# Hansen-Singleton 論文と GMM

伊藤幹夫

平成 12 年 11 月 7 日

## 1　はじめに

Hansen-Singleton(1982)[1] は、不確実性を含む動学的最適モデルを線形化その他のアド・ホックな計量上の前提をおかずに推定する方法として、操作変数を含む一般化モーメント法による推定法を提示した。

一般に不確実性を含む動学的最適化問題の解の必要条件は、条件付期待値オペレータををともなうオイラー方程式となる。このオイラー方程式は本来非線形であるから、通常のパラメータ推定をおこなうためには、線形化するためのアド・ホックな作業仮説が必要となる。しかし Hansen-Singleton は、条件付期待値オペレータをともなうオイラー方程式を、操作変数を考えることで無条件期待値の対角条件に帰着させて一般化モーメント法を適用することを提唱する。

## 2　CCAPM への応用

Hansen-Singleton は、不確実性をともなう動学的最適化の解の条件は一般に次のような形に帰着できることを指摘している。

$$E_t\ h(x_{t+n},\ b_0) = 0 \tag{1}$$

簡単にいえば、$h$ は異時点間の限界代替率から価格比を引いたものを考えればよい。$x_{t+n}$ は $t+n$ 時点において経済主体が観察する変数、$b_0$ は $\ell$ 次元の未知パラメータベクトルをあらわす。

Hansen-Singleton があげている例は次のような CCAPM である。

$$\text{maximize}\ \ E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\ U(C_t)\right] \tag{2}$$

$$\text{subject to}\ \ C_t + \sum_{j=1}^{N} P_{jt}Q_{jt} \leq \sum_{j=1}^{N} R_{jt}Q_{jt-M_j} + W_t \tag{3}$$

ここで $C_t$ は $t$ 時点の消費、$Q_{jt}$ は $t$ 期末に保有される満期が $M_j$ 期の $j$ 資産の量、$P_{jt}$ は $t$ 時点の $j$ 資産の価格、$R_{jt}$ は $j$ 資産を $M_j$ 期保有することによる収益、$W_t$ を労働からの収入とする。

一階の条件は

$$P_{jt}U'(C_t) = \beta^{M_j}E_t\left[R_{jt+M_j}U'(C_{t+1})\right],\quad (j = 1,\cdots,N) \tag{4}$$

[1] Hansen,L.P. and K.J.Singleton, "Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectation Models," *Econometrica*, vol.50, No.5, pp.1269-86, ERRATA, vol.52, pp.267-8

この式を株について適応し、$M_j = 1$ と考え、配当 $D_{jt+1}$ を $R_{jt+1} = (P_{jt+1} + D_{jt+1})$ のように考えると (6) は

$$P_{jt} U'(C_t) = \beta\, E_t \left[ (P_{jt+1} + D_{jt+1})\, U'(C_{t+1}) \right], \tag{5}$$

のように考えられて、Hall(1978) の導いた一階条件との対応が考えやすい。[2]

Hansen-Singleton は、$N$ 種類資産のうち $m \leq N$ だけが観察可能で、それらの満期を $n_1, n_2, \cdots, n_m$ として、(6) を次のようにする。

$$E_t \left[ \beta^{n_j} \frac{U'(C_{t+n_j}, \gamma)}{U'(C_t, \gamma)} r_{jt+n_j} - 1 \right] = 0, \quad (j = 1, \cdots, m) \tag{6}$$

ただし $r_{jt+n_j} = R_{n_j t+n_j} / P_{n_j t}$ は粗収益率を、$\gamma$ は効用関数のパラメータ・ベクトルをあらわす。

さらに各期間の限界代替率をあらわすベクトルを $C_t^*$ のように記して、$x_{t+n} = (r_{1t+n_1}, \cdots, r_{mt+n}, C_t^*)$ のように考えると、

$$h(x_{t+n},\ b_0) = \begin{bmatrix} \beta^{n_1} \frac{U'(C_{t+n_1}, \gamma)}{U'(C_t, \gamma)} r_{1t+n_1} - 1 \\ \vdots \\ \beta^{n} \frac{U'(C_{t+n}, \gamma)}{U'(C_t, \gamma)} r_{1t+n} - 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$\ell$ 次元のパラメータ・ベクトル、$k$ 次元の変数、$m$ 次元の均衡式からなるオイラー方程式をえる。ここで

$$u_{t+n} = h(x_{t+n},\ b_0) \tag{8}$$

のように、均衡式に関する計量経済学上のかく乱ベクトルとみなすことで、以下の一般化モーメント推定が可能となる[3]。ただし、$E u_t u' t_n$ が full rank であることを仮定する必要がある。

