確率論

服部哲弥

確率論は，高校の教科書や身近な話題では，サイコロや宝くじ，そして，20 世紀までは天気予報，など，当たらないときが多く，当たると妙に目立つことと結びつくことが多いようです.

実際は，分子の運動から見たときの薬品の体内での働きや，株価などの未来の変動を補填する契約を幾らで売買すべきかという価格付けや，大きな組織の決断場面における成功の可能性が高い戦術の採用など，途方もない大金が動く場面でも応用される，高度な数学です.

確率論について，短い歴史の紹介の中に，その特徴を感じ取っていただくことが，この記事の目標です.

1　世界を変えた手紙

確率論は数学の中では若い学問です.

たとえば，黎明期の幾何学は，古代のエジプトで，氾濫するナイル川の流域の肥沃な土地の測量の必要に刺激されて発展した，と言われるようです．その対比では，黎明期の確率論は時代をはるか下って，近代から現代にかけて，天気予報のような未来のことや，事故の原因や薬の効き目のように観測データから背後の仕組みや法則を推測する必要に刺激されて発展した，と何千年か後の未来の人類に言われる，と思います.

確率論は，パスカル (1623–1662) とフェルマー (1601–1665) の往復書簡から始まった，とされています [1]．賭け事のプロたちが途中でゲームをやめなければならなかったとき，場に置いた掛け金をその時点の優劣に応じてどう配分するのが公平か，という問題が，二人の手紙のやり取りの中で議論されました．たとえば，A と B の二人が五分五分の公平な対戦を繰り返して，対戦ごとに勝ったほうに 1 点を与え，先に 4 点取ったほうがゲームの勝者として掛け金を総取りするゲームを考えます．A が 2 点，B が 1 点得たところで閉店の時刻が来てゲームを中断しなければならなくなったとき，掛け金をどういう比率で分配すればよいか，という問題です.

これが確率論の始まり，というのは，まず，A が勝つことも B が勝つことも，中断のため実際には起きなかったけれども，両者の「起きたかもしれない可能性」の大小を議論したこと，そして，単に種々の考え方を並べるだけではなく，理屈に基づいて具体的な数値を見い出したこと，最後に，その議論と結論が文書として記録に残ったこと，などを指すのでしょう.

確率論の始まりは,「実際には起きないことが起きたかもしれない可能性の大きさ」を測ることだと書きましたが，これは,「土地の広さ」を測ることに比べると，抽象的です．数学を苦手にする人は，数学が抽象的で何を言いたいのかわからない，と言うことが多いように思いますが，確率論は数学的な抽象性の前に，測る対象が抽象的である，という二重の抽象性が特徴です.

昔の大政治家が，新規まき直し（ニューディール）になったら何か変えたいか，と取材されたときに,「（ルーレットで）黒ではなく赤に賭けておくのだった」というような返事をしたそうです．別のところにある本題をはぐらかしている様子ですが，それはともかく,「実際に起きなかった」ことは，遡ってやり直すことが絶対にできない，という重みがあります．にもかかわらず，こうした言葉が残ることからもわかるように,「起きたかもしれない可能性」が人々の関心を惹きつけます.

パスカルとフェルマーの書簡は，そのような，幻のようにもみえる対象が数学的考察の対象になる，という実例を明確にした点で画期的です．先ほどの例では，中断した時点から，あと 3 回対戦すれば，A または B のいずれかが 4 点に達してゲームは終了します．その 3 回について，それぞれ A が勝つ場合と B が勝つ場合を考え，その 8 通りの組み合わせの中でそれぞれがゲームの勝者になる場合の数を数えてその比をとればそれが可能性の比を表し，分配金の比を表す，と二人は結論しました．

この程度のことは，現代では，高校の教科書で習う範囲に収まっています．それどころか，集合を用いて，すっきりと数学的に定式化します．勝ち負けの一つのパターンを一つの要素とする全体集合を考えて，その中の A が勝つ要素たちだけを集めた部分集合を A が勝つ事象とすることや，（五分五分の対戦なので）一つ一つの要素は同程度に確からしいとして，場合の数を用いて確率を計算すること，結果として得られる確定値，すなわち分配金，を期待値と呼ぶことなど，全て高校の教科書の範囲です．これらの定義は，パスカルとフェルマー以降の研究者たちによって積み上げられた成果です．

しかし，今から 350 年前，まだこれらの数学概念が無かった時代に，夢まぼろしではない数学的対象がここにある，と気づいたのは天才ならでは，です．往復書簡は，異なる考察がぶつかった試行錯誤の記録になっていて，その深浅によって，そこに数学的対象があることが，より印象的に浮かび上がります．

