# 消費CAPMとパズル

伊藤幹夫

平成 12 年 12 月 1 日

## 1　はじめに

消費 CAPM や投資 CAPM は、本来 Merton(1973) のような不確実性を含む動学的一般均衡モデルの部品（パーツ）にすぎないという言い方もできる。しかし、純粋な理論モデルではなく、実証の俎上にのるマクロモデルとしてそれらをみると、意義は別のところにあるということが言える。消費 CAPM や投資 CAPM は、現実のマクロ経済が、ワルラス的な一般均衡理論に適合する形で運行しているかの試金石だからである。

すでに、講義した Hall タイプの確率論的な恒常所得仮説に基づく消費需要については多くの実証研究がある。結論的には Hall(1978) 自身が行った単純なオイラー方程式の間接的実証という形であろうとなかろうと、全体的に恒常所得仮説を原理的な形で指示する根拠は、ほとんど報告されていない。

また、オイラー方程式の直接的検証の筆頭である GMM による接近でも、Hansen-Singleton(1982) や Finn-Hoffman-Schlagenhauf(1990) など主要な研究は、割引率の推定値についてはほとんど 1 に近い値を推定値として得る一方、CRRA(相対危険回避度一定) 効用関数の**危険回避度パラメータに関して、マイナスの値を推定値として得たり、異常に低い正の値を得たりしている**。さらに問題なのは GMM の過剰識別制約に関するモデルのテストによって、消費 CAPM が採択されることはほとんどないことが注目される。バブル期までの日本のデータで検証した羽森 (1996) が唯一の例外といえる。

さらに消費 CAPM については、Mehra-Prescott(1985) が指摘したような、マクロの長期データを消費 CAPM に素朴に当てはめたときにモデルが示唆する**危険回避度が既存の研究の値を大きく上回ってしまう**というパズルが存在する。

## 2　危険資産プレミアム・パズル

Mehra-Prescot(1985) は 1889-1978 年にわたる S&P500 の平均収益率と財務省証券の平均収益率の差が 6%であることから、消費 CAPM を実証に適用したときに観察される危険回避度パラメータの「異常」な高さを指摘している。

Mehra-Prescot(1985) は、GMM を用いて消費 CAPM を直接推定したのではなく、その理論的含意に注目して、データとの突合せをおこなったことに注意しよう。彼らは、Lucas(1978) が考えた生産がマルコフ過程にもとづく単純な不確実性下の一般均衡モデルを、CRRA 効用関数の仮定の下で calibration を行った。つまり生産から生ずる不確実性に対して、消費者は危険回避行動をとる結果、安全資産価格、危険資産価格が決まるという枠組みにおいて、それぞれの収益率の差を危険プレミアムと定義し、それらがモデルの基本的なパラメータとどのような関係式を形成するか

を示して既存の研究から得られたパラメータ値の範囲を動かすとき危険プレミアムと安全資産収益率がどの範囲を動くかを図示した[1]。

その結果、モデルが予見する危険プレミアムは、現実に観察される市場ポートフォリオの収益率(S&P500の平均収益率)と安全資産の収益率(財務省証券の平均収益率)の差に比較して、低すぎることが明らかになったとしている。彼らはこれを危険資産プレミアム・パズル(**equity premium puzzle**)とよんだ。別の見方をすれば、実際の収益率の差としての危険プレミアムを消費CAPMで説明するには既存の研究が示唆するパラメータの許容領域を逸脱した設定をしなければならない。

Mehra-Prescot(1985)の考え方は、Mankiw-Zeldes(1991)がより明確に連続型モデルあらわしているので、ここでは後者にしたがって、危険資産プレミアム・パズルを説明する。

$$\text{maximize}\quad E_t\int_0^\infty e^{-\delta s}U(C_{t+s})ds \tag{1}$$

連続型であることは本質ではなく、結局は任意の2時点間の限界代替率の条件が次のようにえられることが重要である[2]。

$$E_t\left[\frac{U'(C_{t+s})e^{-\delta s}}{U'(C_t)}(1+R^i_{t,t+s})\right]=1 \tag{2}$$

