慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

					試験時間	50分	分
平成28年07月26日(火) 3時限施行		学部　学科　年　組			採　点　欄		※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号					
科目名	ファイナンス数学1	氏　名					

(注1) 行列とベクトルと線形空間に関して以下の記号と用語を断りなく使う．n 次元線形空間を $\mathbb{R}^n$ と書く．m 行 n 列の行列 A に対して $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間 $\{A\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$ を A の像（記号は $\mathrm{Im}\, A = \{A\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n\}$），$\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 $\{\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n \mid A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ を A の核（記号は $\mathrm{Ker}\, A = \{\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n \mid A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}\}$），とそれぞれ呼び，また，$\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 V に対して線形部分空間

$$\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \mid \text{全ての}\overrightarrow{v} \in V\text{ に対して }(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0\}$$

を $V \subset \mathbb{R}^n$ の直交補空間と呼ぶ．$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ はベクトルの内積を表す.（実数 x と y に対して (x, y) は内積でなく成分表示.）線形空間 V の直交補空間の記号を $V^{\perp}$，行列 A の転置行列を ${}^tA$ と書く.

(注2) 1期の市場を考えるとは以下の量を与えることである．なお非負実数を成分とする N 成分列ベクトルを全て集めた集合を ${\mathbb{R}_+}^N$ と書く.

・自然数 N と，時刻0の原資産の単価を縦に並べた N 行の非負値列ベクトル $\overrightarrow{S}_0 \in {\mathbb{R}_+}^N$.

・あらゆる価格の変化の組み合わせの可能性が有限種類でそれを M 種類とし，それを $\Omega = \{\omega_j \mid j = 1, \ldots, M\}$ でラベル付けするとき，各 $j = 1, \ldots, M$ に対して，j 番目の価格変化の組み合わせの時刻1での原資産の単価を縦に並べた N 行の非負値列ベクトル $\overrightarrow{S}_1(\omega_j) \in {\mathbb{R}_+}^N$.

(注3) $\overrightarrow{S}_1(\omega_j)$ を j について横に並べて得られる $N \times M$ 行列を $D = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \cdots\ \overrightarrow{S}_1(\omega_M))$ と書く．この試験では $\overrightarrow{S}_0 \neq \overrightarrow{0}$ とする．$\overrightarrow{S}_0 = \sum_{\omega \in \Omega} \psi(\omega) \overrightarrow{S}_1(\omega)$ を満たす非負値関数 $\psi:\ \Omega \to \mathbb{R}_+$ がもしあれば，$\mathrm{P}_Q[\,\{\omega\}\,] = \dfrac{\psi(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \psi(\omega')}$ で定義される Ω 上の確率測度 P_Q をリスク中立確率という.

問1． $b > 0$，$s > 0$，$N = 2$，$M = 2$，$\overrightarrow{S}_0 = \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{S}_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1.1\,b \\ 1.3\,s \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{S}_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1.1\,b \\ 0.8\,s \end{pmatrix}$，で与えられる2項1期の市場についての以下の計算の空欄 (a)–(d) を，数値と b と s を用いて埋めよ．なお，以下で原資産価格ベクトルの第1成分（単価 b）を無リスク債券，第2成分（単価 s）を株券と呼ぶ.

この市場のリスク中立確率 P_Q は $\mathrm{P}_Q[\,\{\omega_1\}\,] = \boxed{\text{(a)}\qquad}$ で定まる確率測度である.「株券1単位を時刻1に価格 $1.19\,s$ で買う権利（ヨーロッパコールオプション）」の時刻1での価値は，可能性 ω_2 が実現すれば市場で買ったほうが安いので0，ω_1 が実現すれば権利行使して直ちに市場売却する思考実験によって $\boxed{\text{(b)}\qquad}$ である．このオプションを x_B 単位の無リスク債券と x_S 単位の株券のポートフォリオで複製すると $(x_B \times b, x_S \times s) = \boxed{\text{(c)}\qquad\qquad}$ であり，このオプションの時刻0での価値（リスク中立価格）は $\boxed{\text{(d)}\qquad}$ である.

