消費のランダム・ウォーク仮説

伊藤 幹夫

平成 12 年 10 月 17 日

0 はじめに

Hall は、不確実性下の消費者の合理的行動から、消費者の限界効用がランダム・ウォークすることを示した。Hall の理論的枠組みはライフ・サイクル– 恒常所得仮説そのものであるから、その含意を研究することにより、恒常所得仮説に基づく消費関数の実証的な意味、政策分析との関係が明確になる。

Hall の主張をまとめると、

恒常所得の確率的含意 恒常所得に基づく消費者の限界効用はランダム・ウォークする。(RW 含意)

RW 含意の実証的意義 恒常所得に基づく消費は、一期前の消費に依存するという回帰分析を行なうと、それ以外の説明変数は有意に非ゼロになることはない。

USA データでの RW 含意の実証 RW 含意を帰無仮説とするとき、USA データは帰無仮説を棄却しない。

修正恒常所得仮説 消費に影響を与えるはずの資産として株式を考えると、純粋な恒常所得仮説は棄却される。

消費に影響を与える政策 恒常所得に対して影響を与えない限り、消費を政策的に変化させることはできない。

1 理論

1.1 枠組

消費者は

$$\max\ E_t \sum_{\tau=0}^{T-t} \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\tau} u(c_{t+\tau}) \tag{1}$$

$$\text{subject to}\ \ \sum_{\tau=0}^{T-t} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{\tau} (c_{t+\tau} - w_{t+\tau}) = A_t \tag{2}$$

という最大化問題によって消費を決めるとする。

$u(c)$: 厳密に凹な効用効用関数
E_t : t 時点の条件付期待値オペレーター
δ : 主観割引率
r : 実質利子率 $(r \geq \delta)$
T : 計画期間（主体の寿命）
c_t : t 期の消費
w_t : t 期の収入 (不確実）
A_t : 人的資本以外の資産

1.2 Hall の定理と系

定理 1 最適の必要条件として

$$E_t u'_t(c_{t+1}) = \frac{1+\delta}{1+r} u'(c_t) \tag{3}$$

という確率的オイラー方程式が得られる。

系 1 c_t のみが c_{t+1} の t 時点における予測に有効な情報である。つまり、c_t が知られているとき、過去の所得などの情報を付加しても、条件付期待値は変化しないし、予測誤差の分散なども変化しない。

系 2 限界効用は以下の過程に従う。

$$u'(c_{t+1}) = \gamma u'(c_t) + \varepsilon_{t+1} \tag{4}$$

ここで、

$$\gamma = \frac{1+\delta}{1+r} \leq 1$$

$$E_t \varepsilon_{t+1} = 0$$

である。

系 3 $u(c_t) = -\frac{1}{2}(\bar{c} - c_t)^2$ であるとき、限界効用は線形関数であり、

$$c_{t+1} = \beta_0 + \gamma c_t - \varepsilon_{t+1} \tag{5}$$

ここで、

$$\beta_0 = \bar{c}\frac{r-\delta}{1+r}$$

系 4 $u(c_t) = c_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$

という $CRRA$ 型効用関数を考えるとき、

$$c_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} = \gamma c_t^{-\frac{1}{\sigma}} + \varepsilon_{t+1} \tag{6}$$

系 5 $r \approx \delta$ かつ u' の変動が小さいとき

$$c_{t+1} = \lambda_t c_t + \varepsilon_{t+1}/u''(c_t) + o(c_{t+1} - c_t) \tag{7}$$

ここで

$$\lambda_t = \left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^{\frac{u'(c_t)}{c_t u''(c_t)}}$$

であることから、消費の系列は、ほぼランダム・ウォーク

$$c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1} \tag{8}$$

にしたがう。

1.3 資産蓄積とランダム・ウォーク

$$A_t = (1+r)(A_{t-1} - c_{t-1} + w_{t-1})$$

が人的資本を含まない資産蓄積方程式である。人的資本は次のように定義される。

$$H_t \equiv \sum_{\tau=0}^{T-t} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{\tau} E_t w_{t+\tau}$$