ここで $R^i_{t,t+s}$ 第 $i$ 資産の $t$ 期から $t+s$ 期の間の実質の収益率である。ここで、CRRA効用関数

$$U(C)=\frac{C^{1-A}}{1-A}$$

を仮定すると、

$$GC_t=\frac{\dot{C}_t}{C_t}$$

が消費の瞬間成長率を、$R^i_t$ が資産 $i$ の瞬間収益率をあらわすとき

$$E(R^i_t)=A\times E(GC_t)+\delta-\frac{A(A+1)}{2}Var(GC_t)+A\times Cov(R^i_t,GC_t) \tag{3}$$

となる[3]。この(3)を異なる資産の間に適用すると、

$$E(R^i_t-R^j_t)=A\times Cov(R^i_t-R^j_t,GC_t) \tag{4}$$

となる。Grossman-Shiller(1982)によれば、ある適当な集計のための条件の下で社会全体の最適消費の条件になるから、この式を集計データに応用することは意味がある。

さてMehra-Prescot(1985)のデータから計算される市場ポートフォリオ(危険資産)の収益率 $R^m_t$ と安全資産の収益率 $R^f_t$ の差 $R^m_t-R^f_t$ と消費の成長率 $GC_t$ の間の標本相関係数は0.40、$GC_t$ の標準偏差は0.036、$R^m_t-R^f_t$ の標準偏差は0.167と計算されるから右辺は、$A\times 0.40\times 0.036\times 0.167=A\times 0.0024048$ となるが、左辺は0.062であることがわかっている。これは危険回避度のパラメータ $A$ がおよそ26という、とんでもない大きな数値になることがわかる。Mankiw-Zeldes(1991)は標本期間を区切ったり消費の内容を変えたりして、$A$ の推定値を求めているが、状況はさらに「悪化」し、場合によっては、3桁の数値が求められてしまう。

[1]Mehra-Prescot(1985)の Fig-4.
[2]解釈的には $C_t$ は一人あたり消費と考えるべきである。
[3]なお本来条件付期待値オペレータで記述される一階条件が無条件期待値であらわされるのは、条件付期待値に関するLaw of Iterated Expectationsによる。

## 3　安全資産収益率パズル

消費 CAPM をマクロモデルとして採用する場合、実証データとの突合せにおいてもうひとつのパズルが生ずることを Weil(1989) が指摘している。

(4) からわかることは、CRRA に限らず時間加法的な効用関数を仮定すると、異時点間の代替の弾力性が小さな通時的消費需要構造がもたらされる。つまり、消費者は各期の消費を一定にする傾向が高まる。そのとき、消費成長率が正であるとすると、実物消費を平準化させるために消費者は将来からの借り入れをする傾向が高まる。よって資金需要構造としては安全資産に対する需要が高まり、CAPM の考え方に照らせば安全資産収益率が高くなるように市場が機能するはずである。実際には安全資産の収益率は長期の合衆国データをみるかぎり高くない。このことを、安全資産収益率パズル (**risk free rate puzzle**) という。

Weil(1989) は自らが名づけたパズルを解く方策として、Kreps-Porteus 型とよばれる効用関数を採用することを提唱している。ただし、Mehra-Prescott(1985) のもともとのパズルを解決するわけではない。

## 4　パズルを解決する試み

パズルにかかわった論者は、ほとんどが Mehra-Prescott(1985) のデータを踏襲している。まずそのデータをそれらの論者にしたがって要約しておこう。

1. データは定常でエルゴード性を有する[4]。
2. 株式の平均収益率が 7%であるに対して、財務省証券の平均利子率は 1%である。
3. 一人あたり消費の成長率は 1.8%という水準である。
4. 一人あたり消費の成長率と株式収益率の共分散は、一人あたり消費の成長率と財務省証券の利子率の共分散より大きい。

パズルをとくための試みはこれまで数多く行われてきたが、接近法として 2 つに分類される。ひとつは効用関数を CRRA 以外のものを採用すること。もうひとつは、市場に不完全性を導入することである。

