

場の量子論の数学的構成

渡辺 浩

日本医科大学 基礎科学

1997.3.17

概要

Scalar 場, fermion 場, gauge 場の理論に即して, 場の量子論の数学的構成の論理を解説する. 技術的詳細を省き, 構成の原理に重点をおく.

謝辞

この解説は, 1997 年 2 月の佐賀大学における集中講義の講義ノートに加筆したものである. 講義の機会を与えて下さった久保雅弘先生はじめ, 佐賀大学数学教室の皆様に感謝します. また, 講義ノートの作成に関して数々の助言をして下さった服部哲弥氏に感謝します.

目次

0はじめに	3
1 Euclidean field theory	4
2 ϕ^4 model	5
2.1 形式的な定義	6
2.2 Gaussian measure の紫外性質	7
2.3 Regularizations	7
2.4 Osterwalder-Schrader Axioms	9
2.5 摂動展開	10
3 無限体積極限	11
3.1 Polymer 表現	12
3.2 Cluster 展開	14
3.3 Mayer 展開	17
3.4 Reflection positivity	18
3.5 Correlation inequality	20
4 ϕ_2^4 の構成	21
4.1 Renormalization	21
4.2 紫外極限	25
4.3 無限体積極限	26
5 ϕ_3^4, ϕ_4^4 の繰りこみ群解析	27
5.1 Renormalization	27
5.2 繰りこみ群	30
5.3 繰りこみ群の実現	32
5.4 繰りこみ群の flow	34
5.5 繰りこみ群の歴史	35
6 Fermion	36
6.1 Grassmann 積分	36
6.2 Fermion の量子化	37
6.3 Fermion determinant	39
6.4 Renormalized determinant	41
7 Gauge 場	43
7.1 Gauge field measure	43
7.2 QED ₂	44
7.3 Dirac 作用素の格子化	48
7.4 格子 fermion	50
7.5 Diamagnetic bound	52
参考文献	54

0 はじめに

場の量子論は、 \mathbf{R}^d 上の各点¹ x に付随した random variable $\phi(x)$ の間の microscopic な相関(近接相互作用)が引き起こす現象を定式化し分析するための理論である。

図式的に言うと、場の量子論は、場の古典論を“量子化”したものであり、ある種の汎関数積分を計算する問題として² 提示される。

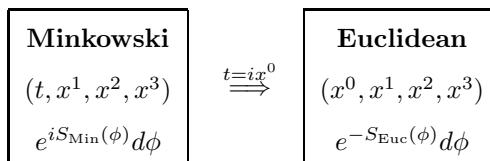


しかし、場の量子論は場の無限自由度ゆえに、その定義自体に nontrivial な数学的問題を含み、繰りこみ (renormalization) と呼ばれる特徴的な処方が必要となる。即ち

場の量子論は、繰りこみを施された汎関数積分によって記述される。

具体的な場の量子論の model としては、相対論的に不变な素粒子の相互作用に関する relativistic field theory が代表的である。現在に至るまで、その数学的存在を仮定した上で model の物理的内容が分析されて来たが、model の数学的存在証明は、3 次元以下において成功をおさめたものの、4 次元の model に対しては、自然法則として重要な意味を担うものであるにもかかわらず、いまだに確かなアプローチは見出されていない。

さて、場の量子論の model の数学的存在証明を目指すとき、今日では Euclidean field theory からのアプローチをとるのが普通である。Euclidean field theory とは、formal には、relativistic field theory における時間変数 t を $ix^0 (x^0 \in \mathbf{R})$ と置き、Minkowski 計量を Euclid 計量で置き換えたものである：



Euclid 化すると量子的揺らぎが確率論的揺らぎに変わり、関数空間上の measure として、場の理論を数学的に意味づけるという道が開ける。また、Euclid 化された場の理論は、統計力学と共に数学的基盤をもつので、統計力学的手法を援用し得るという利点もある。

この解説では、Euclidean field theory の構成論を、scalar 場、fermion 場、gauge 場の理論に即して紹介したい³。

ところで、場の量子論に至る理論物理の(大雑把な)歴史を解析学の(大雑把な)歴史と対比させてみると、次のように空白が残る。

理論物理	Newton 力学	場の古典論	量子力学	場の量子論
解析学	微分積分学	偏微分方程式	関数解析	??