ここで、

$$E_t w_t = w_t$$

に注意して、

$$H_t = (1+r)(H_{t-1} - w_{t-1}) + \sum_{\tau=0}^{T-t} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{\tau} (E_t w_{t+\tau} - E_{t-1} w_{t+\tau})$$

である。上式の右辺第 2 項を η_t とおくと、明らかに

$$E_{t-1}\eta_t = 0$$

これは資産に関する新情報（イノベーション）である。これを使って総資産の動向を記述すると、

$$A_t + H_t = (1+r)(A_{t-1} + H_{t-1} - c_{t-1}) + \eta_t$$

ここで系 3 か系 5 が成立する状況では微小な変動について

$$\varepsilon_t = \left[1 + \frac{\lambda}{1+r} + \cdots + \frac{\lambda^{T-t}}{(1+r)^{T-t}}\right]\eta_t = \alpha_t \eta_t$$

と考えることができる。最終的に

$$A_t + H_t = (1+r)(1-\alpha_{t-1})(A_{t-1} + H_{t-1} - c_{t-1}) + \eta_t$$

というトレンド付きランダム・ウォークとして総資産蓄積方程式を得る。

1.4 補足

Hall は利子率を一定としたが、利子率が時間を通じて変化する場合でも、確定値とみなされるとき、λ_t が時間を通じて変動するくらいで、理論の帰結に大きな変化はないとしている。

利子率が時間的に変化し、かつ不確実性をともなうとき、ここでの結論が成立しないことも、Hall は明記している。(p.976, II 節直前の段落をみよ。)

2 恒常所得仮説と別の消費仮説を区別するテスト

2.1 Hall の恒常所得仮説の実証戦略

1. 消費の条件付期待値 $E(c_t \mid c_{t-1}, x_{t-1})$ を推定する。
2. 条件付期待値が、x_{t-1} に依存しないことをテストする。

x_{t-1} は消費以外のデータをあらわす。具体的なテストとしては回帰における係数の F 検定をおこなえばよい。

以上のテストは、それまでの恒常所得仮説のテストと異なり、恒常所得の分布ラグモデルによるモデル化（特定化）をともなわずに、

1. 消費者が一時的な所得の変動に対して消費を鋭敏に反応させること。
2. 恒常所得が過去の所得の分布ラグで近似されること。

という矛盾した二つの側面を扱うことができる。

2.2 対立する第一の仮説

恒常所得が成立しない理由として、人口の一部が流動性制約その他の理由により、恒常所得仮説に基づかない消費行動をとることがあげられる。

$$
\begin{aligned}
c_t &= c'_t + c''_t \\
c'_t &= \mu y_t \\
c''_t &= \lambda c''_{t-1}
\end{aligned}
$$

とする。ここでの y_t は可処分所得とし、また簡単化のために AR(2)

$$E(y_t \mid c_{t-1}, y_{t-1}, y_{t-2}) = \rho_1 y_{t-1} + \rho y_{t-2}$$

を考える。このとき

$$E(c_t \mid c_{t-1}, x_{t-1}) = \lambda c_{t-1} + \mu(\rho_1 - \lambda) y_{t-1} + \mu \rho_2 y_{t-2}$$

帰無仮説としての恒常所得仮説は、$\rho_1 = \lambda,\ \rho_2 = 0$ である。つまり、可処分所得と恒常所得は同一のものというのが帰無仮説の内容となる。

2.3　対立する第二の仮説

恒常所得仮説が成立しない理由として、消費者が恒常所得を誤って「推定して」それに基づいて消費を行なうことが考えられる。ここでは幾何分布に従って恒常所得を推定すると考える。

$$c_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i y_{t-i}$$

また可処分所得は、すぐ上同様 AR(2) とする[1]。

$$E(c_t \mid c_{t-1}, x_{t-1}) = \beta c_{t-1} + \alpha\rho_1 y_{t-1} + \alpha\rho y_{t-2}$$