### 4.1　効用関数の修正

さて CRRA を採用したとき Mehra-Prescott(1985) 同様に離散モデルを考えると、最適の一階条件は

$$E_t\left[(c_{t+1}/c_t)^{-A}(R^m_{t+1} - R^f_{t+1})\right] = 0 \tag{5}$$

$$\beta E_t\left[(c_{t+1}/c_t)^{-A}R^f_{t+1}\right] = 1 \tag{6}$$

$\beta$ は割引因子である。この 2 つの式が長期的に成立するとき、条件付期待値は無条件期待値に置き換えられるため、$c_t$ を一人あたり消費と考え、左辺は $A$ ならび $\beta$ を固定するときデータから標本平均として求まる。つまり、データに対して (5) と (6) を同時に満たす $A$ と $\beta$ が、素朴な推定値と

[4]定常性、エルゴード性については講義の別の機会にふれる。データがそうした性質を満たしているかをきちんと確認した論者はいないと思われる。

して得られる。これは、$A = 17.95, \beta = 1.08$ 程度であるといわれる。割引因子が 1 より大、危険回避度も大きい。これが equity premium puzzle である。

そこで CRRA の一般化として

$$U_t = \left\{ c_t^{1-\rho} + \beta \left\{ E_t U_{t+1}^{1-A} \right\}^{(1-\rho)/(1-A)} \right\}^{1/(1-\rho)} \tag{7}$$

という再帰的な効用を考える[5]。このタイプは危険回避度 $A$ と異時点間の代替の弾力性 $1/\rho$ が異なるパラメータで表されるという特徴をもつ。このとき一階条件は

$$E_t \left[ U_{t+1}^{\rho-A} (c_{t+1}/c_t)^{-\rho} (R_{t+1}^m - R_{t+1}^f) \right] = 0 \tag{8}$$

$$\beta E_t \left[ (E_t U_{t+1}^{1-A})^{(A-\rho)/(1-A)} U_{t+1}^{\rho-A} (c_{t+1}/c_t)^{-\rho} R_{t+1}^f \right] = 1 \tag{9}$$

ここで、将来消費の成長率は、投資家にとって現在利用可能な情報と統計的に独立であるという仮定をおくと、

$$\beta E \left[ (c_{t+1}/c_t)^{-\rho} (R_{t+1}^m - R_{t+1}^f) \right] = 0 \tag{10}$$

$$\beta E \left[ (c_{t+1}/c_t)^{1-A})^{(A-\rho)/(1-A)} \right] E[(c_{t+1}/c_t)^{-A} R_{t+1}^f] = 1 \tag{11}$$

として、パズルが成立するかを確かめることができる。結果として危険資産プレミアムパズルは生ずる。しかし、異時点間の代替の弾力性と危険回避度を別にすることで安全利子率パズルは解決できる。

他には、習慣形成 (habit formation) を考慮した効用関数を考えることで、パズルをとくことが考えられる。結果的には安全利子率パズルは解決できても危険資産プレミアムパズルは解決されない。

さらに社会全体の消費が個人の効用に影響を及ぼすという、「外部性」の導入によってパズルを解決する試みも考えられる。その場合、適当な追加パラメータによってパズルが解決される可能性を持つ。

結局、この接近は効用関数を複雑にし、パラメータが追加されるとき、それらを適当な値に設定すれば、パズルが解決されるかもしれないという、モデルの肥大化に道をたどることになった。言葉を換えれば、二元連立の式に対して主観割引率と危険回避度以外のパラメータを追加すれば、それらを妥当な数値にとどめたまま、一階の条件を平均的に満たすことができるだろうという見込みによって、複雑化したわけである。

## 4.2 市場の不完備性の導入

危険資産プレミアム・パズルにしろ安全利子率パズルにしろ、現実のデータとモデルの乖離を意味している。現実とモデルの乖離は珍しいことではないが、パズルとよばれるのは、モデルが予見するパラメータ値が、先行研究によって流布している値と大幅に食い違う一点に求められる。背景には、「モデルは正しいに違いない、間違っているのは何だ？」という問いかけがある。よって、2 つのパズルに対するこれまで挑戦は、モデルの細かな修正をさまざまに試すという過程であった。これは、現在のマクロ経済学の古典派志向を、かなりの程度如実に表わすともいえる。効用関数の形を変えるという前の節の接近はその典型といえる。