問2． $M = 2$, $N = 3$，$\overrightarrow{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.04 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{S}_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.35 \\ 0.154 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{S}_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，で定まる1期市場において，数理ファイナンスの第1基本定理に関連する以下の問に答えよ.

i) A を 3 次正方行列，$\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ を 3 成分列ベクトルとする．全ての成分が正の 3 成分列ベクトル $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して $\boxed{} = \overrightarrow{0}$ を満たすとすると，

$$0 = (\boxed{}, \overrightarrow{x}) = y_1({}^t A\overrightarrow{x})_1 + y_2({}^t A\overrightarrow{x})_2 + y_3({}^t A\overrightarrow{x})_3$$

だから，${}^t A\overrightarrow{x}$ が「零ベクトルでなくかつ全成分非負になる」ような $\overrightarrow{x}$ は存在しないことがわかる．以上が Stiemke の補題の同値関係のうちやさしい向きの主張の証明の概要になるように，2 箇所の空欄に共通する数式を答えよ．

ii) この問 2 の冒頭の 1 期市場が（強い意味で）無裁定であることを小問 i) の結果から結論する際に行列 A を具体的にどうおくか．数値で答えよ．

iii) この問 2 の冒頭の 1 期市場のリスク中立確率を P_Q と書くとき，$\mathrm{P}_Q[\ \{\omega_1\}\ ]$ を求めよ．

問 3． 数理ファイナンスの第 2 基本定理に関連する以下の問に答えよ．

i) N と M を自然数として，A を N 行 M 列の行列とするとき，$\mathrm{Im}\, {}^t A = \mathbb{R}^M \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, A = \{\overrightarrow{0}\}$ を証明する以下の証明の概要の中の空欄を，この問題用紙の中にある記号の適切な組み合わせによる等式で埋めよ．

(1) $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\, A$（すなわち $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$）と，$(\forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^N)\ (\overrightarrow{y}, A\overrightarrow{x}) = 0$ は同値である．
(2) 内積の性質から $(\overrightarrow{y}, A\overrightarrow{x}) = ({}^t A\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$.
(3) 像の定義から $\{{}^t A\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^N\} = \mathrm{Im}\, {}^t A$.
(4) (1)(2)(3) と「変数変換」$\overrightarrow{w} = {}^t A\overrightarrow{y}$ によって，$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\forall \overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}\, {}^t A)\ (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}) = 0$.
(5) 核の定義と直交補空間の定義から，(4) は集合の等式 $\boxed{}$ を意味する．
(6) $\overrightarrow{0} \in \mathbb{R}^M$ は全てのベクトルと直交するので，$\{\overrightarrow{0}\}^\perp = \mathbb{R}^M$．$(V^\perp)^\perp = V$ だから $\{\overrightarrow{0}\} = \mathbb{R}^{M\perp}$.
(7) (5)(6) から $\mathrm{Im}\, {}^t A = \mathbb{R}^M$ と $\mathrm{Ker}\, A = \{\overrightarrow{0}\}$ は同値.

ii) 次の『』内についてその下の問に答えよ．『N 個の原資産と M 個の価格変化の組み合わせ Ω を持つ 1 期の市場を考え，$\overrightarrow{S}_0 \neq \overrightarrow{0}$ とする．この市場にリスク中立確率 P_Q がただ一つ存在するとする．リスク中立確率があることの定義から $\overrightarrow{S}_0 = \sum_{\omega \in \Omega} \psi(\omega)\overrightarrow{S}_1(\omega)$ を満たす非負値関数 ψ がある．$\overrightarrow{\psi} = \begin{pmatrix} \psi(\omega_1) \\ \vdots \\ \psi(\omega_M) \end{pmatrix}$ と置くと，D の定義と合わせて $\overrightarrow{S}_0 = D\overrightarrow{\psi}$．もしここで $D\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{0}$ と $\overrightarrow{\phi} \neq \overrightarrow{0}$ を満たす $\overrightarrow{\phi}$ があると，$D(\overrightarrow{\psi} + \overrightarrow{\phi}) = \overrightarrow{S}_0$ も成り立ち，$\overrightarrow{S}_0 \neq \overrightarrow{0}$ から $\overrightarrow{\psi}$ と $\overrightarrow{\phi}$ は 1 次独立だから，<u>異なるリスク中立確率が 2 つあることになって</u>仮定に反する．よってそのような $\overrightarrow{\phi}$ はない．集合で書けば $\mathrm{Ker}\, D = \{\overrightarrow{0}\}$．小問 i) から $\mathrm{Im}\, {}^t D = \mathbb{R}^M$．よって任意の $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^M$ に対して $\overrightarrow{X} = {}^t D\,\overrightarrow{x}$ を満たす $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$ がある．関数の形で書くと，任意のデリバティブ（関数）$X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ に対して $X = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_1)$ を満たす（複製）ポートフォリオ $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$ がある．よって市場は完備である.』