## 3 推定

Hansen-Singleton のいう操作変数をもちいた一般化モーメント法は、条件付期待値関する条件

$$E_t[u_{t+n}] = 0 \tag{9}$$

を条件付期待値の情報集合に含まれる、2 次モーメントをもつ $q$ 次元の確率変数ベクトル $z_t$ によって $f : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^\ell \longrightarrow r = m \cdot q$ を

$$f(x_{t+n}, z_t, b) = h(x_{t+n}, b) \otimes z_t \tag{10}$$

と定義する。$\otimes$ は Kronecker 積である。これにより

$$E[f(x_{t+n}, z_t, b)] = 0 \tag{11}$$

という無条件期待値によるモーメント条件が導かれた。$z_t$ には消費や株価などの経済変数の先行変数が含まれると考えられる。よって、(11) は均衡式のかく乱が過去の変数と相関をもたないという意味の直交条件になっていることに注意しよう。

$g_0(b) = E[f(x_{t+n}, z_t, b)]$ は、未知パラメータベクトル $b$ が真の $b_0$ に等しいとき 0 となるという条件でもあるので、標本対応によって、$g_0$ のモーメント推定量はサンプル期間を $T$ とすると

$$g_T(b) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f(x_{t+n}, z_t, b) \tag{12}$$

[2] Hall(1978) と異なり、利子率 (収益率) を時間を通じて変動すると考える。
[3] $h : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^m$ に注意。

$\ell < r$ のとき、すべてのモーメント条件式を厳密にゼロにすることはできない。よって、それに代替するものとして正値定符号の加重行列 $W_T$ を用いて

$$J_T(b) = g_T(b)' W_T g_T(b) \tag{13}$$

を最小にするような、$b$ を一般化モーメント推定量という[4]。

**注意 1** $W_T$ は $r$ 次のベクトルがどれだけゼロに近いかを測る *metric* と解釈される。$W_T$ は単位行列でもよいが、統計学的に良好な性質をもつ *GMM* 推定量を効率的にえるために *Hansen-Singleton* はある $W_T$ の求め方を提唱しているが、ここでは省略する。

(12) を最小化する $b \in \mathbf{R}^\ell$ の満たす必要条件は (12) を $b \in \mathbf{R}^\ell$ の各要素で偏微分してゼロをおいてえられる

$$\left[\frac{\partial g_T(b)'}{\partial b} W_T\right] g_T(b) = 0 \tag{14}$$

である。これは $(\ell \times r) \times (r \times r) \times (r \times 1)$ 行列であり、$b$ に関する $\ell$ 元の非線形方程式体系である。

一方 (14) は、$r > \ell$ のとき $r - \ell$ 個の線形独立な直交条件がゼロにならずにのこされることを意味する。ただしモデルが正しいときできるだけゼロに近くなっているはずである。これは過剰識別制約とみなせる。Hansen-Singleton は最小化された (12) の値を $J_T(b^*)$ とするとき

$$T \times J_T(b^*) \sim \chi^2(r - \ell)$$

であることを使って、過剰識別制約を帰無仮説とするモデルの統計的検定ができることを含意する。

## 4 最尤推定との比較

Hansen-Singleton は、最尤推定法と GMM との比較をおこなっている。確率分布が特定化されるなら最尤推定法は、GMM よりも漸近的に有効である。しかし、最尤推定は確率分布の特定化をあやまると一致性をみたさないという点で、頑健な推定は望めない。

また、Hansen-Singleton は相対的危険回避度一定の効用関数の場合に、(6) に対してどのように最尤推定をおこなうかを示している。分布の対数正規性を仮定すると、どうにか最尤推定が可能であることが示される。しかし、このことは、実行可能な最尤推定には、都合のよい分布やモデルの特定化が必要なことを示唆する。

