慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50分	分	
平成27年1月21日(水)5時限施行	受講時限（登録した時限）　時限	採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	確率論入門2	氏　名	

注意：答案用紙は裏を使わないこと． 解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問１．　以下は，レポート１の文章を若干書き換えた文章である．この文章の記号と設定の下で，その下の問に答えよ．

2進数列（0と1の無限列）の集合 $\Omega = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots) \mid s_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,\ldots\}$ を考える．0を裏，1を表と対応することで，Ω を「無限硬貨投げ」の試行の全体集合と考えることもできる．

無限列の全体集合 Ω の部分集合のうちで有限項だけで決まるもの $A \subset \Omega$ を任意に選ぶ．A を指定するのに十分な回数の硬貨投げの有限繰り返しを考えると，表と裏がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ として対応する確率を計算できる．このとき，無限列上の確率測度 P であって，どの A でもこの計算結果が $\mathrm{P}[\,A\,]$ に等しくなるものがあることが知られている．ここで，Ω 上の確率測度 P とは，Ω の部分集合を集めた集合族 $\mathcal{F}$ を定義域とする実数値関数 $\mathrm{P}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ であって，コルモゴロフの公理を満たすものを言うのであった．

この確率空間の上の確率変数列 $\{W_n\}$ を，$\omega = (s_1, s_2, s_3, \ldots) \in \Omega$ に対して $W_0(\omega) = 0$，および，$n \geqq 1$ のとき $W_n(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2s_i - 1)$ で定義して，（原点0を出発点とする）単純ランダムウォークと呼ぶ．単純ランダムウォークは原点から出発して硬貨を投げる毎に表が出れば右へ，裏が出れば左へ1ずつ動くすごろくと考えることができる．

無限列の集合 Ω の上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を考える必要性は，たとえば，『このすごろくが負のマス目（0より左のマス目）に達する前にマス目2に達する事象』を C とおくとき，C は，すごろく板の中の，座標で $-1, 0, 1, 2$ の4個のマス目があれば表せる事象なのに，有限回の硬貨投げの繰り返しの確率空間では表せないことでわかる．無限列の集合の上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ によって，C を次のように有限項で決まる事象たちの可算無限個の排反な和集合で表すことでその確率を計算できる．$C_0 = \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid s_1 = s_2 = 1\}$，および，$n = 1,2,3,\ldots$ に対して $C_n = \{(s_1, s_2, \ldots) \in \Omega \mid s_{2i-1} = 1,\ s_{2i} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n,\ s_{2n+1} = s_{2n+2} = 1\}$ とおくと，これら可算無限個の集合を用いて $C = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ が成り立つ．他方 C_n たちは互いに共通部分を持たないので，P の σ 加法性から $\mathrm{P}[\,C\,]$ は C_n たちの確率を各項とする級数に等しい．

整数 a に対して，初めて位置 a に達する歩数，つまり，$W_n = a$ となる最小の n を T_a とおく．（上記『』内で定義された）事象 C は $C = \{T_2 < T_{-1}\}$ と簡単明瞭に書ける．出発点が1の単純ランダムウォーク $\{W'\}$ も考えることができる．$\{W'_n\}$ に対して初めて位置 a に達する歩数を T'_a と置くと，$\{W_n\}$ にとっての事象 C と同様に事象 $C' = \{T'_2 < T'_{-1}\}$ を考えることができる．$\mathrm{P}[\,C'\,]$ は $\mathrm{P}[\,C\,]$ と同様に計算できるが，次のように計算することもできる．$\{W'_n\}$ が1歩目で右に行くと2に到達するので C' に含まれる．左に行くと0なので，そこから $\{W_n\}$ と確率が等しい．1歩目と2歩目以降は独立なので，$\mathrm{P}[\,C\,]$ を用いて $\mathrm{P}[\,C'\,]$ を計算できる．このような，異なる出発点の単純ランダムウォークの確率を関連づける性質は，単純ランダムウォークのマルコフ性と呼ばれる．マルコフ性を用いると，一般に「マス目 c から出発して a に到達する前に b に到達する確率」を p_c とおくとき，$a < c < b$ を満たす全ての c に対して $p_c = \dfrac{1}{2}\,(p_{c-1} + p_{c+1})$ が成り立つ．これと $p_a = 0,\ p_b = 1$ から p_c が計算できる．

単純ランダムウォークには種々の興味深い性質がある．その一つに反射原理がある．

問．以下，答案用紙は結果だけを書け．

i) コルモゴロフの公理（確率空間の定義）は，P の定義域 $\mathcal{F}$ が σ 加法族であること，すなわち，空集合を要素に持ち，補集合と可算和という集合の2種類の演算について閉じていることを要求する．補集合について閉じていることを式で書くと $A \in \mathcal{F}\ \Rightarrow\ A^c \in \mathcal{F}$ となる．同様

