

慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

				試験時間	50分	分
平成 27 年 07 月 22 日（水） 時限施行		学部	学科	年	組	採点欄
担当者名	服部 哲弥 君	学籍番号				
科目名	確率論入門 1	氏名				

注意：答案用紙は裏を使ってはならない．解答は答案用紙の表がわに収めよ．また，答案用紙おもて面右上に，登録した時限（3または4）を必ず明記すること．

問1 . 3個の自然数の集合 $\Omega = \{1, 2, 3\}$ を全体集合（全事象）とし， Ω の部分集合全てを要素に持つ集合（ Ω の部分集合全てを集めた集合族） \mathcal{F} を定義域とする確率測度 $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ について以下の問いに答えよ．答案用紙はおもて面に答えだけを書け．

- 『確率測度 P の定義域 \mathcal{F} に入っている Ω の部分集合 A のうち，自然数がちょうど2個入っているものを1つ $A = \{x, y\}$ のように答案用紙に書け』という問題の正解は一通りではない．正解は何通りあるか正解の種類数を答えよ．
- P が確率測度である（コルモゴロフの公理を満たす）というだけでは実際の値の取り方は種々あり得るが，次の変形は， $P[\{1\}] = 0.3$ であるような確率測度 P は $P[\{3\}]$ の値がある範囲に制限されること（と，その範囲の計算）を示す．空欄に前後の表記に合わせて，数値以外の記号も含む，変形の順序に沿った適切な数式を入れよ．右端には各行を得る変形に用いたコルモゴロフの公理系の中の規則が書いてある．

$$\begin{aligned}
 P[\{3\}] &= P[\Omega] - P[\{1\}] - P[\{2\}] && \text{(加法性 (2回))} \\
 &\leq P[\Omega] - \boxed{} && \text{(非負値性)} \\
 &= 1 - 0.3 = 0.7 && \text{(全測度 1).}
 \end{aligned}$$

いっぽう，非負値性から $P[\{3\}] \geq 0$ ．よって求める範囲は $0 \leq P[\{3\}] \leq 0.7$ ．

- 最初の小問の解答で選んだ集合 A の要素でない Ω の要素 c と， A の2つの要素のいっぽう（好きな方を1つ選べ） x からなる集合 $\{c, x\}$ を B とおく． $P[A] = 0.7$ のとき，上の小問の意味で $P[B]$ が取り得る値の範囲を書け．答案用紙は上の小問の最後の下線部の書式にならって，答えだけを書け．

問2 . 確率空間 (Ω, P) 上の独立な確率変数たちで値は0か1のもの $X_i: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots$, がある． i によらず値の分布が等しいとし， $P[X_i = 1] = \beta$ とおく．また，最初の N 個の X_i たちの和を表す確率変数を $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ とおく．以下の問いに答えよ．答案用紙はおもて面に答えだけを書け．

- 次の各計算の空欄 (a) と (b) に (β を用いた， X_i を用いない) 適切な式を入れよ．
各 X_i は0または1の値を取るから， $E[X_i] = 1 \times P[X_i = 1] + 0 \times P[X_i = 0] = \beta$ である．同様に， $V[X_i] = E[(X_i - E[X_i])^2] = \boxed{\text{(a)}}$ $\times P[X_i = 1] + \boxed{\text{(b)}}$ $\times P[X_i = 0] = \beta(1 - \beta)$ となる．
- 上の小問の準備の下で，教科書や講義のように S_N の期待値 $E[S_N]$ と分散 $V[S_N]$ を計算することができて， $E[S_N] = N\beta$ および $V[S_N] = N\beta(1 - \beta)$ を得る．さらに，教科書から S_N は2項分布に従うこともわかる．
ここまで， X_i たちは独立と仮定した．もし（他の仮定や記号の定義はここまでのままとし

て) X_i たちが独立でないとする、一般に S_N の値の分布は 2 項分布ではない。このとき、期待値 $E[S_N]$ と分散 $V[S_N]$ の値はそれぞれ独立なときに比べて

{
 大きくなる、
 小さくなる、
 等しい、
 これだけでは決まらないが等しくなることはない、
 これだけでは決まらず等しくなることもある、
 }

のいずれか、それぞれ選んで

$E[S_N]$ は...

$V[S_N]$ は...

のように答えよ。

問 3 . 以下の文章中の空欄 (a)–(c) を数式で埋めよ。(a) は N を含む期待値、(b) と (c) は λ の式を埋めよ。

関数項級数の和の公式があると、対応する(整数に値を取る)確率変数の確率や期待値の計算ができることがある。たとえば、指数関数のマクローリン展開 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ はポワソン分布に従う確率変数の計算に役立つ。

$\lambda > 0$ とする。非負整数 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ に値を取る確率変数 $N: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ の値の分布が平均 λ のポワソン分布とする(参考: $P[N = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$)。

期待値の定義から、 (a) $\square = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)P[N = k]$ となるが、右辺にポワソン分布の定義を代入し、 $k = 0, 1, 2$ の各項は $k(k-1)(k-2) = 0$ だから和は $k \geq 3$ についてとればよいこと(参考: $\sum_{k=0}^{\infty} \cdot = \sum_{k=3}^{\infty} \cdot$) と、 $k \geq 3$ の各項では $k(k-1)(k-2)$ は分母の階乗と約分できることに注意し、そののち和を取る変数を k から $\ell = k - 3$ に変更する。結果として得る級数を指数関数のマクローリン展開で和を取る変数を k から ℓ にとりかえたものと比べると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)P[N = k] = (b) \square \text{ を得る。}$$

より低い次数について同様の計算を行うか、ポワソン分布の平均と分散の値を覚えていれば、以上の結果と合わせることで、ポワソン分布に従う確率変数の 3 次のモーメントの値

$$E[N^3] = (c) \square \text{ を得る。}$$

問 1 (30=10*3) . 【スライド第 2 回】

- (1) 3 とおり . ($A = \{1, 2\}$, $A = \{2, 3\}$, $A = \{1, 3\}$, のいずれか)
- (2) $P[\{1\}]$
- (3) $0.3 \leq P[B] \leq 1$. (等号付き不等号) ($P[\{x, y\}] = P[A] = 0.7$ から $0 \leq P[\{x\}] \leq 0.7$. これと $P[\{c\}] = P[\Omega] - P[A] = 0.3$ から得る . なお x, y の選び方によらず答えは同じ)

問 2 (40=10*4) . 【教科書「統計と確率の基礎」1 章 §1, 2 章 §2, 3 章 §2】

- (1) (a) $(1 - \beta)^2$ (b) β^2 (確率論以前の問題だと思うが, $1 - \beta^2$ と $-\beta^2$ は不可, $(-\beta)^2$ は可 .)
- (2) 期待値の線形性によって $E[S_N]$ は等しい .
 独立性がなければ分散の加法性は成り立たない場合がある . $N = 2$ で考えると, 相関の { 正 0 負 } によって値の大小等があり得るから,
 $V[S_N]$ はこれだけでは決まらず等しくなることもある .

問 3 (30=10*3) . 【教科書「統計と確率の基礎」6 章練習問題 問 3】

- (a) $E[N(N-1)(N-2)]$ ($E[N^3 - 3N^2 + 2N]$ と $E[N^3] - 3E[N^2] + 2E[N]$ も可)
- (b) λ^3
- (c) $\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$ ($\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 1)$ も可)