2　大数の法則と中心極限定理

18 世紀に入ると，こんにち確率論で学ぶ重要な基礎的結果が次々と見出されました．

そこに数学がある，とひとたび明らかになれば，数学者が参入することは，そこに山があれば登山家が登ることと同様のようです．確率論が扱う対象の抽象性は，ひとたび数学の対象と認知されれば，数学の抽象性に慣れている一流の数学者には決定的な障害では無かったようです．

現代の確率論の進展から過去を振り返ると，18 世紀初期の確率論として特に名前をあげるべきは，J. ベルヌーイ (1654–1705) による大数の法則とド・モアブル (1667–1754) による中心極限定理と思います．この二人は，これらの定理を二項分布の場合について示しました．いずれも重要なので，高校の数学を少し思い出すことにします．

二項分布は，前節の例のような勝敗の繰り返しにおける勝ちの回数の確率です．硬貨を N 回投げたとき表が k 回出る確率ということもできます．上の例では 1 回あたり勝負は五分五分としましたが，大数の法則については，勝ちの確率あるいは表が出る確率 p が 0.5 でなくてもかまいません．不公平な勝負や不公平な硬貨でも大数の法則は成り立ち，N を大きくした極限で，k と N の比が定数 p に近づきます．これが二項分布における大数の法則です．

大数の法則は，二項分布という特定の確率からはみ出して一般化されます．この一般化を説明する上で，確率分布を二項分布から取り替えるという言い方では理解しにくいので，もう少し復習を続けて，次のように考え直します．i 回目に投げた硬貨が表のとき $X_i = 1$，裏のとき $X_i = 0$ となる確率変数を考えます．この確率変数を i について 1 から N まで和を取ると，N 回の硬貨投げのうちの表の枚数に等しくなります．したがって，二項分布における大数の法則は,「確率変数 X_i たちの平均が，N が大きくなる極限で，X_i たち共通の期待値 p に等しい,」と書き直せます．この辺りから大学の数学の範囲となりますが，たとえば，X_i たちが独立で，期待値が有限な共通の確率分布に従うならば，X_i たちの平均は N が大きくなる極限で期待値に収束する，という形で大数の法則が成り立ちます．確率変数 X_i たちは硬貨投げのときのように 0 と 1 の値に限る必要はなく，その分布が実数上のどんな確率分布でもかまいません．

独立という概念は，確率論の数学の中での位置づけにおいて特徴的な概念です．独立性が初めて明示

的に意識されたのは 18 世紀のようです．また，18 世紀の確率論は，当時急速に進歩しつつあった微積分学の応用が進み，数学技術的に急速に進歩しました．たとえば，ラプラス (1749–1827) は，確率そのものを扱う代わりに，解析的に扱いやすい母関数に議論を抽象化することで，級数や微積分を駆使して多くの新しい公式を積み上げました．ラプラスの書 [2] は 18 世紀の確率論の進歩の集大成と言えるでしょう．

N 個の独立な確率変数の平均の従う分布について，元の確率変数の性質のうち期待値以外は N が大きくなると大数の法則によって消えますが，中心極限定理は,「消え方のいちばん遅い性質が分散であって,（期待値と）分散を変えないように変数変換しながら極限を取ると正規分布と呼ばれる分布に近づく,」という定理です．この定理も一般性が高く，たとえば大数の法則のところに書いた仮定に加えて，分散が有限正の値で存在すれば，成り立ちます．時代を少し先走りますが，中心極限定理を一般的に証明する際に用いられる確率分布の特性関数は，関数解析などで学ぶフーリエ変換と密接な関係があります．

こんにちに至るまで，確率変数の和や平均を扱う問題やモデルが新たな研究対象となるたびに，まず，大数の法則と中心極限定理を調べるのが標準の手順です．たとえば，確率変数の独立性が強く破れると，極限分布は正規分布からずれます．再び時代を先走りますが，平衡系統計力学における臨界現象は，正規分布と異なる極限分布が見える物理現象として，20 世紀後半以降の確率論の先端の研究課題の一つです．

3　ミクロとマクロ

18 世紀の確率論の急速な進歩の反動か，19 世紀半ばの確率論の進歩は革命的ではなかったようです．しかし，数学の外側では，20 世紀に確率論の革命的進歩を促すことになる理論的研究が大きく進みました．化学反応を説明する原子や分子という概念と，蒸気機関などの熱と運動の関係についての熱力学，それに続く 19 世紀後半の気体分子運動論を経て統計力学までの大きな理論自然科学的進歩によって，目に見える物体の存在や運動が，多数の小さな粒子の複雑な運動の結果だというもののみかたがもたらされました．

