

数理統計学

服部哲弥

東北大学大学院理学研究科

数学セミナー編集部から、大学2年の数理統計学の学び方について書いてくれ、と先日頼まれましたので、講義を担当し教科書を書いている立場から少し書きます。

数理統計学は通常は大学2年で学びます！「確率・統計」や「統計学」などと呼ばれることもあると思います。以下、編集部の指示した項目に従って、ざっと様子をお見せします。

1 高校の教科書との関係

高校の数学の教科書にある項目のうち、大学の数理統計学の講義にいちばん直接に関係するのは（当たり前ですが）確率と統計です。文部科学省の定めた学習指導要領の項目では、（A）数学Aの「場合の数と確率」、（B）数学Bの「統計とコンピュータ」、そして（C）数学Cの「確率分布」と「統計処理」です。対応する高校の教科書の章の題名もほぼ同じ名称でしょう。実際に高校の教科書を見ると、大学生といえどもあなどれない内容が載っています。試みに、数学Cの「統計処理」の章からキーワードを拾ってみたところ、一例ですが、二項分布、正規分布、無作為抽出、大数の法則、推定、信頼区間、といった言葉が並んでいました。これらの項目をもしすべて高校で学んで、大学入学後も忘れずにいるならば、大学で現在広く行われているであろう数理統計学の入門講義の半分くらいは飛ばすことができます。その分、高校の教科書では深入りできなかったことに時間を割くことができればもっと大学の講義らしい理解が深まるだろうと思います。深入りしたい大学の講義らしい内容というのは、たとえば、

- データの統計処理に確率論がなぜどのように関わるのか。たとえばデータを集める際の無作為抽出は、確率変数の独立性を用いた確率論の数学的議論が適用できることを保証すること。
- 大数の法則の証明。仮定をどの程度おくかによって難易度の違う証明があるが、たとえば、独立同分布確率変数列で4次モーメントまで有限の場合。
- 中心極限定理。二項分布 $B(n, p)$ が n が大きいと

き正規分布に近づくということの数学的に正確な表現と分布の収束ということの意味。

- 信頼区間の意味をどう理解するか。たとえば信頼水準99%の信頼区間といっても、その区間に母数が入る確率が99%という意味ではないこと。

講義そのものになってしまうので列挙はここでやめますが、高校の教科書では対応するキーワードとして書いてはあってもこれらの踏み込んだ内容は避けてあり、大学の講義で強調することが期待されています。これらのことに高校で立ち入らないのは、もちろん、授業時間が限られているのですべてをやるわけにはいかないこともありますが、指導要領に、

- 数学Cの「確率分布」の中の「確率の計算」について、『(数学Aの続きとして)条件つき確率などを扱う程度』
- 数学Bの「統計とコンピュータ」、および、数学Cの「統計処理」について、『理論的な考察には深入りしない』

と、なっていることにもよります。高校の段階で一つ一つのことに深入りして消化不良になったり、全体像を見失っても困るので、ほどほどにしておこうという教育的配慮ということでしょう。

さて、理工系は大学入試で数学Cまで要求することが多いと思いますから、教える側としては、少なくとも理工系の数理統計学の受講生諸君は、みなさん高校の数学の教科書のすべての章を履修していると思いたいところですが、ところが、落とし穴があって、

- 一部の学科で受験生を増やすために数学Cまで要求しない場合がある
- もっと深刻なことに、数学Bと数学Cについては文部科学省の指導要領に『実態に応じて、内容の中から適宜選択させる』と明記してあって、そもそも「統計とコンピュータ」「確率分布」「統計処理」をまったく習わずに高校を卒業できる（「未履修」にならないで正規に卒業できる）

ということがあります。前者については、生物学や農学でもデータの統計処理をして論文を書きますから、受験生に数学Cを要求しないのは、勉強しなくても大学に行ける、と騙している気がします（もちろん、勉強する気がないならば大学に行ってはいけません。）後

者は、高校の数学 B, C の授業時間が教科書全部を履修するには足りない量に定められています。これも、履修したことになっているのに実際は全部は履修していない、という意味では羊頭狗肉の気味があります。

以上のことを見渡して、高校の数学との関係については、次のことを強調します：高校数学 A, B, C の確率と統計に関連する 4 つの章を復習してください。もし高校の授業で省略された場合は、教科書を片付ける前に一度勉強してください。そうすれば、大学の数理統計学はたいへん分かりやすい科目となります。その上で、高校の教科書に書いていなかったことは何か、ということに意識を集中してください。そうすれば大学の講義らしい講義を受けることができるでしょう。

