vec オペレータと Kronecker 積

伊藤幹夫

平成 12 年 11 月 8 日

1 定義

vec オペレータは行列を列方向に伸ばし、列ベクトルを生成する操作である。例えば、

$$vec \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kronecker 積はつぎのように定義される。

定義 1 $A = [a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列、$B = [b_{ij}]$ を $s \times t$ 行列、とするとき、$A \otimes B$ はつぎのような、$ms \times nt$ 行列である。

$$A \otimes B = [a_{ij}B]$$

2 Kronecker 積の基本性質

以下、各行列は、積が定義できるサイズであると考える。

命題 1 $$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

[証明] A, B, C, D をそれぞれ $m \times n$, $s \times t$, $n \times p$, $t \times r$ の行列とする。

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D) &= \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1p}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & \cdots & c_{np}D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}c_{i1}BD & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}c_{ip}BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}c_{i1}BD & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{mi}c_{ip}BD \end{pmatrix} \\ &= (AC) \otimes (BD) \end{aligned} \tag{1}$$

(証明おわり)

命題 2 $$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

[証明] すぐ前の命題 1 を使う。

$$\begin{aligned}(A^{-1}\otimes B^{-1})(A\otimes B) &= A^{-1}A\otimes B^{-1}B \\ &= I\otimes I \\ &= I \end{aligned} \tag{2}$$

(証明おわり)

命題 3 $(A\otimes B)' = A'\otimes B'$

[証明]

$$\begin{aligned}(A\otimes B)' &= \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}' \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}B' & \cdots & a_{m1}B' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}B & \cdots & a_{mn}B' \end{pmatrix} \\ &= A'\otimes B' \end{aligned}$$

命題 4 $(A+B)\otimes(C+D) = (A\otimes C)+(A\otimes D)+(B\otimes C)+(B\otimes D)$

[証明]

$$\begin{aligned} & (A+B)\otimes(C+D) \\ = & \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})(C+D) & \cdots & (a_{1m}+b_{1m})(C+D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1})(C+D) & \cdots & (a_{mn}+b_{mn})(C+D) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a_{11}(C+D)+b_{11}(C+D) & \cdots & a_{1m}(C+D)+b_{1m}(C+D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(C+D)+b_{m1}(C+D) & \cdots & a_{mn}(C+D)+b_{mn}(C+D) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a_{11}(C+D) & \cdots & a_{1m}(C+D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(C+D) & \cdots & a_{mn}(C+D) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}(C+D) & \cdots & b_{1m}(C+D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(C+D) & \cdots & b_{mn}(C+D) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a_{11}C & \cdots & a_{1m}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}C & \cdots & a_{mn}C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1m}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}C & \cdots & b_{mn}C \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} a_{11}D & \cdots & a_{1m}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}D & \cdots & a_{mn}D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}D & \cdots & b_{1m}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}D & \cdots & b_{mn}D \end{pmatrix} \\ = & (A\otimes C)+(B\otimes C)+(A\otimes D)+(B\otimes D) \end{aligned} \tag{3}$$

(証明おわり)

命題 5 $$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$
\begin{aligned}
& A \otimes (B \otimes C) \\
= & \begin{pmatrix}
a_{11}\begin{pmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1t}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1}C & \cdots & b_{st}C \end{pmatrix} & \cdots & a_{1n}\begin{pmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1t}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1}C & \cdots & b_{st}C \end{pmatrix} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}\begin{pmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1t}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1}C & \cdots & b_{st}C \end{pmatrix} & \cdots & a_{mn}\begin{pmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1t}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1}C & \cdots & b_{st}C \end{pmatrix}
\end{pmatrix} \\
= & (A \otimes B) \otimes C \qquad (4)
\end{aligned}
$$

(証明おわり) 次に、A と B はそれぞれ、サイズ m、s の正方行列とする。

命題 6 A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$、固有ベクトルを $x_1, \ldots, x_m$ とする。B の固有値を $\mu_1, \ldots, \mu_s$、固有ベクトルを $y_1, \ldots, y_s$ とする。このとき、$A \otimes B$ の固有値は、$\lambda_i \mu_j,\ i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, s$、固有ベクトル $x_i \otimes y_j\ i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, s$ となる。

[証明]

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B)(x_i \otimes y_j) &= Ax_i \otimes By_j \\
&= \lambda_i x_i \otimes \mu_j y_j \\
&= \lambda_i \mu_j (x_i \otimes y_j)
\end{aligned}
$$

(証明おわり)

命題 7 $$|A \otimes B| = |A|^s \, |B|^m$$

[証明] 行列式が固有値の積であることに着目して、すぐ前の命題 6 を用いる。

$$
\begin{aligned}
|A \otimes B| &= \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{s} (\lambda_i \mu_j) \\
&= (\prod_{i=1}^{m} \lambda^s)(\prod_{j=1}^{s} \mu_j^m) \\
&= |A|^s \, |B|^m \qquad (5)
\end{aligned}
$$

(証明おわり)

命題 8 $$tr(A \otimes B) = (tr\ A)(tr\ B)$$

[証明] トレースが固有値の和であることに着目して、命題 6 を用いる。

$$
\begin{aligned}
tr(A \otimes B) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} (\lambda_i \mu_j) \\
&= (\sum_{i=1}^{m} \lambda)(\sum_{j=1}^{s} \mu_j) \\
&= (tr\ A)\,(tr\ B) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

