第5章　CAPMとAPT

5.1　はじめに

前の章の最後のほうで，市場リスクの価格についてふれた．これは市場ポートフォリオという，特殊なポートフォリオを考えて安全資産と 2 つで有効フロンティア全体が張られるとき，リスクと超過期待収益率の間に非常に簡単な線形の関係があることを示している．(ここで超過期待収益とは，ポートフォリオ収益率と安全資産の収益率の差を指す.)

このことは，本来は個別経済主体の金融資産需要理論である資産選択理論が，金融市場理論としても解釈しうる可能性を示唆する．つまり，各金融資産の価格の決定理論が，資産選択理論から構築できるかもしれないということである．もちろん，経済主体間の将来期待の同一性などの前提は必要である．

この章では，資産選択理論の延長にある市場理論としての CAPM(Capital Asset Pricing Model) を示し，その限界を示す．その後に CAPM の欠点を克服するように考えられた APT(Arbitrage Pricing Theory) を解説する．APT は金融における中心概念である無裁定条件に着目して，金融資産の価格を決定しようとする理論である．

5.2 平均分散分析と CAPM

前の章で，安全資産と複数の危険資産から最適なポートフォリオを組むとき，接点ポートフォリオ

$$\mathbf{y}^T = \frac{1}{A - r_0 C} V^{-1}(\mu - r_0 \mathbf{1})$$

と安全資産の2つから，有効ポートフォリオ・フロンティアが構成されるという分割定理が成立した[1].

さて

$$V\mathbf{y}^T = \frac{\mu - r_0 \mathbf{1}}{A - r_0 C}$$

であり，

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{y}^T V \mathbf{y}^T &= \frac{{}^t\mathbf{y}^T \mu - r_0 {}^t\mathbf{y}^T \mathbf{1}}{A - r_0 C} \\ &= \frac{E[{}^t\mathbf{y}^T \mathbf{R}] - r_0}{A - r_0 C} \end{aligned}$$

以上より

$$\mu - r_0 \mathbf{1} = \beta_{\mathbf{y}^T}(E[{}^t\mathbf{y}^T \mathbf{R}] - r_0) \tag{5.1}$$

とかける．ここで

$$\beta_{\mathbf{y}^T} = \frac{V\mathbf{y}^T}{{}^t\mathbf{y}^T V \mathbf{y}^T} \tag{5.2}$$

というベクトルである．

[1]記号などは前の章を踏襲する．

(5.1)は，

$$E[\mathbf{R}] - r_0\mathbf{1} = \beta_{\mathbf{y}^T}(E[{}^t\mathbf{y}^T\mathbf{R}] - r_0)$$

であるから，各金融資産の超過収益率が，接点ポートフォリオの超過収益率に比例していることを表している．

ここで，市場に目をむけてみる．もし各経済主体が収益率に関して同一の予想を行ない，かつその期待効用が期待値と分散にのみ依存するものだったならば，各主体の危険資産の所有比率は接点ポートフォリオに等しいはずである．つまり，各経済主体は危険資産のポートフォリオはすべて同一で，個人の危険に対する選好は，全資産額に対して安全資産をどれだけもつかだけに反映される．すると各資産の需要と供給が一致するとき，市場ポートフォリオ$\mathbf{y}_m$と接点ポートフォリオ$\mathbf{y}^T$は同じになる．

よって(5.1)は形式的に

$$\mu - r_0\mathbf{1} = \beta_{\mathbf{y}_m}(E[{}^t\mathbf{y}_m\mathbf{R}] - r_0) \tag{5.3}$$

と書きかえられる．ここで

$$\beta_{\mathbf{y}_m} = \frac{V\mathbf{y}_m}{{}^t\mathbf{y}_m V\mathbf{y}_m} \tag{5.4}$$

というベクトルである．つまり(5.3)は市場で観察される各資産総額の比率から計算される市場ポートフォリオと各資産のそれぞれの超過収益率の間に線形の関係があるという理論仮説を表していると読める．さらにいうなら

ば，各資産の超過収益率は，市場ポートフォリオというたった1つの因子によって説明されるということを意味している．こうしたモデルをCAPM(Capital Asset Pricing Model)とよぶ．

注意 37. *CAPM*は，検証手続きが簡単なために，これまで各国で膨大な実証研究が行なわれた．しかし，その現実妥当性については，一部の結果を除いて芳しくない．

5.3　市場理論としてのCAPM：1因子線形理論

すぐ上で，CAPMは各金融資産の超過収益率の期待値が市場ポートフォリオというたった1つの因子で説明されるという理論であることを示した．その場合，無裁定条件との関連は明確にされていなかった．ここでは，安全資産が存在する場合，1因子によって収益率の期待値が線形の関係で説明される場合，無裁定条件からどのような式が導出されるかを明らかにする．

CAPMでは，各資産の収益率の期待値は固有のリスクには関係せず，市場ポートフォリオに集約される共通の単一リスクのアフィン関数になっていた．そこで，一般的に資産iの(粗)収益率はなんらかの因子ψのアフィン関数

$$R_i = a_i + b_i\psi, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{5.5}$$

と考える．さらに次の仮定をおく．

仮定 3. ψは確率変数であり，

$$E[\psi] = 0, \quad Var[\psi] = 1$$

を満たす．

$b_i \neq b_j, b_i \neq 0, b_j \neq 0$である$i$資産と$j$資産を$\alpha : (1-\alpha)$で保有するポートフォリオを考える．このポートフォリオzの(粗)収益率は

$$\begin{aligned} z &= \alpha R_i + (1-\alpha) R_j \\ &= \alpha(a_i + b_i\psi) + (1-\alpha)(a_j + b_j\psi) \\ &= \alpha(a_i - a_j) + a_j + (\alpha(b_i - b_j) + b_j)\,\psi \end{aligned}$$

