

統計学 I 2021 年度春学期 問題と解答

【注意】以下の設問の解答は解答用紙(別紙)に記入しなさい。*印の問題では答えに至る途中過程も記しなさい(答えだけは 0 点)。検定では、仮説、帰無分布、検定統計量、臨界値、結論を明記しなさい。数字の解答は割り切れるものは小数点表示で、割り切れないものは分数で記しなさい。

【数表】

標準正規分布 Z について $P(Z<1)=0.84$ 、 $P(Z<1.645)=0.950$ 、 $P(Z<1.96)=0.975$ 、 $P(Z<2)=0.977$

1 ある年の期末試験(100 点満点)は、受験者数 200 人、平均 60 点、標準偏差 20 点、歪度 -0.3、尖度 0.8 ではほぼ正規分布に従っていた。(30)

(1) 標本平均 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ がよく利用される理論的根拠を説明しなさい

(2) 逆に標本平均が望ましくないときは、どのような場合かを書きなさい

(3) 標準偏差 $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$ はなぜ n ではなく、 $n-1$ で除す必要があるのかを説明しなさい

(4) 歪度の計算式を書きなさい

(5) 歪度や尖度に単位がないのはなぜか。その理由を説明しなさい

(6*) A 君はこのテストで 80 点だったが、A 君より高得点の生徒は凡そ何人いると推察されるか

解答 各 5 点 正答率(1)43%(2)66%(3)62%(4)51%(5)18%(6)65%

(1) 不偏性(一致性)、効率性といった望ましい推定量の性質をもつから(不偏性のみだと 2 点) (2) 外れ値がある場合(大きな偏りだと 1 点) (3) 母標準偏差の不偏推定量とする(過小推定を避ける)ため(単に過小推定だと 2 点) (4) $(\sum z_i^3)/n$, $z_i = (x_i - \bar{x})/s$ (z の定義がない or σ で標準化は 2 点) (5) 標準化 $(x_i - \bar{x})/s$ で無名数となるため (6) $P(x>80) = P(z>(80-60)/20) = 1 - 0.84 = 0.16$ より $200 \times 0.16 = 32$ 人(本人を除く 31 人も当然正解)

2 ある年の春学期は 100 点満点(50 題で配点はすべて 2 点)の試験をおこなった。(15)

(1*) 学生の各問題の正答率が θ で共通であるとき、任意の問題 i に正答するか否かの確率変数 d_i (=1 正解 or 0 不正解)の期待値 $E(d_i)$ と分散 $Var(d_i)$ をその定義より求めよ

(2*) 総点 $x = \sum 2 \cdot d_i$ の期待値 $E(x)$ と分散 $Var(x)$ をモーメント公式より求めよ

(3*) 正答率 $p = \sum d_i/50$ の期待値 $E(p)$ と分散 $Var(p)$ をモーメント公式より求めよ

解答 各 5 点 正答率(1)65%(2)47%(3)42%

(1) $E(d) = \theta \times 1 + (1 - \theta) \times 0 = \theta$, $Var(d) = \theta \times (1 - \theta)^2 + (1 - \theta) \times (0 - \theta)^2 = \theta(1 - \theta)$ (片方のみ正解は 2 点(以下同じ)、定義を示さず分散公式 $E(d^2) - \theta^2$ を利用したものは 2 点)

(2) $E(x) = E(\sum 2d) = \sum 2E(d) = \sum 2\theta = 100\theta$, $Var(x) = Var(\sum 2d) = \sum 4Var(d) = \sum 4\theta(1 - \theta) = 200\theta(1 - \theta)$

(3) $E(p) = E(\sum d/50) = \sum E(d)/50 = 50\theta/50 = \theta$, $Var(p) = Var(\sum d/50) = \sum Var(d)/2500 = \theta(1 - \theta)/50$

3 春学期に 6 回の試験をおこなったところ A 君の正答率 p は 0.4 であった。A 君の真の実力を正答率 θ としたとき、以下の間に答えなさい(ただし正答率は試験の問題数に依存しないとする)。(25)