に可算和について閉じていることを式で書くと $A_n \in \mathcal{F},\ n=1,2,\ldots,\ \Rightarrow$ $\boxed{\text{(a)}\qquad\qquad}$

となる．P には非負値で σ 加法性が成り立ち，全測度 1 であることを要求する．全測度 1 を式で書くと $\boxed{\text{(b)}\qquad\qquad}$ となる．空欄 (a)(b) を埋める式をそれぞれ答案用紙に書け．

ii) p と q が $p > q$ を満たす自然数のとき，共分散 $\mathrm{Cov}(W_p, W_q) = \mathrm{E}[\,(W_p - \mathrm{E}[\,W_p\,])(W_q - \mathrm{E}[\,W_q\,])\,]$ を計算せよ．答案用紙は，p または q 以外の記号を含まない形で，結果だけを書け．（$X_i(w) = 2s_i - 1$ とおくと $X_1, X_2, \ldots$ は独立でそれぞれ期待値が 0 で，$W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.）

iii) $\mathrm{P}[\,C\,]$ の値を計算して有理数で表せ．

iv) 2 から出発した単純ランダムウォークが負のマス目に達する前に 3 に達する確率を計算して有理数で表せ．

v) 反射原理を式で書くと原点を出発する単純ランダムウォーク $\{W_n\}$ と自然数 a に対して，$\tilde{W}_i = W_i,\ i \leqq T_a,$ と $\tilde{W}_{i+1} - \tilde{W}_i = -(W_{i+1} - W_i),\ i \geqq T_a,$ で決まる $\{\tilde{W}_i\}$ は単純ランダムウォークであることから，$b < a$ に対して，$\mathrm{P}[\,W_n \leqq b,\ T_a \leqq n\,] = \mathrm{P}[\,\boxed{\qquad\qquad},\ T_a \leqq n\,]$ となる．$\tilde{W}_n,\ a,\ b$ を用いた空欄を埋める適切な式を書け．

問 2． 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の正規分布に従う実数値確率変数たちについて，以下の問に答えよ．（参考（ガウス積分）：$v > 0$ のとき，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/(2v)} dz = \sqrt{2\pi v}$.）答案用紙は結果だけを書け．

i) $v > 0$ とする．実数値確率変数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ が $\rho_v(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}x^2}$ を密度関数とする連続分布に従うとき，X の期待値 $\mathrm{E}[\,X\,]$ と分散 $\mathrm{V}[\,X\,]$ を計算せよ．

ii) X の分布が密度 $\rho_2(x)$（前小問で $v = 2$）を持つ正規分布，Y の分布が密度 $\rho_5(y)$（前小問で $v = 5$）を持つ正規分布，とする．このとき $S = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ と $T = \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$ の共分散 $\mathrm{Cov}(S,T) = \mathrm{E}[\,(S - \mathrm{E}[\,S\,])(T - \mathrm{E}[\,T\,])\,]$ を求めよ．（レポート 2 では結合分布の密度が与えられていたので 2 次形式の対角化が役に立ったが，ここでは，X と Y の関数として S, T が与えられているので，密度の計算ではなく期待値の公式を用いることを勧める．）

iii) 前小問においてさらに X, Y が独立なとき，S と T の分散 $\mathrm{V}[\,S\,]$ と $\mathrm{V}[\,T\,]$ を求めよ

iv) 前小問 iii) と同様の状況で，S と T の結合分布の密度 $\tilde{\rho}(u,v)$ を求めよ．（この小問はレポート 2 の結合分布と積分変数変換が念頭にある．）

v) n を 2 以上の自然数とする．$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，m_i は実数，v_i は正の実数とし，X_i は平均 m_i，分散 v_i の正規分布 $N(m_i, v_i)$ に従う確率変数で，かつ，確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立とする．このとき，和 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の従う分布もまた正規分布になることが（たとえば特性関数の計算によって）わかっている．Z の従う正規分布の平均と分散を求めよ（m_i たちと v_i たちを用いて表せ）．

確率論入門 2　期末試験　**略解**　2015/01/21 服部哲弥

問 1 (50=10*5)．　【ランダムウォーク, コルモゴロフの公理, 相関（レポート 1，教科書第 1,3,13 章)】

i) (a) $\underline{\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}}$ 【$\sum$ は不可，上限 ∞ 以外不可】　(b) $\underline{\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1}$

ii) $\mathrm{V}[\,X_i\,] = \mathrm{E}[\,X_i^2\,] = 1$ および独立確率変数列の分散の加法性から $\mathrm{V}[\,W_q\,] = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \mathrm{V}[\,X_i^2\,] = q$．さらに，$p > q$ のとき，$W_p - W_q = \displaystyle\sum_{i=q+1}^{p} X_i$ の中の X_i たちは $W_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} X_i$ の中の X_i たちと共通のものがないので，$\mathrm{E}[\,(W_p - W_q)\,W_q\,] = 0$．以上を用いると，$p > q$ のとき，
$\mathrm{Cov}(W_p, W_q) = \mathrm{E}[\,W_p\,W_q\,] = \mathrm{E}[\,(W_p - W_q)\,W_q\,] + \mathrm{E}[\,W_q^2\,] = \underline{q}$.

