慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

		試験時間	**50** 分
平成 28 年 07 月 26 日 (火) 4 時限施行		学部　　学科　　年　　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	経済数学 I	氏　名	

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答案は答えだけでよい．

問１．　実 3 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を
$f(x,y,z) = -x^3 + x^2 + 3y^2 - 2yz + 3z^2 - 18y + 6z + 27$ で定める．以下の問 i) — v) に答えよ．

i) f の勾配ベクトル $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z)$ の零点，すなわち，$\overrightarrow{\nabla} f(a,b,c) = (0\ \ 0\ \ 0)$ を満たす点 $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．答案用紙は答えだけを書け．

ii) f のヘッセ行列

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

を計算せよ．答案用紙は答えだけを書け．

iii) 点 $(x,y,z) = (0,3,0)$ での f のヘッセ行列 $H_f(0,3,0)$ の正の固有値の個数と負の固有値の個数をそれぞれ答え，この点で f が {極大値を取る，極小値を取る，鞍点（峠点）である，鞍点でもなく極値も取らない，極値を取るか取らないかは f の 2 階偏導関数まででは結論が出ない，極値は取らないが峠（鞍）の形か否かは f の 2 階偏導関数まででは結論が出ない} のいずれであるかを答えよ．
答案用紙は，<u>点 $(0,3,0)$： 正固有値 100 個，負固有値 0 個，答えがわからない</u>，などのように書け．

iv) 点 $(x,y,z) = (0,0,0)$ での f のヘッセ行列 $H_f(0,0,0)$ の正の固有値の個数と負の固有値の個数をそれぞれ答え，この点で f が {極大値を取る，極小値を取る，鞍点（峠点）である，鞍点でもなく極値も取らない，極値を取るか取らないかは f の 2 階偏導関数まででは結論が出ない，極値は取らないが峠（鞍）の形か否かは f の 2 階偏導関数まででは結論が出ない} のいずれであるかを答えよ．
答案用紙は，<u>点 $(0,0,0)$： 正固有値 100 個，負固有値 0 個，答えがわからない</u>，などのように書け．

v) 実 3 変数関数 $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $g(x,y,z) = 3y - z$ で定める．ヤコビ行列
$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\nabla} f \\ \overrightarrow{\nabla} g \end{pmatrix}(x,y,z)$ の階数が 1 以下になる点 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ のうち $g(x,y,z) = 0$ を満たす点をすべて求めよ．答案用紙は結果のみを書け．

問２．　n を自然数とし $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする．平均値の定理によると，点 $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して，そのある近傍 $U_\varepsilon(\overrightarrow{a})$ で，

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{a}) + (\overrightarrow{\nabla} f)(\overrightarrow{a} + \theta(\overrightarrow{x}) \times (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}))\,(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}),\quad \overrightarrow{x} \in U_\varepsilon(\overrightarrow{a}),$$

が成り立つような，開区間 $(0,1)$ に値を取る $\overrightarrow{x}$ の関数 $\theta\colon\ \mathbb{R}^n \to (0,1)$ がある．（ここで f の勾配ベクトル $\overrightarrow{\nabla} f$ は行ベクトルに値を取ることとし，位置ベクトル $\overrightarrow{x}$ や $\overrightarrow{a}$ は列ベクトルとして，右辺第 2 項は行列の積の表記とするので，実質はベクトルの内積なっている.）

一般にはθはfに複雑に依存するので，この定理は左辺をより複雑な右辺で表していて役立たないように見えるが，たとえば,『$\overrightarrow{a}$ に近い点 $\overrightarrow{x}$ での関数値 $f(\overrightarrow{x})$ は $f(\overrightarrow{a})$ に近い値であり，その差はより具体的にはノルム $\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}\|$ に比例する量以下である』ことが平均値の定理からわかる．以下の文章がその理由の説明になるように (a)–(e) の空欄を埋めよ．答案用紙には (a) ..., (b) ..., ... のように書け．なお，(a) はこの問のここまでの文中にある用語または数式，(b) と (d) と (e) はこの問の以下の文中にある用語または数式，(c) は変数としては $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ だけを含む数式，である．