いずれ、場の量子論自体を研究対象とする数学が成立するものと考えられる。

¹ 一般には多様体上の各点

² 別の定式化もある [20]。

³ 素粒子論の標準的見解によれば、実在する(はずの)素粒子は、これら 3 つのカテゴリーに分類される。

1 Euclidean field theory

Euclidean field theory は, \mathbf{R}^d の各点 x に付随した random variable $\phi(x)$ に関するある種の確率論であり, その統計的(量子的)期待値を与える表式

$$\langle F(\phi) \rangle = \frac{1}{Z} \int F(\phi) e^{-V(\phi)} d\mu(\phi) \quad (1.1)$$

$$Z = \int e^{-V(\phi)} d\mu(\phi) \quad (1.2)$$

によって formal に“定義”される. ここで, $d\mu(\phi)$ は Gaussian probability measure, $V(\phi)$ は $\phi(\cdot)$ の functional で potential と呼ばれる. 特に $V = 0$ のとき, (1.1) は Gauss 積分となり, 物理的に相互作用のない理論(自由場)を定義する. そして 0 でない(ϕ の高々 2 次式でない) potential によって, 物理的相互作用が記述されると考える.

形式的な積分 (1.1)(1.2) に数学的意味を与える過程で問題となる点を列挙しよう.

Semi-boundedness

積分 (1.1)(1.2) が構成可能であるためには, potential の lower bound の存在

$$\inf_{\phi} V(\phi) > -\infty \quad (1.3)$$

が基本的である.

Regularization

Gaussian measure μ の sample field ϕ の regularity が悪いために, ϕ を V に代入できないという問題が起きる. そこで Gaussian measure の regularization

$$\mu \implies \mu_{\epsilon} \quad (1.4)$$

を導入する. ただし

- $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で, μ_{ϵ} は μ に収束し,
- $\epsilon > 0$ に対して, measure μ_{ϵ} の意味で確率 1 で, sample field ϕ の regularity が改善され, $V(\phi)$ が well-defined になる

ようにしておく. また, \mathbf{R}^d を何らかの意味で bounded region に制限する regularization も必要である.

つまり, 場の理論が内蔵する無限個の自由度を 2 つの方向

- 紫外 (UV) 方向 : $\phi(x)$ にいくらでも近い $\phi(y)$ が存在する
- 赤外 (IR) 方向 : $\phi(x)$ からいくらでも遠い $\phi(y)$ が存在する

に分けたとき, 各方向の cutoff が必要なのである.

Renormalization

上記の regularization を施した上で, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限が存在するかどうか調べるのだが, 多くの場合この単純な極限は存在しない. この極限が存在するようにするために, ϵ に依存するある種の項(counterterm) $\delta V_{\epsilon}(\phi)$ を付加して,

$$V_{\epsilon}(\phi) = V(\phi) + \delta V_{\epsilon}(\phi) \quad (1.5)$$

とおき, $V(\phi)$ を $V_\epsilon(\phi)$ で置き換えることが必要になる. このような処方を renormalization という. Counterterm の選び方が, 極限の存否とその性質を左右する.

極限の構成

一般に, regularization と renormalization を施された積分

$$\langle F(\phi) \rangle_\epsilon = \frac{1}{Z_\epsilon} \int F(\phi) e^{-V_\epsilon(\phi)} d\mu_\epsilon(\phi) \quad (1.6)$$

$$Z_\epsilon = \int e^{-V_\epsilon(\phi)} d\mu_\epsilon(\phi) \quad (1.7)$$

の極限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle F(\phi) \rangle_\epsilon \quad (1.8)$$

について, 次の 3 つの可能性がある.

- (1) limit は存在しない, またはつまらない limit をもつ (全ての期待値が 0 となる等)
- (2) Gaussian measure に収束する (triviality)
- (3) Non-Gaussian measure に収束する (nontriviality)

Counterterm を適切に選ばないと, (1) のような結果になる. そうでなくとも, (2) のように極限が Gauss になってしまうことがある. 構成論は, もちろん (3) の結果を望んでいる.

Minkowski 化

Euclidean field theory を relativistic field theory に翻訳し得るためには, ある特定の条件を満たしていかなければならない (Osterwalder-Schrader axioms, [Section 2.4]).