2 講義の内容や目標

数理統計学は、誤差を伴うデータを根拠として自然法則を導いたり社会的に有効な意思決定を行うことを、数学を用いることで支援する方法論を研究します。

実際に、現場で応用しようとするときは、分野ごとに固有の事情を考えないといけません。自然法則を見つける場合は時間をかけてデータをたくさん集めるかわりに正確な因果関係を見いだすことがだいじでしょうし、医療現場では最初から大勢の人に時間をかけて実験するわけにはいきませんから、少ないデータで迅速に、しかし致命的な勘違いだけは何とか避けたい、ということから始まるでしょう。こういった個別の事情ごとに研究すべき内容は大きく変わりますが、すべてをひっくるめて共通の基礎となる数理統計学の入口の部分、つまり個別の実用上の知識以前に、どの学科に進んでも当然知っていると考えられている共通の基礎事項、が大学 2 年頃に習う数理統計学の内容です。もう少し具体的な内容は以下のようなことが考えられます：

- 確率分布（二項分布，正規分布）
- 統計学に必要な確率論の基礎事項（確率変数，期待値と分散，独立性）
- 確率論と数理統計学の対応（確率変数と標本）
- 統計的推測の基礎原理（点推定，検定，区間推定）
- その他，進んだ話題

また、学習の目標という点からは、具体的には次のような事項があげられるでしょう：

- 基礎的な（たとえば正規分布についての）確率の計算が統計学の入門的基礎に必要な範囲でできる。
- 確率論の基礎事項（たとえば確率分布や確率変数，期待値と分散）に統計学の入門的基礎の理解に必要な範囲で慣れる。
- 古典的・基礎的な数理統計学の推定・検定の考え方を理解する。
- 数理統計学に興味を持ち，その社会的重要性に気づく。

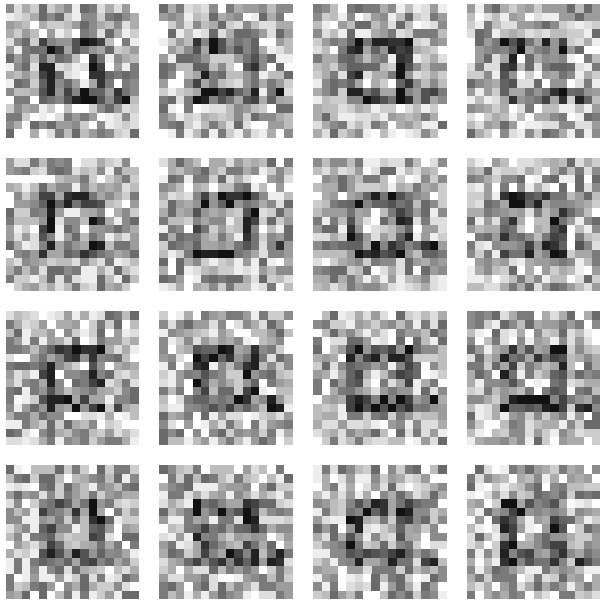
3 広がりや応用

実用上の応用範囲は際限なく広いと思います。上にも書いたように、実験結果から自然法則を決めることや、医療現場での薬品等の効果検証、経済学における投資行動の分析、農業や工業における生産方法の改善効果、など、できるだけ少ないデータでできるだけ効果的な結論を合理的に得たい場面はいくらでも考えられます。

そのような実用に至るまでには、個別の分野の固有の事情に通じている必要があるので、大学の入門的講義が直接個別の応用につながることも上で注意しました。むしろ、どの分野でも必要と考えられる共通の基礎を学ぶということは、個別の分野の目先の目的にとらわれることなく、統計的手法で可能なことと不可能なことをきちんと見分けることによって、統計的手法の名の下に自らをごまかすことなく、他人にだまされることもない、そういう基本的な素養や態度を身につけることが目標だということです。

それではその共通の基礎になる基本的な素養は何か、ということですが、詳しいことは実際の講義のお楽しみ、ということにして、簡単なクイズを出しておきましょう。

問 1. 銀行の ATM や駅や空港の指定券のカウンターなどで、機械や窓口は複数あるのに待っている人の列を一列にして、空いた窓口から順に誘導するのが普通になっています。実は 20 世紀には、空港を除くと、スーパーのレジのように、窓口ごとに列ができて、後から来た人は思い思いに早そうな窓口の後ろに並ぶのが普通でした。一列で待つのと窓口ごとに並ぶのは何が違うのでしょうか？何を重視して一列で待つ方式を社会が採用したのでしょうか？



問2. 図の16個の画像は、濃い色で書かれた図形にランダムな濃さのノイズを加えた絵です。ノイズは16枚の絵のあいだで違いますが、元の図形(シグナル)は同一です(情報の列のうち目的とする部分をシグナル(信号)、目的としない部分をノイズ(雑音)と呼びます。)さて、16枚の絵に共通する元の図形を当ててください。単純な形ですが少し構造があります。

