σ 加法族　－　やさしい問題について

毎年，講義に演習の時間もほしいという要望が学生諸君から出ることもあって，演習問題作成のために σ 加法族と測度に関して資料を収集した．以下の記事はこれに基づくため，基礎的な話であることをお断りしておいて，本題にすすむ．

測度論（ルベーグ積分）は私が在籍する数学科の教員に人気がない．リーマン積分しか使ったことがないという意見を聞いたこともある．カリキュラム改訂では必修科目から選択科目になった.（他大学の例では，選択科目にしたが，やはりまずいということで再改訂したと聞いている.）非常勤の先生が嘆いておられたという噂を聞くと申し訳なく思う．

私が口を出すことではないが，測度論は不当に近寄りがたく思われている気がする．大学院入試問題でも教科書どおりの初等的出題がある．そこまでしないと解いてくれない現実があるのだろう．

$\mathbf{R}$ における可測集合列 $\{E_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が単調減少のとき

$$m(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

は成立するか？成立するならば，それを証明せよ．また，成立しないのであれば，例を述べよ．ただし，$m(\cdot)$ はルベーグ測度を表す．　**(富山大学, 1997 年度)**

さすがにこれならば解けると思いたいが，受験生諸君は落とし穴に注意．例えば， $m(E_1) < \infty$ ならば，という条件がないと一般には結論が成立しない．実際 $E_n = \{x \in \mathbf{R} \mid x > n\}$ が問題の反例になる．

測度とは非負で（値として無限大を許すが恒等的に無限大ではない）可算加法性を持つ集合関数であり，その定義域が後述する σ 加法族になっているものをいう．この定義は長さや面積の持つ「大きさの測り方」の性質を抽象した概念である．抽象化という点から見た測度論の功績の一つは,「大きさ」の直感の働かない集合，例えば関数の集合，の大きさを測れる（自明でない測度を定義できる）ことである．関数の集合上の測度の例としてはウィーナー測度が有名である.（1997年　月号の特集「ルベーグ積分がわかりたい」の杉田先生の記事を参照して頂きたい．本記事はこの特集の一連の記事と合わせて読んで頂ければ，なお幸いである.）

σ 加法族という概念は，測度の定義域として測度論の教科書の最初に登場する．空でない集合族が σ 加法族であるとは，補集合と可算和に関して閉じていることである．簡単な定義である．測度の定義域としての σ 加法族を考えれば自然な定義でもある．可算和に関して閉じているのは測度の可算加法性を定式化するのに自然であり，補集合に関して閉じていることで，測度の非負性から測度の単調性を得る．しかし，測度論の勉強にあたって σ 加法族は最初の関門らしい．

Ω を任意の集合とし，Ω の部分集合の族で σ–集合体になっているものを $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ とする．このとき次に答えよ．

(1) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ はまた σ 加法族になることを示せ．
(2) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ は必ずしも σ 加法族にならないことを反例をもって示せ．

（ヒント：$\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ として考えてみよ.）

(お茶の水女子大学, 1994 年度)

（記号の統一のため原文の X を Ω に変えた.）

σ–集合体は σ 加法族と同義である．σ 加法族の不人気を出題者が心配するかのように親切なヒントがついている．受験生諸君はさらに進んで $\Omega = \{1,2,3\}$ でもできないか考えてほしい．

小さい Ω だけではなく，小さな σ 加法族の例を考えておくことも悪くはない．最小の σ 加法族は $\{\emptyset, \Omega\}$，その次は $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ である.（後者については $|\Omega| \geq 2$ かつ $\emptyset \neq A \neq \Omega$ とする.）受験生諸君は次に小さい σ 加法族を求めてみられたい．

σ 加法族に対応して，より素朴な概念として，有限加法族（有限集合体）がある．空でない集合族が有限加法族であるとは補集合と有限和に関して閉じていることをいう．σ 加法族の定義との違いは有限和について閉じているか可算和についても閉じているかの違いである．

$\mathcal{A}$ を空間 Ω 上の有限集合体， $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ から生成される σ–集合体，P を $\mathcal{B}$ 上の確率測度とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ と $B \in \mathcal{B}$ に対して，$\mathcal{A}$ の元 A と C が存在して $A \subset B \subset C$ かつ $P(C) - P(A) < \epsilon$ をみたすことを証明せよ．　**(大阪市立大学, 1987 年度)**

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．$\mathcal{F}$ が有限加法族 $\mathcal{G}$ によって生成されているとき，任意の $\mathcal{F}$ の元 A と任意の $\epsilon > 0$ に対して，$P(A \triangle B) < \epsilon$ を満たす $\mathcal{G}$ の元 B が存在することを示せ．但し，$\triangle$ は対称差とする．