である．ここで右辺の第3項の括弧内をゼロ，つまり

$$\alpha^* = \frac{b_j}{b_j - b_i}$$

とおくと，それに対応するz^*は

$$z^* = \frac{b_j}{b_j - b_i}(a_i - a_j) + a_j$$

となり定数となる．つまりy^*は安全資産となる．ここで市場にある安全資産の収益率をr_0とすると，裁定機会がないという条件の下では

$$r_0 = \frac{b_j}{b_j - b_i}(a_i - a_j) + a_j$$

でなくてはならない．一方iとjについて役割を変えても同様のことが言えて，

$$r_0 = \frac{b_i}{b_i - b_j}(a_j - a_i) + a_i$$

これらを整理して

$$\frac{a_i - r_0}{b_i} = \frac{a_j - r_0}{b_j}$$

をえる．両辺の値を λ とおくと (5.5) より $E[R_i] = a_i$ なので

$$E[R_i] - r_0 = \lambda b_i \tag{5.6}$$

とかける．資産 i の超過収益率が無裁定条件から導かれた「市場共通因子」λ の線形関数になっていることに注意しよう．(5.6) と (5.3) を比較すると，CAPM が無裁定条件から導かれた 1 因子線形モデルであることが理解できる．

以上の考え方を一般化したのが APT である．

5.4 APT 理論

APT(Arbitrage Pricing Theory) は，各資産の収益率を無裁定条件に基づいて多数因子線形モデルで説明しようとするものである．

まず各資産の収益率は，共通の N 個の因子と各資産ごと 1 個の固有リスク因子の線形和で次のように記述され

ると仮定する．

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

あるいは簡単に

$$\bar{R} = \mathbf{a} + B\mathbf{U} + \varepsilon$$

と記す．ここで

$$\begin{aligned} E[\varepsilon] &= \mathbf{0}, \\ E[\varepsilon^t\varepsilon] &= {}^t(\sigma_1^2\ \sigma_2^2\ \cdots\sigma_n^2)I, \\ E[\mathbf{U}] &= (\bar{U}_1\ \bar{U}_2\ \cdots\bar{U}_N), \\ E[\varepsilon^t(\mathbf{U}-\bar{\mathbf{U}})] &= \mathbf{O} \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\tag{5.9}$$

なお以下で $\bar{\mathbf{U}} = E[\mathbf{U}]$ と記す．

注意 38. 上の定式化に現れる N 個の共通因子は事前に何か特別な解釈をあたえられるものではない．

以下において，無裁定条件から各資産の期待収益率が満たすべき条件を導く．さて (5.7) の期待値をとると

$$E[\mathbf{R}] = \mathbf{a} + B\bar{\mathbf{U}} \tag{5.10}$$

ここで (5.7) と辺々差をとると，

$$\mathbf{R} - E[\mathbf{R}] = B(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) + \varepsilon \tag{5.11}$$

となる．

この場合の無裁定条件を次のようにおく．

仮定 4.

$$^t\mathbf{x}\mathbf{1} = 0 \Longrightarrow {}^t\mathbf{x}\mathbf{a} = 0 \tag{5.12}$$

$$^t\mathbf{x}B = \mathbf{0} \tag{5.13}$$

$$^t\mathbf{x}\varepsilon \approx 0 \tag{5.14}$$

注意 39. *(5.12)* は元手がゼロの経済主体が空売りとの組み合わせでポートフォリオを組んでも，リスクゼロ部分の因子の貢献からプラスの収益を得ることができないことを意味する．

注意 40. *(5.14)* は，十分多くの種類の資産があれば無裁定条件が成立するポートフォリオ *(*均衡ポートフォリオ*)* を組むと個別リスクがゼロになることを意味する．

実は，仮定 4 をおくと，均衡ポートフォリオの (粗) 収益率の分散がゼロになることを，以下のように示すことができる．

$$\begin{aligned} Var[{}^t\mathbf{x}\mathbf{R}] &= Var[{}^t\mathbf{x}\mathbf{a} + {}^t\mathbf{x}B\mathbf{U} + {}^t\mathbf{x}\varepsilon] \\ &= Var[0 + {}^t\mathbf{0}\mathbf{U} + {}^t\mathbf{x}\varepsilon] \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

つまり無裁定条件のもとでは，均衡ポートフォリオは無危険資産となる．

ここでは，元手ゼロの下でのポートフォリオを考えているから当然

$$ {}^t\mathbf{x}E[\mathbf{R}] = 0 \tag{5.15}$$

現段階では，仮定4から (5.15)が導かれた．このとき，次の章でくわしく説明する Minkowski-Farkas の定理という，線形代数の定理に基づいて $N+1$ 次元ベクトル λ が存在して

$$\begin{pmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ \vdots \\ E[R_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ 1 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

APT は，CAPM の問題点を克服すべく考えられたが，実証的にも解釈的にも難しい問題をかかえることになった．

しかし，無裁定条件を基礎に収益率決定を考えるという接近法はファイナンスにおいて決定的に重要であることを図らずもしめしているともいえる．次回は，一般的な資産選択理論と無裁定条件から含意されることは何かを明らかにする．