[5] $A = \rho$ のとき CRRA と一致する。

パズルの解決において、前提の大幅の変更を持ち込むことは、パズル解きではなくなるとはいえ、効用関数の修正で少なくとも危険資産プレミアム・パズルを解くことはできないという感触が一般化してきたため、不完備市場において資産価格決定がなされるという接近も増えてきている。つまり、配分 (allocation) が歪むのは独占的要素がないなら、市場の欠落とう不完備市場の問題であるという考えに基づいてパズルを解決しようというわけである。

簡単にこれまでの研究の経緯をまとめておく。

**出発点** Weil(1992) である。金融市場に欠落がある場合、二期間モデルで 2 つのパズルが解決される可能性を示した。

**Weil(1992) への疑問** その後、2 期間モデルでは市場の欠落が配分の歪みを過大にもたらすという指摘が相次ぐ。つまり無限期間モデルでは、保険市場の欠落の影響は微々たるものであることが数値計算によるシミュレーションで示されてしまう。ただし自己保険という考え方が強調される。（Huggest(1993), Telmer(1993), Lucas(1994), Heaton and Lucas(1995)）

**無限期間モデルと労働所得の persistency** CCAPM では、労働所得の将来経路も不確実性の源泉である。(人的資本の蓄積過程。) すぐ上の指摘は、それらが定常過程であることを前提にしている。そこで労働所得の確率過程に persistency （過去のショックをずっと引きずること）を仮定すると、そうした不確実性をヘッジする保険市場の欠落が安全利子率を引き下げる可能性が生ずる。また危険資産プレミアムも動じに説明しうる可能性が生ずる。(Constantinides and Duffie(1995) など。)

**労働所得は persistent な過程か** Persistency が高ければ安全利子率パズルが解けるかもしれないとはいえ、どの程度 Persistency が高ければいいのか、また現実の過程はどの程度 persistent かが問題となる。後者は 0.5 程度の一階の自己相関が 0.5 程度にとどまること、また仮に 0.8 程度の高い自己相関があっても、無限期間モデルでは配分の歪みは生じないという指摘がある。(Heaton and Lucas(1995') など )

結局不完備市場の導入をパズル解決は切り札とはよべそうもないように思われる。

### 4.3 取引費用他の要因

他には、パズルの前提あるいは実証作業自体をを根本に近いところで見直すという接近がある。

**取引費用** 債券の取引費用と株式の取引費用に大きな差があるとき、またそのときに限って、危険資産プレミアム・パズルが解決されるという指摘がある。(Heaton and Lucas(1995') など。) ただし、取引費用についてそうしたことが現実にあるという事実は、ほとんどない。

**借入制約と空売制約** 消費者の予算制約に借入の下限を設け、代表的個人を前提としない場合、安全利子率パズルが解決される可能性が指摘される。（Huggest(1993), Heaton and Lucas(1995,1995') など。）

**市場参加者の偏在** そもそもアメリカ合衆国では、人口の 3 割程度の人しか危険資産市場に参入しない。(market segmentation の存在。) その場合、代表的個人を考え、その最適化の一階条件式に人口全体の一人あたり消費に対して適用することがおかしい。危険資産を保有する人々の一人あたり消費を考えるべきという指摘がある。(Campbell(1993))

### 4.4 まとめ

これまでのところパズルを解く決定的な方策は見つかっていない。しかし、学生諸君は、出発点の Mehra-Prescot(1985) の原論文に是非目をとおして欲しい。使われているデータ S&P500 系列の定常性、そうしたデータを採用する妥当性など、それらは Cambell(1993) の指摘と関係するが、パズル自体がかなり粗雑なデータに基づくことを実感させるに十分である。あるいは、GMM による推定の失敗とあいまって、CCAPM が粗雑なデータでしか扱いえてないのか、CCAPM がもともと現実に適合しないのか、判断が下せないのが現状であるともいえる。