他方，液体や気体の運動を記述する流体力学の基礎的な自然法則として有名な，ナヴィエ（ナビエ）－ストークスの方程式が提唱されたのも 19 世紀のことです．これは，流体を空間に広がった対象として，その速度などの物理量を時空の変数の関数として，その時間変化を偏微分方程式として表したものです．高校では 1 変数関数の微分しか学びませんが，それを自然に拡張して，2 つ以上の変数に依存して変化する関数の微分を考えたものを偏微分と呼びます．本誌に偏微分方程式の紹介記事があることを期待して，残りの説明は割愛します．

小さな粒子の不規則な運動が多数集まることで，目に見える大きさの流体が偏微分方程式で記述される運動をする，というもののみかたは，数学の視点から見ると，時空の情報を持つ確率変数たちの和が，大数の法則によってしかるべき極限で決定論的な量になり，さらに，その極限は，時空の変数に関して偏微分方程式で特徴づけることができる，と主張したことになります．時空依存性を持つ確率モデルの極限が時空変数に関する偏微分方程式に従う，という形に精密化した大数の法則は，流体力学極限と呼ばれる，20 世紀後半以降の確率論の先端の研究課題の一つです．

19 世紀は，メンデル (1822–1884) が長年にわたるエンドウ豆の大規模な交配実験に基づいて遺伝子に関するメンデルの法則を見出した世紀でもあります．日常見るマクロな現象が，目に見えないミクロの世界の確率で記述される現象の結果である，というもののみかたが広がり，20 世紀の確率論の飛躍を数学の外から促した世紀といえそうです．

4　確率論，数学になる

20 世紀初頭に，長さや面積や体積など，そして，一見これらとは異質な，個数を数えることも含めて，集合の「大きさ」を測る量に共通する数学的本質が明らかになりました．これらは，いずれも正または 0 の値をとり，加法性を持ちます．加法性とは，共通部分を持たない集合の和集合についての値はそれぞれの集合についての値の和に等しいことを言います．さらに可算無限個の集合についても，値の和を級数の意味として，加法性が矛盾無く拡張できることがわかりました．可算和まで許して量を測る行為そのもののを抽象した，測度の概念の誕生です [3].

長さや面積や個数を数えることは，それぞれ線分，平面，自然数の集合を全体集合とする測度になります．さらに，直積測度，すなわち，たとえば長方体の体積を底面積かける高さで定義することなどを拡張して得られる測度に基づくことで，ルベーグ積分と呼ばれる積分が定義できます．本誌に測度の紹介記事があることを期待して，残りの説明は割愛します．

測度の概念が確立すると，コルモゴロフ (1903–1987) は，確率の数学的研究が測度に立脚すべきことを見抜き，確率は全体集合の大きさが 1 の測度である，という明快な定義に達しました [4].

ゲームの得点が非負整数値しか取らないのに対して，正規分布は実数値の上の確率を与えます．18 世紀の段階ではどちらも確率であるという認識はありましたが，両者を統一的に扱うための数学的概念は不十分で，離散的な確率は場合の数と和で計算し，連続分布は積分をもちいて計算する，というバラバラな定式化でした．測度の概念によって両者は一つにまとまりました．また，大数の法則では，極限の確率変数についての強い意味で考えるためには，無限個の独立確率変数を用意する必要があります．そのような無限個の確率変数が存在する確率空間はあるか，という問いにも肯定的に答えることができるようになりました．

確率論に特徴的な概念も測度論の数学的枠組みにぴったり収まりました．たとえば，独立性は，測度の定義域となりうる集合族（シグマ加法族）の間の独立性が本質であることが明確になり，シグマ加法族の列，あるいは，時刻変数をパラメータとするシグマ加法族，は確率過程の研究などを通して，現代確率論の特徴の一つになっています．

測度論に基づく 20 世紀以降の確率論は公理論的確率論と呼ぶこともあります．ここでは，仮に『数学になった確率論』と呼びます．記事の最初で，確率の持つ二重の抽象性，数学としての抽象性だけでなく現実の対象としての抽象性，が確率の理解を妨げる可能性を書きました．これを，数学になった確率論の視点から眺めると，土台になっている全体集合を具体的に定めなくても，意味のある数学が展開できることを意味します．抽象的に見える問いの答えが一つに定まることを，抽象的な集合の大きさを測る量としての測度に数学的な意味があることと，とらえ直すことができます．