3　幾つかの重要定理

A を行列とするとき、$A_{i.}$ と $A_{.j}$ をそれぞれ、A の第 i 行、j 列を表すものとする。これにより、

$$vec\ A = \begin{pmatrix} A_{.1} \\ \vdots \\ A_{.n} \end{pmatrix}$$

と考えられる。

定理 1　$$vec\ ABC = (C' \otimes A)vec\ B$$

[証明] A,B,C をそれぞれ、$m \times n$,$n \times r$,$r \times q$ の行列とする。

$$ABC = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rq} \end{pmatrix}$$

であるから、ABC の第 j 列が、$vec\ ABC$ の r ごとに区切った $rm \times 1$ サイズの第 j サブベクトルに対応する。これは、

$$\begin{aligned} & ABC_{.j} \\ = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} \end{pmatrix} \\ = & A\left(c_{1j}B_{.1} + c_{2j}B_{.2} + \cdots + c_{rj}B_{.r}\right) \\ = & c_{1j}AB_{.1} + c_{2j}AB_{.2} + \cdots + c_{rj}AB_{.r} \\ = & (c_{1j}A \quad c_{2j}A \quad \cdots \quad c_{rj}A) \begin{pmatrix} B_{.1} \\ B_{.2} \\ \vdots \\ B_{.r} \end{pmatrix} \\ = & (C'_{j.} \otimes A)vec\ B \end{aligned} \tag{7}$$

が上のサブベクトルになっているということである。

$$C' \otimes A = \begin{pmatrix} c_{11}A & \cdots & c_{r1}A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1q}A & \cdots & c_{rq}A \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} C'_{1.} \otimes A \\ C'_{2.} \otimes A \\ \vdots \\ C'_{q.} \otimes A \end{pmatrix} \tag{9}$$

に注意して、結論を得る。(証明おわり)

系 1　$$vec\ AB = (I \otimes A)vec\ B = (B' \otimes I)vec\ A = (B' \otimes A)vec\ I = \sum_i B'_{.i} \otimes A_{.i}$$

[証明] 最初の等式は、定理 1 において、$C = I$ とおく。2 番目の等式は、定理 1 において、$A = I, B = A, C = A$ とおく。3 番目の等式は、定理 1 において、$B = I, C = B$ とおく。最後の等式はつぎのように示される。まず、A,B' が $m \times n$ 行列であることから、

$$B' \otimes A = (B'_{.1} \otimes A \quad B'_{.2} \otimes A \quad \ldots \quad B'_{.n} \otimes A)$$

は $m^2 \times n^2$ 行列。さらに、

$$B'_{.i} \otimes A = (B'_{.i} \otimes A_{.1} \quad B'_{.i} \otimes A_{.2} \quad \ldots \quad B'_{.i} \otimes A_{.n})$$

は $m^2 \times n$ 行列。$B'_{.i} \otimes A_{.j}$ はそれぞれ、$m^2 \times 1$ 行列。

よって、

$$
\begin{aligned}
&= (B' \otimes A) vec\ I \qquad (10)\\
&= \left(\underbrace{B'_{.1} \otimes A_{.1} \ \ \ldots \ \ B'_{.1} \otimes A_{.n}}_{m^2 \times n} \underbrace{B'_{.2} \otimes A_{.1} \ \ \ldots \ \ B'_{.2} \otimes A_{.n}}_{m^2 \times n} \cdots\cdots \underbrace{B'_{.n} \otimes A_{.1} \ \ \ldots \ \ B'_{.n} \otimes A_{.n}}_{m^2 \times n} \right) \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} n \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} n \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} n \end{pmatrix}\\
&= B'_{.1} \otimes A_{.1} + B'_{.2} \otimes A_{.2} + \ldots B'_{.n} \otimes A_{.n}\\
&= \sum_{i=1}^{n} B'_{.i} \otimes A_{.i} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

(証明おわり)

定理 2 $$tr(AB) = (vec\ A')' vec\ B$$

$$tr(ABC) = (vec\ A')'(I \otimes B) vec\ C$$

$$tr(AZ'BZC) = (vec\ Z)'(A'C' \otimes B) vec\ Z = (vec\ Z)'(CA \otimes B') vec\ Z$$

[証明] まず最初の等式。

$$tr(AB) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji}$$

であるから、右辺は、a_{ij} を b_{ji} を辞書順序方向に並べてベクトルと考えた時の内積と考えられる。これは、

$$(vec\ A')' vec\ B$$

に等しい。

次の等式は、この定理の最初の等式において $B = BC$ とおいて、定理 1 を適用する。つまり、

$$tr(ABC) = (vec\ A')' vec\ (BC) = (vec\ A')'(I \otimes B) vec\ C$$

最後の等式は、$tr(XY) = tr(YX)$ に注意して、

$$tr(AZ'BZC) = tr(Z'BZCA) = (vec\ Z)' vec\ (BZCA) = (vec\ Z)'(A'C' \otimes B) vec\ Z$$

を得る。転置が結果に影響を及ぼさない事から、一番最後の等式も得られる。(証明おわり)