構成的場の理論の目標

Well-defined な積分 (1.6)(1.7) を出発点として,

- $\epsilon \rightarrow 0$ の極限が存在するか
- その極限は trivial か non-trivial か
- relativistic field theory に翻訳できるか

を調べることが, 構成的場の理論の目標である. しかしながら, このプログラムが完成しているのは時空 2 次元と 3 次元のモデルに限られており,

- 4 次元時空⁴, nontrivial field theory⁵ は存在するか

は, 現在に至るまで未解決である.

2 ϕ^4 model

ϕ^4 model の構成問題を定式化する. 実際の構成については次節以下でその概要を解説する.

⁴ 即ち我々の時空で

⁵ 即ち自然法則

2.1 形式的な定義

$\lambda > 0$ に対し, 形式的な積分

$$\langle F(\phi) \rangle = \frac{1}{Z} \int F(\phi) e^{-V(\phi)} d\mu_C(\phi) \quad (2.1)$$

$$Z = \int e^{-V(\phi)} d\mu_C(\phi) \quad (2.2)$$

$$V(\phi) = \lambda \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)^4 dx \quad (2.3)$$

で “定義” される理論を d 次元 ϕ^4 model と言う⁶. $\phi(\cdot)$ は実数値を取る random field, μ_C は,

$$\text{mean} : \int \phi(x) d\mu_C(\phi) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^d \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{covariance} : \int \phi(x)\phi(y) d\mu_C(\phi) &= (-\Delta + m^2)^{-1}(x, y) = C(x, y), \\ &x, y \in \mathbf{R}^d, m \geq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

の Gaussian probability measure である (Theorem 2.1). Gaussian covariance C は,

$$C(x, y) \sim \begin{cases} -\text{const.} \log|x-y|, & d = 2, \\ \text{const.}|x-y|^{-d+2}, & d > 2, \end{cases} \quad |x-y| \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

$$C(x, y) \sim e^{-\text{const.}m|x-y|}, \quad |x-y| \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

という漸近形を持ち, formal には

$$C(x, y) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} dp \quad (2.8)$$

と書ける. m を mass と言う. また 古典論との対応を見るときには, action $\mathcal{A}(\phi)$ を explicit に取り出して

$$\langle F(\phi) \rangle = \frac{1}{Z'} \int d\phi F(\phi) e^{-\mathcal{A}(\phi)} \quad (2.9)$$

$$\mathcal{A}(\phi) = \lambda \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)^4 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} (|\nabla \phi(x)|^2 + m^2 \phi(x)^2) dx \quad (2.10)$$

と書くこともある⁷. 特に $F(\phi)$ が field の積のとき,

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \rangle \quad (2.11)$$

を Schwinger function という. Model が内包する粒子の質量や束縛状態 (の有無) などの物理的内容は, Schwinger function から引き出すことができる [2, 1].

Potential の semi-boundedness は $\lambda > 0$ のもとで成立する. 問題は, この仮定のもとで積分 (2.1) を厳密に構成し得るかどうかである. そのために, まず積分を regularize して well-defined な足場を作る.

⁶ ここでは potential V を ϕ の 4 次式に限るが, 2 次元では, 適当な性質をもつ多項式に議論を一般化できる ($P(\phi)_2$ 理論 [21]). しかし Section 5.1 で述べるように, potential は繰りこみ可能でなければならないので, 例えば 4 次元では高々 4 次式でなければならない.

⁷ $d = 1$ のとき, 時空座標 x を時間座標 t で置き換え, field $\phi(x)$ を $x(t)$ と書くと, (2.1)(2.9) は, 拡散方程式の解を与える Feynman-Kac formula の形になる. さらに拡散方程式において t を it で置き換え “Minkowski 化” したのが量子力学である. ただし, $d = 1$ の場の理論, 即ち量子力学は, 繰りこみを必要としない.

2.2 Gaussian measure の紫外性質

(2.4),(2.5) を満たす Gauss 測度の存在は、次の Minlos の定理の帰結である。

Theorem 2.1. [9] $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ 上の functional $S(\cdot)$ が以下の 3 条件を満たすとき、 $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ 上の probability measure $d\mu(\phi)$ で

$$S(f) = \int e^{i\phi(f)} d\mu(\phi), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \quad (2.12)$$

なるものが存在する：

- (1) **Continuity** $S(f_n) \rightarrow S(f)$, if $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$
- (2) **Positivity** $\sum_{n,m=1}^N \bar{c}_n c_m S(f_n - f_m) \geq 0$, $f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $c_n \in \mathbf{C}$
- (3) **Normalization** $S(0) = 1$