服部　哲弥

(大阪市立大学, 1993 年度)

$\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族であることを $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ を生成するという．確率測度とは $P(\Omega)=1$ を満たす測度のことをいう．また，対象差とは $A\triangle B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$ のことである．

2つの問題はどちらも，σ 加法族に含まれる集合はその σ 加法族を生成する有限加法族の集合で近似できる，という「常識」を主張している．但し，後の問題は解けるが，前の問題は反例がある．$\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$ を自然数全体の集合，$\mathcal{B}=2^\Omega$ を，自然数の集合を全て集めた集合族とする．$A\subset\Omega$ に対して $P(A)=\displaystyle\sum_{n\in A}2^{-n}$ で P を定義すると $\mathcal{B}$ 上の確率測度になる．このとき $\mathcal{A}=\{A\subset\Omega \mid A$ または A^c が 1 を含まない有限集合 $\}$，は $\mathcal{B}$ を生成する有限加法族である．ところが $B=\{1,3,5,7,\cdots\}\in\mathcal{B}$, $\epsilon=1/4>0$ をとると，問題の主張を満たすような A はとれない．

実際の試験問題はたぶん引用とは異なっていたのだろう．筆者の参照した資料の誤植か．しかし，時に問題自体を疑うほどの心構えが σ 加法族を分かりにくいと思う気持ちを突破するための最善の方法かもしれない．

Ω を空でない集合，ξ を Ω 上で定義された実数値関数，$\mathcal{A}$ を $\mathbf{R}$ の部分集合よりなる有限加法族とする．

(1) $\mathcal{C}:=\{\xi^{-1}(A);\ A\in\mathcal{A}\}$ は Ω 上の有限加法族である．

(2) $\mathcal{C}$ を含む最小の σ 加法族 $\sigma(\mathcal{C})$ が存在する．

(3) $\sigma(\mathcal{C})=\{\xi^{-1}(A);\ A\in\sigma(\mathcal{A})\}$ が成立する．ただし $\sigma(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族とする．

(千葉大学, 1994 年度)

前の問題やこの問題の (3) には標準的な解法が知られている．「目標の性質を持つ集合を全て集めた集合族 $\mathcal{H}$ が σ 加法族である」ことを証明することで問題を解く，という解法である．(3) は右辺が左辺を包含することと逆向きの包含関係と，それぞれ別に証明するのが分かりやすいが，後者の証明に即して説明しよう．

$\xi^{-1}(A)\in\sigma(\mathcal{C})$ を満たす集合 A を全て集めた集合族を $\mathcal{H}$ とおく．$A\in\mathcal{A}$ ならば (1) から $\xi^{-1}(A)\in C\subset\sigma(\mathcal{C})$ だから $A\in\mathcal{H}$ となる．よって，$\mathcal{A}\subset\mathcal{H}$ である．

さらに，$\mathcal{H}$ が σ 加法族であることが証明できたとしよう．すると $\sigma(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族だから $\mathcal{H}\supset\sigma(\mathcal{A})$ となる．つまり $A\in\sigma(\mathcal{A})$ ならば $A\in\mathcal{H}$ でもあることになる．$\mathcal{H}$ の定義から，これは $\xi^{-1}(A)\in\sigma(\mathcal{C})$ を意味する．要約すると，$A\in\sigma(\mathcal{A})$ のとき $\xi^{-1}(A)\in\sigma(\mathcal{C})$ が言えたことになる．よって (3) の右辺 $\{\xi^{-1}(A)\mid A\in\sigma(\mathcal{A})\}$ は左辺 $\sigma(\mathcal{C})$ に含まれ，証明が終わる．

従って，問題は「目標の性質を持つ集合を全て集めた集合族 $\mathcal{H}$ が σ 加法族である」ことを証明することに帰着された．

このような論法は初学者に抽象的という印象を与える一因かも知れないが，代数学の初等的論法であって σ 加法族に固有の方法ではない．むしろ，入口でこだわっていて σ 加法族の本当の特徴が見えないことが不人気の理由かも知れない，という気がしてくる．そこで，少し先のほうの話題を拾ってみよう．

測度論の教科書の最初の方には書いてないが，σ 加法族の持つ重要な意味として，不規則な現象において確定した情報を表すという側面がある．

高校時代の確率の授業で事象は集合であると習うと思う．もう少しきちんというと，確率論では事象とは可測集合のことである．ある事象 A が起きるか起きないかが一つの情報である．