であるから、帰無仮説としての恒常所得は $\rho_1 = \rho_2 = 0$ という内容を持つ。

2.4　恒常所得仮説の実証的意義

消費の説明変数としての消費の 1 期ラグ以外の説明変数が説明力を持たないとき、純粋な恒常所得仮説からの乖離がおこっていると考える。

3　基本モデルに対する実証

3.1　直接の推定

Hall は USA の一人当たりの消費データについて、実証を行っている。(p.979 の表 1 をみよ。) 表 1 ではパラメータを変えた二つの CRRA と、2 次関数を想定して実証分析を行っている。消費の 1 期ラグが消費をほとんど説明しているという結果を得ている。ただし、この推定結果自体は恒常所得仮説を直接検証するものではない。

3.2　残差項による検証

Hall は、3 式の場合の残差項の様子を分析することで、大雑把であるが、限界効用のランダム・ウォーク仮説が USA データと矛盾しないという結論を得ている。

4　消費は自身の過去の値で予測されるか

消費の一期ラグのみが今期の消費の予測に役立つというのが、恒常所得仮説の含意であることをみた。すると、消費が循環的なパターンをとるとき、つまり消費が 1 期をこえたラグにも依存するとき、恒常所得仮説は棄却される。次数 2 以上の AR モデルになる場合に恒常所得仮説は成立しないと考えてもよい。

推定結果は、p.982 にあるように、F 検定によって帰無仮説としての恒常所得仮説は棄却されない。

[1]他の一般の分布ラグを考えても議論は変わらない。

5 消費は可処分所得によって予測さるか

p.983 の表 3 は、可処分所得の 1 期ラグを説明変数に含めた式、可処分所得の 1 期ラグから 4 期ラグまで説明変数に含めた式、可処分所得の 1 期から 12 期までの Almon ラグをとった式の三つについて推定と、可処分所得項に関する F 検定を行っている[2]。結果について Hall は

1. 三つとも帰無仮説としての恒常所得仮説は棄却されない。
2. 長期の限界消費性向は負。

としている。

後者の結論について注意が必要である。長期の限界消費性向は

$$(\forall i)\ c_{t-i} = \text{一定 and } y_{t-i} = \text{一定}$$

として求められるはずのものだから、消費の 1 期ラグを考慮にいれて計算しなおすと、符号的に問題はないように思われる。

Hall はいずれにしろ、ラグの長さを長くとろうと可処分所得は、消費の予測に関係すると思えないとしている。

6 資産と消費

Hall はこれまでの消費理論と実証に鑑みて、資産は消費に強い影響を与えると考えられるから、資産のラグもテストすべきと主張する。資産に関して、信頼できる 4 半期データとして、Hall が用いるのは S&P の株価インデックスを、耐久消費財に関するデフレータでデフレートしたものを人口でわったものを用いた。この変数は s で表わされる。

計測結果は、p.984 に示される。F 検定の結果、$H_o : s_{t-1} = s_{t-2} = s_{t-3} = s_{t-4} = 0$ が棄却される。また、各変数に関して t 検定に基づく非ゼロという帰無仮説も棄却される。

もっとも、株式に関する項の説明力は高くない。消費に関して大きな影響を与えているのは、株価の変化の方だろうと、Hall は主張する。

7 実証結果の含意

Hall は、株価が消費の予測に役立つという実証結果から、純粋な形の恒常所得仮説は棄却されるという。株式市場が消費の予測に役立つのは、主として Δs_{t-1} を通じてであるが、これは株価の変化が恒常所得の変化と関連があるからであり、このこと自体は、恒常所得の基本的な考え方と矛盾しないという。

恒常所得仮説自体は、あまり疑う予知がない。しかし、この仮説が完全な消費関数を教えてくれわけではない。それは、恒常所得の方程式自体は何も確定しないからである。分布ラグで恒常所得を捉える接近がうまくいかないという強い証拠ある。よって、残りは恒常所得の満足いくモデルを作るのが次の課題だと、Hall はいう。

[2] Almon ラグ・モデルは、滑らかな分布ラグを考えるために、ラグ項の係数 $\beta_i = \sum_{i=0}^{p} i^p \gamma_i$ として分布ラグモデルを推定する。

8　予測と政策分析に対する含意

- 恒常所得仮説が成立するとき、将来の消費は外生的だとみなせる。
- 政策が消費に影響をあたえるのは、政策が恒常所得に影響を与えるときに限る。

恒常所得を変更させない政策において、消費は外生変数とみなすことができる。