_0^2} y_i^2$$

となる．明らかに $\mathbf{y}^M = (y_1^M y_2^M \cdots y_n^M)$ は加重 $\frac{w_0^1}{w_0^1 + w_0^2}, \frac{w_0^2}{w_0^1 + w_0^2}$ を用いた \mathbf{y}^1 と \mathbf{y}^2 のアフィン結合である．よって，効率的ポートフォリオのアフィン結合は効率的ポートフォリオになる．(おわり)

これまで，ポートフォリオの中に安全資産を含むか否かは問題にしてこなかった．ここで，ポートフォリオ分割定理が成立するための条件 (4.28) が成立する場合を考える．効率的ポートフォリオは $\sigma - \mu$ 平面において直線となるが，市場ポートフォリオはその直線上にある．市場ポートフォリオ中の各危険資産への組み入れ率は相対比率としては接点ポートフォリオ \mathbf{y}^T に等しい．

よって，市場ポートフォリオと危険資産への組み入れ比率で全資産を危険資産に投資するポートフォリオは接点ポートフォリオ \mathbf{y}^T に等しいから 14 ページのゼロ β ポートフォリオの議論とポートフォリオ分割定理の両方を考慮すると，安全資産が存在するときの接点ポートフォリオに対するゼロ β ポートフォリオの期待収益率は安全資産の収益率 r_0 に等しくなる．よって以下の命題を得る．

命題 10. 安全資産が存在し，ポートフォリオ分割定理が成立する条件 (4.28) が成立するとき，市場均衡における第 j 証券の期待収益は

$$E[R_j] = r_0 + \beta_j (E[{}^t \mathbf{R} \mathbf{y}^M] - r_0)$$

のように書ける．ここで

$$\beta_j = \frac{\text{Cov}(R_j, {}^t \mathbf{R} \mathbf{y}^M)}{\text{Var}({}^t \mathbf{R} \mathbf{y}^M)}$$

である (β_j を市場リスクの価格とよぶ.)