天気予報が当たらないものの代表のように言われていた時代があった．そのころ「決して当たらない天気予報は，必ず当たる天気予報と同じくらい役に立つ」というキャッチフレーズ (?) があった．「決して当たらない」ならば，予報で雨が降ると言われれば傘を持たず，降らないと言われれば傘を持っていけば良いからだ．つまり，集合（事象）A とその補集合（余事象）A^c はどちらも A がおきたかどうかという同じ情報を与える．同様に二つの事象の組で考えると，四つの集合 $A\cap B$, $A\cap B^c$, $A^c\cap B$, $A^c\cap B^c$ は全て同じ一組の情報を与える．

このように，「一つの情報」に対応するのは一つの集合ではなく，集合を集めた集合族である．測度論で自然な集合族は σ 加法族だから，これらの集合が生成する σ 加法族を対応させるのが適切である．例えば事象 A の実現の当否という情報は $\{\emptyset,A,A^c,\Omega\}$ という σ 加法族に対応する．

この視点を拡張して，関数の持つ情報を考えることができる．例えば先ほどの問題の (3) の式に戻ると，

右辺は ξ という関数の持つ情報を表す．通常は，$\mathcal{A}$ として，実数の区間を全て集めた集合族をとる．さらに Ω に確率測度が定義されていて確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ になっているとしよう．このとき，ξ の持つ情報という概念が役に立つためには $\sigma(\mathcal{C})$ に含まれる集合は事象になっている，つまり，$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$ が成り立っているべきだが，これは ξ が確率変数である，ということの定義に他ならない．

σ 加法族の持つ情報という意味あいに注目すれば，σ 加法族は測度論の証明を厳密にするためだけの消極的な概念ではないことが分かる．このことを納得してもらえれば初学者も測度論を学ぶ動機を得るかも知れない．そういう視点から入試問題を探すことを考えてみた．確率論では独立性という概念が σ 加法族の持つ情報という視点の有効性を内包し，マルチンゲールという概念がその有効成分を抽出する．σ 加法族の持つ情報という意味の有効性を具体的に表現しているのはマルチンゲールということになるだろう．残念ながら，適当な問題が大学院入試問題に見つからなかった．筆者の調査不足であろう．識者のご教示を乞う．

入試問題の代わりに，マルチンゲールの初学者向け教科書から一問引用しておく．残念ながら本記事の余白では説明しきれないので，マルチンゲールの説明やこの問題との関わりに関心のある受験生諸君は，出典の教科書を見ていただきたい．

アルファベット大文字をでたらめにタイプし続ける．毎回 26 種類の文字のいずれかを等確率で打つとき，平均何回タイプを打てば ABRACADABRA という 11 文字の文字列が出てくるか？**(D. Williams, Probability with martingales, 1991, Cambridge Univ. Press.)**

（最初の 11 文字がこの文字列になる確率は 26^{-11} だから，初めてこの文字列が出てくるまで平均 26^{11} 回タイプする，と漠然と考えるかもしれない．これは全く的外れと言うほど悪くはない予想だが，しかし，正解ではない！）

このような視点が最大限の威力を発揮するのは確率過程のように非可算無限個の確率変数を考えるときである．コルモゴロフが測度論に立脚して確率論を定式化したおかげで，不規則な運動の数学的な研究が確率過程論として展開できるようになった．確率過程は，例えば，微小な粒子の水中における不規則な運動として前世紀に発見されたブラウン運動を数学的に研究するための土台になる．ある時刻までの運動を表す確率変数の族に対応する σ 加法族は，その時刻までに起きたこと（知り得た情報）という意味を持つ．しかし，「σ 加法族に関するやさしい入試問題」の記事としてはこの辺りが限度かも知れない．

測度論は私が在籍する数学科の教員に人気がない，と最初に書いた．先に進めば専門的になるのは数学のどの分野でも同じことだが，初等的な部分にまで温度差が感じられるのは気のせいだろうか．σ 加法族という概念が今世紀になってやっと登場したという，その歴史の浅さが最大の理由かもしれない，などと想像する．しかし，もうすぐ世紀が変わる．私が口を出すことではないが，いま勉強中の若い諸君が教える立場になる頃には，測度論の授業をやめようという話が数学科の中で持ち上がることもなくなるかも知れない．

問題の収集・整理に当たって立教大学の津田稔朗氏の協力を頂いた．記して感謝したい．なお，記事で紹介しきれなかった問題も勉強したい諸君は，ホームページ `http://150.93.96.124/math/hattori/hattori.htm` の講義のページの中の解析学 I のページを参照していただきたい．

はっとり てつや／立教大学理学部