まず，平均値の定理の結論のうち $0<\theta(\overrightarrow{x})<1$ に注目すると，$\overrightarrow{x}\in U_\varepsilon(\overrightarrow{a})$ ならば，$\overrightarrow{a}+\theta(\overrightarrow{x})\times(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a})\in U_\varepsilon(\overrightarrow{a})$ である．

次に，f は $\boxed{\text{(a)}\qquad}$ なので，導関数 $\overrightarrow{\nabla} f$ は連続関数，すなわち，任意の $\gamma>0$ に対して，『$\overrightarrow{y}\in U_\varepsilon(\overrightarrow{a})$ ならば $\|\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{y})-\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{a})\|<\gamma$』が成り立つ $\varepsilon>0$ がある．特に（どうとってもよいが）$\gamma=1$ と選ぶと，このことを三角不等式と組み合わせることで

$$(*)\qquad \|\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{y})\| \leqq \|\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{a})\| + \boxed{\text{(b)}\qquad\qquad\qquad} < \|\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{a})\|+1,\quad \overrightarrow{y}\in U_\varepsilon(\overrightarrow{a}),$$

となる $\varepsilon>0$ があることになる．以下この ε を固定する．

ここで，ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ とノルム $\|\overrightarrow{a}\|$ や $\|\overrightarrow{b}\|$ に対して成り立つシュワルツの不等式 $\boxed{\text{(c)}\qquad\qquad\qquad}$ を思い出す.

以上において $\overrightarrow{y}=\boxed{\text{(d)}\qquad\qquad\qquad}$ とおいて組み合わせることで,

$$\begin{aligned}
&\left|(\overrightarrow{\nabla} f)(\overrightarrow{a}+\theta(\overrightarrow{x})\times(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}))\,(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a})\right| \\
&\leqq \|(\overrightarrow{\nabla} f)(\overrightarrow{a}+\theta(\overrightarrow{x})\times(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}))\|\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}\| && \text{（シュワルツの不等式 }(c)\text{）} \\
&< \left(\boxed{\text{(e)}\qquad\qquad\qquad}\right)\times\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}\| && \text{（関係式 }(*)\text{ と }\overrightarrow{y}=(d)\text{）}
\end{aligned}$$

となって，平均値の定理から，$\overrightarrow{x}\in U_\varepsilon(\overrightarrow{a})$ のとき関数値の差 $|f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{a})|$ は $\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}\|$ の定数倍以下であることが示せた.

経済数学 I　期末試験　**略解**　2016/07/26 服部哲弥

問 1 (50=10*5).

【　$f(x,y,z)=x^2(1-x)+(y+z-3)^2+2(y-z-3)^2$　】

i) $(a,b,c)=(0,3,0),\ (\frac{2}{3},3,0)$　【　$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z)=(-x(3x-2)\ \ 6y-2z-18\ \ -2y+6z+6)$　】

ii) $H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} -6x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

iii) 点 $(0,3,0)$： 正固有値 3 個，負固有値 0 個，極小値を取る

【　$H_f(0,y,z)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
固有値 $2,4,8$，$\overrightarrow{\nabla} f(0,3,0)=(0\ \ 0\ \ 0)$　】

iv) 点 $(0,0,0)$： 正固有値 3 個，負固有値 0 個，鞍点でもなく極値も取らない

【　$\overrightarrow{\nabla} f(0,0,0)=(0\ \ -18\ \ 6)\neq(0\ \ 0\ \ 0)$，すなわち，勾配ベクトルがゼロベクトルではない　】

v) $(0,0,0),\ (\frac{2}{3},0,0)$

【　$J(x,y,z)=\begin{pmatrix} -3x^2+2x & 6y-2z-18 & -2y+6z+6 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$，$J$ の階数 $1 \Leftrightarrow J$ の 2 行が 1 次従属
（$\overrightarrow{\nabla} g(x,y,z)=(0\ \ 3\ \ -1)\neq(0\ \ 0\ \ 0)$ なので）$\Leftrightarrow \exists\lambda;\ \overrightarrow{\nabla} f+\lambda\overrightarrow{\nabla} g=(0\ \ 0\ \ 0)$　】

問 2 (50=10*5).

(a) C^1 級，(b) $\|\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{y})-\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{a})\|$，(c) $|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})|\leqq\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|$，
(d) $\overrightarrow{a}+\theta(\overrightarrow{x})\times(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a})$，(e) $\|\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{a})\|+1$