特に、characteristic function

$$S(f) = \exp\left(-\frac{1}{2}(f, Cf)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} dx \int_{\mathbf{R}^d} dy f(x) C(x, y) f(y)\right) \quad (2.13)$$

をもつ measure として、 C を covariance とする mean 0 の Gaussian measure $d\mu_C$ が存在する。 ◇

しかしこの定理によれば、Gaussian measure μ_C の sample field ϕ は関数ではない。従って、同一点での field の積 $\phi^4(x)$ は定義されず、 ϕ を potential V に代入できない。

Theorem 2.2. [3] 集合

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \{\phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \mid \exists U \text{ open } \subset \mathbf{R}^d \text{ such that} \\ & \phi|_U \text{ is a signed measure}\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

の測度 $\mu_C(\mathcal{R})$ は 0 である。 ◇

2.3 Regularizations

Sample field の紫外性質を改善するために、様々な regularization が考案されている。構成論においてよく使われるのは、momentum cutoff と lattice regularization である。

momentum cutoff

Gaussian covariance C を momentum space で cutoff し

$$C_M(x, y) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \chi_M(p) dp \quad (2.15)$$

$$\chi_M(p) = e^{-(|p|/M)^2}, \quad M > 0 \quad (2.16)$$

で置き換えると、その紫外性質は次のように改善される。

$$|C_M(x, y)| < \begin{cases} \text{const.} \log M, & d = 2, \\ \text{const.} M^{d-2}, & d > 2, \end{cases} \quad (2.17)$$

Theorem 2.3. [19, P.28] Gaussian measure μ_{C_M} の sample field は, 確率 1 で $C^\infty \cap \mathcal{S}'$ に属する. ◇

この UV cutoff の結果として, sample field の積 $\phi(x)^4$ が well-defined となるが, その積分である $V(\phi)$ は発散する可能性がある. そこで, 赤外 (IR) 側の cutoff (volume cutoff) を導入する. $\Lambda \subset \mathbf{R}^d$ を有界領域として, potential $V(\phi)$ を

$$V_\Lambda(\phi) = \lambda \int_\Lambda \phi(x)^4 dx \quad (2.18)$$

のように IR cutoff すると, (2.1) は次のような well-defined な積分となる.

$$\langle F(\phi) \rangle_{\Lambda, M} = \frac{1}{Z_{\Lambda, M}} \int F(\phi) e^{-V_\Lambda(\phi)} d\mu_{C_M}(\phi) \quad (2.19)$$

$$Z_{\Lambda, M} = \int e^{-V_\Lambda(\phi)} d\mu_{C_M}(\phi) \quad (2.20)$$

ここで

$$\int V_\Lambda(\phi) d\mu_{C_M}(\phi) < \infty \quad (2.21)$$

であるから, Jensen の不等式により

$$\int e^{-V_\Lambda(\phi)} d\mu_{C_M}(\phi) \geq \exp \left(- \int V_\Lambda(\phi) d\mu_{C_M}(\phi) \right) > 0 \quad (2.22)$$

が成立することに注意する.

lattice regularization

Euclidean space \mathbf{R}^d を格子化し, 格子間隔 ϵ の正方格子 $\epsilon\mathbf{Z}^d$ の各点 x に random variable $\phi(x)$ を配置することにより, (2.9),(2.10) を差分化する. さらに格子点を有界領域 Λ の中に限定し, IR cutoff を同時に行うと

$$\langle F(\phi) \rangle_{\Lambda, \epsilon} = \frac{1}{Z_{\Lambda, \epsilon}} \int d\phi F(\phi) e^{-\mathcal{A}_{\Lambda, \epsilon}(\phi)} \quad (2.23)$$

$$Z_{\Lambda, \epsilon} = \int d\phi e^{-\mathcal{A}_{\Lambda, \epsilon}(\phi)} \quad (2.24)$$

$$\mathcal{A}_{\Lambda, \epsilon}(\phi) = \sum_{x \in \epsilon\mathbf{Z}^d \cap \Lambda} \epsilon^d (\lambda\phi(x)^4 + m^2\phi(x)^2) + \sum_{|y-x|=\epsilon} \frac{\epsilon^{d-2}}{2} (\phi(x) - \phi(y))^2 \quad (2.25)$$

$$\int d\phi = \prod_{x \in \epsilon\mathbf{Z}^d \cap \Lambda} \int d\phi(x) \quad (2.26)$$

という有限次元積分となる.