(1*) θ の 95% 信頼区間の上限と下限を答えなさい

(2) なぜ 100% の区間推定をおこなわないのかを説明しなさい

(3) 慶應では θ が 0.6 未満を不可としているが、教員は試験の結果から A 君を可とするべきか否か。有意水準 5% で検定しなさい

(4) 有意水準 5% は成績評価の判断ミスの確率だが、このミスをなんというか

解答 (1)(2)(4)5 点 (3)10 点 正答率(1)48%(2)28%(3)35%(4)40%

(1) 下限 : $0.4 - 1.96 \frac{\sqrt{0.4(1-0.4)}}{\sqrt{6}} = 0.4 - 1.96 \cdot 0.2 = 0.008$ 上限 : $0.4 + 1.96 \cdot 0.2 = 0.792$ (式のみは 0 点、計算ミスは減点) (2) 区間が -無限 ~ 無限になり、推定の意味がないから (3) $H_0: \theta = 0.6$, $H_1: \theta < 0.6$ とする。帰無仮説 $H_0: \theta = 0.6$ が真であるとすると、 $p \sim N(0.6, \frac{0.6(1-0.6)}{6})$ となるが、 $p=0.4$ を標準化すると $z = \frac{p-0.6}{\sqrt{0.024}/\sqrt{6}} = \frac{-0.2}{0.2} = -1 > -1.645$ より H_0 は棄却できない。A 君は可とすべきである(仮説設定の誤り、帰無分布の有無、検定統計量の計算ミス、臨界値の誤り、結論の誤りの point で 2 点づつ減点)

(4) 第 1 種の過誤(Type 1 error)

4 確率変数 x の密度関数が $f(x) = 2x$ ($0 \leq x \leq 1$) のとき以下の問い合わせに答えなさい。(20)

(1*)分布関数 $F(x)$ を定義から導出しなさい。

(2*) $P(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$ を求めなさい。

(3*)確率変数 x の期待値 $E(x)$ と分散 $Var(x)$ を求めなさい。

解答 (1)(2)5 点 (3)10 点 正答率(1)87%(2)77%(3)72%

$$(1) F(x) = \int_0^x 2X \, dX = 2 \left[\frac{1}{2} X^2 \right]_0^x = x^2 \quad (2) P(1/2 \leq x \leq 1) = F(1) - F(1/2) = 1 - 1/4 = 3/4$$

$$(3) E(x) = \int x f(x) \, dx = \int_0^1 x(2x) \, dx = 2 \int_0^1 x^2 \, dx = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{2}{3}$$

$$E(x^2) = \int x^2 f(x) \, dx = \int_0^1 x^2(2x) \, dx = 2 \int_0^1 x^3 \, dx = 2 \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{1}{2} \quad Var(x) = E(x^2) - \mu^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

5 日本のこれまでの新型コロナウイルス(COVID19)の年代別感染者数が若中年者(40 代以下)5000 人、壮年者(50,60 代)3000 人、高齢者(70 代以上)2000 人であるとき、以下の問い合わせに答えなさい。ただし COVID19 の年代別死亡率は、若中年者 0.1%、壮年者 1%、高齢者 8%とする。(10)

(1*)感染者 10000 人中どれほどの死者がでると予想されるか

(2*)その死者が高齢者である確率を求めよ

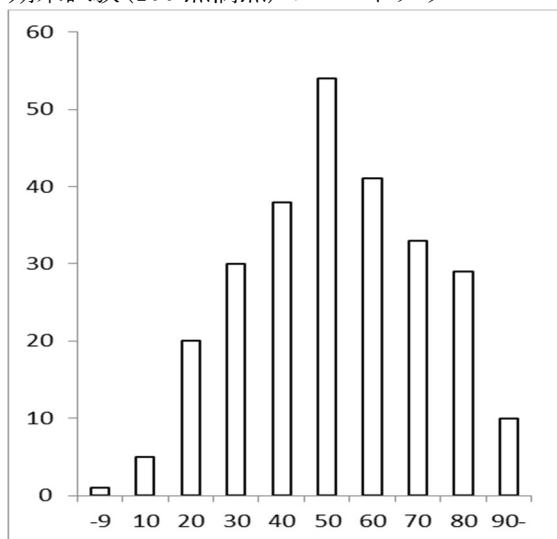
解答 各 5 点 正答率(1)92%(2)88%

(1) $5000 \cdot 0.001 + 3000 \cdot 0.01 + 2000 \cdot 0.08 = 5 + 30 + 160 = 195$ 人 (%での解答も正解) (2) $160/195 = 32/39$

採点結果

受験者数 261 人 平均点 56.6 標準偏差 19.9 最高点 99 最低点 7

期末試験(100 点満点)のヒストグラム 総点のヒストグラム



成績は「総点=レポート乗数の平均値×期末試験得点+小テスト得点」に基づき、S(総点 ≥ 100)、A(100>総点 ≥ 80)、B(80>総点 ≥ 60)、C(60>総点 ≥ 40)、D(総点<40)でつけます(経済学部のガイドラインに合わせるために、S の割合を 10%、D の割合を 15%となるように基準を変更しました)。