iii) $\mathrm{P}[\,C\,] = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n-2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \underline{\frac{1}{3}}$.

iv) $-1 \leqq c \leqq 3$ に対して，c から出発して -1 に達する前に 3 に達する確率を p_c と書くと，求める値は p_2 で，$p_{-1} = 0$, $p_c = \dfrac{1}{2}(p_{c-1} + p_{c+1})$, $c = 0, 1, 2$, $p_3 = 1$．順番に代入して解くと，$p_0 = \dfrac{1}{4}$, $p_1 = \dfrac{1}{2}$, $\underline{p_2 = \dfrac{3}{4}}$.

v) $\underline{\tilde{W}_n \geqq 2a - b}$　【等号のみは不可】

問 2 (50=10*5)．　【正規分布，相関，独立確率変数の和（レポート 2，3，教科書 5,7 章)】

i) $\rho_v(x)$ は平均 0 分散 v の正規分布の密度関数なので，平均 $\underline{\mathrm{E}[\,X\,] = 0}$，分散 $\underline{\mathrm{V}[\,X\,] = v}$.

ii) 前小問から $\mathrm{E}[\,X\,] = \mathrm{E}[\,Y\,] = 0$ なので，$\mathrm{V}[\,X\,] = \mathrm{E}[\,X^2\,]$, $\mathrm{V}[\,Y\,] = \mathrm{E}[\,Y^2\,]$，および，$\mathrm{E}[\,S\,] = \mathrm{E}[\,T\,] = 0$ となるから，$\mathrm{Cov}(S,T) = \mathrm{E}[\,S\,T\,]$．したがって，期待値の線形性も用いると，
$\mathrm{Cov}(S,T) = \dfrac{1}{2}\mathrm{E}[\,(X+Y)(X-Y)\,] = \dfrac{1}{2}(\mathrm{E}[\,X^2\,] - \mathrm{E}[\,Y^2\,]) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{V}[\,X\,] - \mathrm{V}[\,Y\,])$.
前小問と問題文から，$\mathrm{V}[\,X\,] = 2$, $\mathrm{V}[\,Y\,] = 5$ なので $\underline{\mathrm{Cov}(S,T) = -\dfrac{3}{2}}$.　【符号間違いは不可】

iii) 期待値の線形性に加えて独立確率変数の分散の加法性と定数倍に対する公式も用いると，
$\mathrm{V}[\,S\,] = \mathrm{V}[\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}X\,] + \mathrm{V}[\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}Y\,] = \dfrac{1}{2}(\mathrm{V}[\,X\,] + \mathrm{V}[\,Y\,]) = \underline{\dfrac{7}{2}}$.
$\mathrm{V}[\,T\,] = \mathrm{V}[\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}X\,] + \mathrm{V}[\,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}Y\,] = \dfrac{1}{2}(\mathrm{V}[\,X\,] + \mathrm{V}[\,Y\,]) = \underline{\dfrac{7}{2}}$.

iv) (X,Y) の（結合）分布の密度は $\rho_2(x)\,\rho_5(y)$．一方，(X,Y) の分布から (S,T) の分布への積分変数変換を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix} = {}^tO \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ から，$O = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
O は直交行列であることが ${}^tOO = O{}^tO = E$ を直接計算することで分かる．当然 O の行列式の絶対値は 1 である．よって，$\tilde{\rho}$ は

$$\int_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in I} \tilde{\rho}(u,v)\,dudv = \mathrm{P}[\,\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \in I\,] = \mathrm{P}[\,{}^tO \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in I\,] = \int_{{}^tO \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I} \rho_2(x)\,\rho_5(y)\,dxdy =$$
$$\int_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in I} e^{-(\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v))^2/4}\, e^{-(\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v))^2/10}\, ||O||\, \frac{dudv}{2\pi\sqrt{10}} = \int_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in I} e^{-\frac{1}{40}(7u^2+6uv+7v^2)}\, \frac{dudv}{2\pi\sqrt{10}}.$$

よって $\underline{\tilde{\rho}(u,v) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{10}} e^{-\frac{1}{40}(7u^2+6uv+7v^2)}}$.

v) 期待値の線形性と，独立確率変数の分散の加法性から
$\underline{\mathrm{E}[\,Z\,] = m_1 + \cdots + m_n}$，$\underline{\mathrm{V}[\,Z\,] = v_1 + \cdots + v_n}$.