Renormalization

Momentum cutoff または lattice 化によって regularize した後で, 繰りこみのための counterterm を導入する. Counterterm の形は, 次元 d に依存する [Section 4.1, Section 5.1]. その regularization をはずして極限を構成する原理は, regularization の方法により異なる. Momentum cutoff と lattice regularization にはそれぞれ得失があり, 両者は相補的な関係にある.

2.4 Osterwalder-Schrader Axioms

Euclidean field theory から relativistic field theory を得るには, Schwinger function $S_n(x_1, \dots, x_n)$ を Wightman function [21] に翻訳しなければならない. そのために, Schwinger function の各引数 x_k の“虚時間”座標 x_k^1 に関して, 正の実軸を複素右半平面に“解析接続”し, その境界値として Wightman function を作る. この手続きが実行可能であるためには, 以下に述べる Osterwalder-Schrader axioms を満たす必要がある.

Notation

$x = (x^1, x^2, \dots, x^d) \in \mathbf{R}^d$ に対し

$$\theta x = (-x^1, x^2, \dots, x^d) \quad (2.27)$$

$$T_t x = (x^1 + t, x^2, \dots, x^d) \quad (2.28)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^d$ に対し

$$\theta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_n) \quad (2.29)$$

$$T_t f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(T_t x_1, T_t x_2, \dots, T_t x_n), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{R}_+^d = \{x = (x^1, x^2, \dots, x^d) \in \mathbf{R}^d \mid x^1 > 0\} \quad (2.31)$$

$$f \in \mathcal{S}_\neq(\mathbf{R}^{nd}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{nd}) \\ \partial^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \text{if } x_i = x_j \text{ for some } i \neq j \end{cases} \quad (2.32)$$

$$f \in \mathcal{S}_+(\mathbf{R}^{nd}) \Leftrightarrow f \in \mathcal{S}_\neq(\mathbf{R}^{nd}), \text{ Supp } f \subset (\mathbf{R}_+^d)^n \quad (2.33)$$

Osterwalder-Schrader Axioms

(OS1) **Temperedness:** $S_n \in \mathcal{S}'_\neq(\mathbf{R}^{nd})$

(OS2) **Euclidean invariance:** S_n は \mathbf{R}^d の並進と回転に関して不变である.

(OS3) **Reflection positivity:** $\sum_{n,m=0}^N S_{n+m}(\theta f_n \otimes f_m) \geq 0, f_k \in \mathcal{S}_+(\mathbf{R}^{kd}), k = 0, 1, 2, \dots, N$

(OS4) **Symmetry:** $S_n(f) = S_n(f_\pi), f \in \mathcal{S}_+(\mathbf{R}^{nd})$ (π は任意の変数交換)

(OS5) **Cluster property:** $\lim_{t \rightarrow \infty} S_{n+m}(f \otimes T_t g) = S_n(f)S_m(g), f \in \mathcal{S}_+(\mathbf{R}^{nd}), g \in \mathcal{S}_+(\mathbf{R}^{md})$ with compact support.

(Z) **Technical condition:** Laplace 逆変換の可能性に関する条件⁸.

特に OS3 を field の言葉で書くと,

$$\langle F \theta F \rangle \geq 0 \quad (2.34)$$

$$F = \sum_m \int dx_1 \cdots dx_m f_m(x_1, \dots, x_m) \phi(x_1) \cdots \phi(x_m) \quad (2.35)$$

となる.

⁸ この条件が整理されたのは, つい最近のことである [11].

Theorem 2.4. [5, 6, 11] *Schwinger function* が *Wightman function* に翻訳されるための必要十分条件は, (OS1)-(OS5)(Z) である. \diamond

ところで, OS axioms の導出に関して, Section 2.3 の regularization にはそれぞれ次のような特徴がある.

- momentum cutoff では, reflection positivity を導出し難い.
- lattice regularization では, 回転不变性の導出が難しく, また計算の負担が大きい.

しかし, 異なる regularization により構成された Schwinger function が一致することを確かめれば, 結果的に全公理の成立が保証されるという道がある.

2.5 摂動展開

異なる regularization を用いて構成された Schwinger function が一致することを確かめるために, Schwinger function を λ についてベキ展開し, その係数を比較する. しかし, 一般に Schwinger function の λ 展開の収束半径は 0 である.