問． 下線部について,（背理法の仮定から導かれる）2 つ目の（実際には上記文章の後半で無いことがわかる）リスク中立確率を $\mathrm{P}_{Q'}$ とおくとき，$\omega \in \Omega$ に対して，$\mathrm{P}_{Q'}[\ \{\omega\}\ ]$ を上の文中の記号を用いて表せ．$\psi(\omega)$ と $\phi(\omega)$ は必ず用いること．

iii) $\overrightarrow{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{S}_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{S}_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.95 \\ 0.8 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{S}_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.86 \\ x \end{pmatrix}$，で定まる 1 期市場 $(M = N = 3)$ が無裁定だが非完備なとき，x を求めよ．

ファイナンス数学 1　期末試験　**略解**　2016/07/26 服部哲弥

問 1 (40).　(a) 0.6, (b) $0.11\,s$, (c) $(-0.16\,s, 0.22\,s)$, (d) $0.06\,s$

【$1.1 \times \overrightarrow{S}_0 = \mathrm{P}_Q[\,\{\omega_1\}\,]\overrightarrow{S}_1(\omega_1) + \mathrm{P}_Q[\,\{\omega_2\}\,]\overrightarrow{S}_1(\omega_2)$．オプションの時刻 t での価値を X_t とおくと，$X_1 = (S_{1,2} - 1.19)_+ = x_B S_{1,1} + x_S S_{1,2}$．現在価値は $X_0 = x_B S_{0,1} + x_S S_{0,2}$.】

問 2 (30).

i) $A\overrightarrow{y}$

ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1.1 & 1.1 \\ -1 & 1.35 & 1 \\ -0.04 & 0.154 & 0 \end{pmatrix}$　【$A = (-\overrightarrow{S}_0\ \overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \overrightarrow{S}_1(\omega_2))$.】

iii) $\mathrm{P}_Q[\,\{\omega_1\}\,] = \dfrac{2}{7}$　【$\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1.1}(\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\mathrm{P}_Q[\,\{\omega_1\}\,] + \overrightarrow{S}_1(\omega_2)\mathrm{P}_Q[\,\{\omega_2\}\,])$】

問 3 (30).

i) $\mathrm{Ker}\,A = (\mathrm{Im}\,{}^tA)^\perp$

ii) $\mathrm{P}_{Q'}[\,\{\omega\}\,] = \dfrac{\psi(\omega) + \phi(\omega)}{\displaystyle\sum_{\omega' \in \Omega}(\psi(\omega') + \phi(\omega'))}$

iii) $x = 0.62 = \dfrac{31}{50}$

【第 2 基本定理から，

非完備⇔確率測度が非一意 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,D \neq \{\overrightarrow{0}\} \Leftrightarrow 0 = \det D = \dfrac{11}{40}(\dfrac{31}{50} - x)$，よって $x = \dfrac{31}{50}$.

はき出し法で整理すると $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{10}{11} - \psi_3 \\ \frac{12}{5}\psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} + \frac{9}{25}\psi_3 \\ \frac{4}{11} - \frac{34}{25}\psi_3 \end{pmatrix}$.

$\rho_i = \mathrm{P}_Q[\,\{\omega_i\}\,]$ とおくと，$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\psi_i = \frac{10}{11}$ から $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \dfrac{11}{10}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 + 0.36\rho_3 \\ 0.4 - 1.36\rho_3 \end{pmatrix}$.

正値リスク中立確率測度があるから第 1 基本定理から無裁定（強)】