## 5 CCAPM へ適用した結果

Hansen-Singleton は、自分たちの GMM を、消費については、消費系列 (非耐久財・サービス)、消費系列 (非耐久財) を、収益率については NYSE の単純平均収益率と加重平均収益率をとって実証している。結果については、計算がミスがあり、その後修正を発表しているが、全般的に CCAPM のパフォーマンスはふるわない。

[4] ' は転置をあらわす。

# 付録：モーメント法と一般化モーメント法

一般化モーメント法を解説する前に、モーメント法を説明する。

モーメント法とは、標本モーメントの期待値が母集団の積率に一致するという性質を利用して、分布の未知パラメータを点推定する方法である。通常は、正規母集団からのデータから未知パラメータである平均・分散をモーメント推定する例が取り上げられることが多いが、ここでは Hamilton(1994) にしたがって、$t$ 分布の未知パラメータ、自由度 $\nu$ を大きさ $T$ のランダム標本 $(y_1, y_2, \cdots, y_T)$ からモーメント推定する例を考えてみよう。密度関数は

$$f_{Y_t}(y_t;\nu) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{(\pi\nu)^{1/2}\Gamma(\nu/2)}[1+(y_t^2/\nu)]^{-(\nu+1)/2} \tag{15}$$

である。ここで $\Gamma$ はガンマ関数である。

$\nu > 2$ とすると、次の性質が成立する。

$$\mu_2 \equiv E(Y_t^2) = \frac{\nu}{\nu-2} \tag{16}$$

$\nu \longrightarrow \infty$ のとき $t$ 分布は標準正規分布に近づく。さて

$$\hat{\mu}_{2,T} \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2 \tag{17}$$

十分 $T$ が大きいと $\hat{\mu}_{2,T}$ は母集団平均 $\mu_2$ に近づくはず。つまり

$$\hat{\mu}_{2,T} \xrightarrow{p} \mu_2$$

(16) から

$$\frac{\nu}{\nu-2} = \hat{\mu}_{2,T} \tag{18}$$

つまり

$$\hat{\nu}_T = \frac{2\hat{\mu}_{2,T}}{\hat{\mu}_{2,T}-1} \tag{19}$$

というモーメント推定量が得られる[5]。

一般に $y_t$ の観察値の背後にある母集団分布のパラメータが $a$ 次元ベクトル $\theta$ で表されるとき

$$E(Y_t^i) = \mu_i(\theta) \quad \mathrm{for} i = i_1, i_2, \cdots, i_a \tag{20}$$

という対応が分布関数から解析的に計算されることがわかっていることを前提にこの左辺を原点周りの標本モーメント

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^i \quad \mathrm{for} i = i_1, i_2, \cdots, i_a$$

で置き換えて得られる $a$ 次連立方程式の解として推定量 $\hat{\theta}$ をもとめるのが**古典的モーメント法**である。

ところで $t$ 分布では $\nu > 4$ のとき、母集団の 4 次モーメントについて

$$\mu_4 \equiv E(Y_t^4) = \frac{3\nu^2}{(\nu-2)(\nu-4)}$$

[5] $\hat{\mu}_{2,T} \leq 1$ のときは標準正規分布と考えてモーメント法を実行するのが常道。

という関係がある。これが原点周りの標本モーメント

$$\hat{\mu}_{4,T} \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^4$$

に近いと考えてよい。しかし (18) から得られるモーメント推定量とすぐ上のモーメント推定量が一致することは一般に期待できない。そこで適当な正値定符号行列をとり

$$Q(\nu;\ y_1, y_2, \cdots, y_T) \equiv \mathbf{g}'\mathbf{W}\mathbf{g} \tag{21}$$

という基準を最小化する $\nu$ をもって推定量としようというのが一般化モーメント法のアイデアである。ここで、

$$\mathbf{g} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{2,T} - \frac{\nu}{\nu-2} \\ \hat{\mu}_{4,T} - \frac{3\nu^2}{(\nu-2)(\nu-4)} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Hansen-Singleton はさらに、時系列モデルにおける条件付期待値の入る均衡条件を情報集合に属する先決変数との直交条件から、一般化モーメント法のモーメント条件に持ち込んだところが新しいのである。