例えば, 1 次元積分の形式的な展開

$$I(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} \exp(-\lambda x^4 - \frac{1}{2}x^2) dx \quad (2.36)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{\mathbf{R}} x^{4n} \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx \quad (2.37)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n \quad (2.38)$$

において,

$$a_n = (-1)^n \sqrt{2\pi} (4n-1)!! / n! \quad (2.39)$$

であり, (2.38) の収束半径は 0 である. しかし複素 λ 平面の負の実軸に cut を入れると, 次のような $I(\lambda)$ の漸近展開が得られる.

$$|I(\lambda) - \sum_{n=0}^N \lambda^n a_n| < \frac{\Gamma(2N+3/2)}{(N+1)!} \frac{\sqrt{2}(4|\lambda|)^{N+1}}{\cos^{2N+3/2}(\frac{1}{2}\arg\lambda)} \quad |\arg\lambda| < \pi \quad (2.40)$$

Borel summability

一般に漸近級数はもとの関数を一意に定めないが, 次の定理は

- Borel summable な漸近級数は, もとの関数を一意的に定める

ことを保証する.

Theorem 2.5. [22] $R, r > 0$ に対し

$$D_R = \{\lambda = x + y\sqrt{-1} \mid (x - R/2)^2 + y^2 < (R/2)^2\} \quad (2.41)$$

$$S_r = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{dist}(z, \mathbf{R}_+) < r\} \quad (2.42)$$

とおく。このとき D_R 上で

$$f(\lambda) \quad : \quad \text{正則} \quad (2.43)$$

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^N a_n \lambda^n + R_N(\lambda) \quad (2.44)$$

$$|R_N(\lambda)| \leq A(N+1)! \left(\frac{|\lambda|}{r} \right)^{N+1}, \quad N > 0 \quad (2.45)$$

ならば、Borel sum

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \quad (2.46)$$

は次を満たす。

$$|z| < r \text{ で収束} \quad (2.47)$$

$$S_r \text{ に解析接続される.} \quad (2.48)$$

$$|B(z)| \leq K e^{|z|/R}, \quad z \in S_{r'} \quad (r' < r) \quad (2.49)$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty B(z) e^{-z/\lambda} dz, \quad \lambda \in D_R \quad (2.50)$$

◇

従って、Schwinger function の Borel summability を示しておけば、漸近展開の係数比較から、regularization independence が従うことになる。

Renormalon

Schwinger function の Borel summability は、別の context でも調べられてきた [20, P.463]。伝統的な場の理論の解析は、乱暴に言えば (2.38) のような形式的展開の無限次元化であり、各項ごとの有限性（摂動的繰りこみ可能性 [Section 5.1]）がその目標であった。しかし形式的展開を越えて、その総和可能性を問題にしてみると、4 次元の model に対して、Borel plane の正の実軸上に $B(z)$ の singularity が存在する可能性が指摘された。この singularity を renormalon という。Renormalon の存在は Schwinger function の（従つて、理論の）存在を脅かす。構成論における triviality の問題は、4 次元の model に対するこのような疑念を背景にもっている。

3 無限体積極限

Section 2.3 で、紫外 (UV) 方向と赤外 (IR) 方向の、2 つの regularization を導入した。この section では IR regularization をはずすことを考える⁹。IR limit の論法は、次元や model の詳細によらない。具体的には、

- Momentum cutoff の場合
 - cluster/Mayer expansion による方法 [19]
- lattice cutoff の場合
 - reflection positivity/correlation inequality による非展開的方法 [21]

が知られている。

⁹ 本当は counterterm を導入した後で、以下の論法を使うのだが、話の筋を見やすくするために、counterterm のない model に即して解説する。

3.1 Polymer 表現

Momentum space での UV cutoff M を固定し, Gaussian covariance C_M を C , partition function $Z_{\Lambda, M}$ を Z_Λ と書く.