このことを数学的に具体化すると，面積のような有限次元空間の図形の大きさだけでなく，たとえば関数の集合のような複雑な集合も，確率としてその大きさを数学的に測れることを意味します．高校の教科書のたとえでは，関数が書かれたボールが袋の中に入っていて，一つ取り出すと関数が決まる，ということです．これを，パラメータ（変数）を持つ確率変数と見て，確率過程の研究の基礎がここに確立しました．このように，コルモゴロフが確率論を数学の一分野に位置づけることに成功して，確率論が扱う対象の広さと数学的な精密さが飛躍的に拡大しました．

確率論と偏微分方程式論の関係について，前節で流体力学極限を先走って説明しましたが，より基礎的な関係があります．おそらくもっとも有名で重要な確率過程の例であるブラウン運動は，これまたきわめて基本的な線形偏微分方程式の例である拡散方程式と具体的な美しい関係があります．その一般化として得られるある種の確率過程と線形偏微分方程式の関係を与えるファインマン・カッツの公式は，理

論物理学で経路積分と呼ばれる直観的な式の，数学的に正しい対応結果です．二つの分野をつなぐディリクレ形式の理論は，種々の数学の分野の交差点となる分野であり，20 世紀の確率論の輝かしい成果の一つです．

5　伊藤清

確率過程の研究は，関数の複雑な性質を，その性質を持つ関数の集合の確率を測ることで研究する確率解析と呼ばれる分野を開きました．確率解析は大学院の水準の内容なので記事の守備範囲を超えますが，伊藤清 (1915–2008) を初めとする日本人数学者の貢献の大きい分野です．

高校の微積分学の中で部分積分の公式を習います．この公式は二つの関数の微分を含む項の積分に関する公式です．前節で確率過程を関数が書かれたボールの入った袋にたとえましたが，前節で言及したブラウン運動に対応する「確率の袋」は，ボールに書かれている関数が，いたるところ微分不可能なギザギザした関数です．高校で習う部分積分の公式はそのままでは定義もできません．伊藤の公式と呼ばれる，確率解析の基礎となる定理は，部分積分の公式が確率積分の公式として意味を持つことを示し，しかも微分可能な場合とは異なる，特徴的な項を持つことを示します．確率積分や伊藤の公式に基づいて，確率微分方程式と呼ばれる方程式を通して，ブラウン運動などの基礎的な確率過程から複雑な確率過程を作り出すことや，その性質を調べることができるようになりました．伊藤清は確率解析の研究によって 1998 年度の京都賞を受賞しました．

確率解析は，伊藤清自身の予想を超えて，種々の科学に応用されました．たとえば，経済学では，金融派生商品についてのブラック・ショールズの公式をマートンが伊藤の公式に基づいて証明し，数理ファイナンスと呼ばれる研究を大きく進歩させるきっかけとなりました．伊藤清は，社会への影響の大きい数学に国際数学~~者会議~~が授与するガウス賞の，第 1 回（2006 年度）受賞者となりました．なお，前のほうの節で紹介したラプラスの著書 [2] の翻訳者の一人が伊藤清ですが，巻末に確率論の歴史を概観する記事を書いていて，参考になります．

伊藤清は，数理ファイナンスを紹介するテレビ番組の中で確率積分を説明した際に，「厳密というだけでなく，これ以外に方法がないということなんです」と語っています．自身の確率積分の定義が，数学的に最も自然な定式化であることを強調されたのかもしれません．日本人数学者が理論の創生期から活躍した分野は，結果として生まれる論文だけでなく，生の言葉や書き残した随筆 [5] などを通して，先駆者の発想や苦悩がほの見えるので，研究者を目指す若い方々の参考になると思います．

数学の中では若い分野である確率論は，各時代の数学内および数学外の進歩に刺激を受け，2000 年を超える歴史を持つ先輩格の分野も手本にして数学として着実に，かつ急速に進歩しましたが，その若さゆえに，まだまだ強力で深く整理された数学に向けて，道半ばのように思います．

参考文献

[1] K. デブリン，原啓介訳「世界を変えた手紙」，岩波書店，2010 年

[2] P.S. ラプラス，伊藤清・樋口順四郎訳「確率論」，共立出版，1986 年

[3] H. ルベーグ「積分・長さおよび面積」，吉田耕作・松原稔訳，共立出版，1969 年

[4] A.N. コルモゴロフ，坂本實訳「確率論の基礎概念」，筑摩書房，2010 年

[5] 伊藤清「確率論と私」，岩波書店，2010 年

服部哲弥（慶應義塾大学・経済）

URL: http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/hattori.htm