問3. このクイズは高校の教科書でベイズの定理を勉強したかた向けです。

人口10万人の市で殺人事件が起こりX氏が容疑者となりました。犯人が残した血痕の血液型は100人に1人が持つ珍しい血液型でしたが、X氏は同じ血液型でした。X氏が犯人である確率はいくらでしょうか、という問題に、次のように解答したとします。BをX氏が犯人である事象、AをX氏の血液型が犯人のと一致する事象、 $p = P[B]$ はX氏が犯人であることの事前確率とすると、条件つき確率について、 $P[A|B] = 1$, $P[A|B^c] = 0.01$ だからベイズの定理から

$$P[B|A] = \frac{1 \times p}{1 \times p + 0.01 \times (1 - p)} = \frac{p}{0.99p + 0.01}.$$

pが五分五分($p = 0.5$)ならばX氏が99%犯人という計算になる。実際、100人に1人の血液型が一致、と聞くと99%というのは妥当な印象だろう。

さて、この解答は適切な統計学的判断と言えるでしょうか? もし言えないならば、どこに問題があるでしょうか?

4 教科書

微分・積分の入門的教科書よりは少ないと思います。統計学の入門的教科書は恐ろしくなるほどたくさんあります。まずはどれか一冊ということになりますが、当然、著者としては自分の書いた本を自信をもって挙げます(^_^);

「統計と確率の基礎」第2版, 服部哲弥著, 学術図書出版社, 2006年。

我田引水で恐縮ですが、先ほど書いたクイズの答えはこの本に書いてあります。

この本の特徴は、数理統計学で学ぶ基礎的な内容について、実際の場面や進んだ知識など基礎講義の先にあるものとの結びつきに注意を払いつつ、著者自身の問題意識や体験から選んだ類書にないオリジナルなエピソードや材料をふんだんに取り入れて、読み物としてもおもしろくした入門的教科書、ということです。

学術図書出版社さんは、大学の教科書を大学生協などを通じて売りさばく販売戦略を主体としている会社のように、残念ながら普通の本屋さんでは通常は私の教科書は見かけません。大学でも教科書販売の時期を除くと見かけませんし、教科書に指定して下さる先生がいらっしゃらないキャンパスでも見かけません。しかし、本屋さんで注文して下されば買うことができますし、さいわいなことに、Amazon.co.jpなどのwebの本屋さんを通してweb経由で注文することもできます。ジュンク堂書店を始め、大きな本屋さんもweb経由の注文ができるようになっています。

数学セミナー編集部の意向としては、何冊か本をあげて、それぞれにコメントを付けてほしいようでしたが、自分の書いた教科書をさしおいてほかの本を取り上げるのは、私の教科書を出版して下さった学術図書さんの手前、遠慮したいと思います。私の教科書の巻末にコメント付きで何冊か参考書をあげておきましたので参考にしてください。服部哲弥の書いた教科書は意地でも買いたくないが、ほかの本の推薦は見たい、という意地悪な読者さんがもしこの記事を読んで下さっているならば、お礼の印に私のweb

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~hattori/gakjutu.htm>をご覧ください。数理統計学で何を学ぶかということの様子をもう少し書いておきました。また、このwebページから「補足と訂正」のリンクをたどってもらえれば、この本の巻末の参考文献部分を見ていただくこともできます。

上に書いたように、この本は入門的事項だけではなく、専門的な事項を学ぶ際にあわてないですむように、やや進んだ事項も取り入れました。逆に言えば、入門的事項だけに限ればもう少し薄い教科書も可能ですし、実際、私の本よりも薄い教科書はいくつかあります。そのような薄い本や一見やさしげな本の中には、もちろんきちんとした教科書もありますが、強調しなければいけないことがらを省略して、たとえば計算のしかただけに特化したものもあるようです。そういう本はやさしそうにみえても、大学の教科書という観点からお薦めしません。

また、数学的な内容への敷居が高い読者を意識して、ビジュアル的に工夫した参考書も見受けられます。取っつきやすくする工夫そのものは立派なことで、敬意を表しますが、そういった本の中には、肝心の数学的な内容のところは普通の教科書と大差ない、標準的な説明で終わっているものもあるような気がします。同じ紙数を割くならば、内容についていろいろな角度から説明を試みるほうが、取っつきは悪くても理解が深まるのではないかと私は思います。

個別の本の紹介は遠慮しましたが、以上のことを念頭に置いてご自身にあった本を探していただければさいわいに思います。

服部哲弥（東北大学・理）