Gaussian variables の漸近的独立性

Gaussian covarinace は, (UV cutoff した場合もしない場合も) IR 側では (2.7) のように massive decay する. 即ち, Gaussian field $\phi(x)$ は, 漸近的に独立である. もしも本当に独立ならば, IR limit の問題は次のように自明になる. \mathbf{R}^d の各格子点を中心とする 1 辺の長さが 1 の立方体 (cell) で \mathbf{R}^d 全体を pave する. cell を \square と書き, \square の定義関数を $\square(\cdot)$ とする. そして Λ は \square の和集合と仮定する. さて $C_M = C$ を

$$C_0 = \sum_{\square} C^\square \quad (3.1)$$

$$C^\square(x, y) = \square(x)C(x, y)\square(y) \quad (3.2)$$

で定義される C_0 で置き換えると, (2.20) の右辺の積分は decouple して

$$\int e^{-V_\Lambda(\phi)} d\mu_{C_0}(\phi) = \prod_{\square \subset \Lambda} Z_\square \quad (3.3)$$

$$Z_\square = \int e^{-V_\square(\phi)} d\mu_{C^\square}(\phi) \quad (3.4)$$

となる. (2.19) の右辺も同様に decouple する. そこで, $F(\phi)$ の定義に参加する $\phi(x)$ が属する cell の全体を $\text{Supp } F$ とすると, $\text{Supp } F \subset \Lambda$ である限り, (2.19) の右辺 は Λ に依存しないことが分かる. 即ち, IR limit は自明である.

さて, 実際の Gaussian covariance は, IR 側で弱い従属性を残しているので,

- 遠い field 同士の相関が小さいときに有効な展開

を考える. そのために, cell 每に decouple した covariance C_0 と, もとの covariance C を interpolate する¹⁰.

まず Gaussian measure の変形に関する定理を用意する.

Theorem 3.1. [2, P.208][4] 変数 s に依存する Gaussian covariance C_s に対し,

$$\frac{d}{ds} \int d\mu_{C_s}(\phi) F(\phi) = \int d\mu_{C_s}(\phi) \int_\Lambda dx \int_\Lambda dy \frac{\partial}{\partial \phi(x)} \frac{dC_s(x, y)}{ds} \frac{\partial}{\partial \phi(y)} F(\phi) \quad (3.5)$$

が成り立つ¹¹. ◇

Partition function の polymer 表現

上記の観察に基づいて, cluster 展開の概念的基礎として polymer 表現を導入する¹². Cell の pair(非順序対) $\{\square, \square'\}$ の全体を \mathbf{P} とする. \mathbf{P} の元を index にもつ変数 $s = (s_b)_{b \in \mathbf{P}}$ を用いて, Gaussian covariance C と C_0 を次のように interpolate する.

$$C_s(x, y) = C_0(x, y) + \sum_{\{\square, \square'\} \in \mathbf{P}} s_{\square \square'} [\square(x)C(x, y)\square'(y) + \square'(x)C(x, y)\square(y)] \quad (3.6)$$

$$C_s(x, y) = C_0(x, y), \text{ if } s_b = 0 \text{ for } \forall b \in \mathbf{P} \quad (3.7)$$

$$C_s(x, y) = C(x, y), \text{ if } s_b = 1 \text{ for } \forall b \in \mathbf{P} \quad (3.8)$$

¹⁰ C が有する coupling の一部分を捨てる.

¹¹ 定理中で F に関する仮定を明記しなければ意味がないのだが, [2, 4] による証明は, 以下の議論のために十分である.

¹² 以下の議論に用いられる Gaussian covariance の interpolation は positive definite でないので, この小節の polymer 表現をそのままの形で使うことはできない.

そして

$$Z(s) = \int e^{-V_\Lambda(\phi)} d\mu_{C_s}(\phi) \quad (3.9)$$

とおく. ここで

$$b \notin \Lambda \Rightarrow Z(s) \text{ は } s_b \text{ によらない} \quad (3.10)$$

そこで, はじめから Λ の中の cell の pair だけを集めて $\mathbf{P}(\Lambda)$ とし, interpolating parameter を $s = (s_b)_{b \in \mathbf{P}(\Lambda)}$ とする. [その他の s_b は 0 とする.]

各 $b \in \mathbf{P}(\Lambda)$ に対し,

$$O_b Z(s) = Z(s)|_{s_b=0} \quad (3.11)$$

$$D_b Z(s) = Z(s)|_{s_b=1} - Z(s)|_{s_b=0} \quad (3.12)$$

$$= \int_0^1 \partial_{s_b} Z(s) ds_b \quad (3.13)$$

とおくと,

$$Z_\Lambda = \prod_{b \in \mathbf{P}(\Lambda)} (O_b + D_b) Z(s) \quad (3.14)$$

$$= \sum_{\mathbf{Y} \subset \mathbf{P}} \left(\prod_{b \in \mathbf{Y}} D_b \right) \left(\prod_{b \in \mathbf{Y}^c} O_b \right) Z(s) \quad (3.15)$$

と表せる.

$b = \{\square, \square'\}$ とする. s_b に関する微分に Theorem 3.1 を使って

$$\partial_{s_b} \int d\mu_{C_s}(\phi) F(\phi) e^{-V_\Lambda(\phi)} \quad (3.16)$$

$$= \int d\mu_{C_s}(\phi) \int_\Lambda dx \int_\Lambda dy \frac{\partial}{\partial \phi(x)} \partial_{s_b} C_s(x, y) \frac{\partial}{\partial \phi(y)} F(\phi) e^{-V_\Lambda(\phi)} \quad (3.17)$$

$$= \int d\mu_{C_s}(\phi) \int_\square dx \int_{\square'} dy \frac{\partial}{\partial \phi(x)} C(x, y) \frac{\partial}{\partial \phi(y)} F(\phi) e^{-V_\Lambda(\phi)} \quad (3.18)$$

$$= \int d\mu_{C_s}(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi_\square} C \frac{\partial}{\partial \phi_{\square'}} F(\phi) e^{-V_\Lambda(\phi)} \quad (3.19)$$

ただし

$$\frac{\partial}{\partial \phi_\square} C \frac{\partial}{\partial \phi_{\square'}} = \int_\square dx \int_{\square'} dy \frac{\partial}{\partial \phi(x)} C(x, y) \frac{\partial}{\partial \phi(y)} \quad (3.20)$$

である. このように, cell \square, \square' が covariance C によってつながるので, (3.15) の \mathbf{Y} に含まれる元が cell を pairwise につなぐと見て, \mathbf{Y} の元全体によってつながった cell 集団の connected component を取り出す. $Y \subset \Lambda$ を cell の集合として

$$A(Y) = \sum_{B \text{ connects } Y} \int_{[0,1]^B} ds \int d\mu_{C_s}(\phi) X_B e^{-V_Y(\phi)} \quad (3.21)$$

$$X_B = \prod_{\{\square, \square'\} \in B} \frac{\partial}{\partial \phi_\square} C \frac{\partial}{\partial \phi_{\square'}} \quad (3.22)$$

とおくと,

$$Z_\Lambda = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Y_1, Y_2, \dots, Y_q} \frac{1}{q!} \prod_{k=1}^q A(Y_k), \quad (3.23)$$

となる. ただし, Y_1, Y_2, \dots, Y_q に関する和は, 条件

- $k \neq k'$ ならば, $Y_k, Y_{k'}$ は内点を共有しない
- Polymer は Λ を埋め尽くす: $\cup_{k=1}^q Y_k = \Lambda$

を満たす範囲にわたる. $|\Lambda| < \infty$ だから, この和は有限和である.

(3.23) を, “polymer” Y_k が hard core interaction のもとで領域 Λ 内に共存している系についての統計和と見て, polymer 表現 という¹³.

3.2 Cluster 展開

Section 3.1 で導入された interpolation C_s は positive definite でないので, 上記の polymer 表現を構成論において直ちに使うことはできない. また Section 3.1 の手続きでは, polymer を形成する cell を結び付ける bond が loop を作ることがあるので, 展開に無駄があると言える. 以下において, これらの点を改良した polymer 表現を導入する.

前小節同様, momentum space での UV cutoff M を固定し, Gaussian covariance C_M を C , partition function $Z_{\Lambda, M}$ を Z_Λ と書く.

Partition function の cluster 展開

« Step 1 » 便宜のために,

$$\tilde{Z}_\Lambda = \frac{Z_\Lambda}{\prod_{\square \subset \Lambda} Z_\square} = \frac{Z_\Lambda}{Z_\square^{|\Lambda|}} \quad (3.24)$$

とおく. Λ の中の \square を整列させ番号をつける.

$$\square^1, \square^2, \dots, \square^{|\Lambda|} \quad (3.25)$$

そして $\square_1 = \square^1$ として

$$C_{s_1} = s_1 C + (1 - s_1) (\square_1 C \square_1 + \square'_1 C \square'_1) \quad (3.26)$$

$$= \square_1 C \square_1 + \square'_1 C \square'_1 + s_1 (\square_1 C \square'_1 + \square'_1 C \square_1) \quad (3.27)$$

とおく. ただし

$$\square'_1 = 1 - \square_1 \quad (3.28)$$

である. すると

$$Z_\Lambda = \int d\mu_{C_{s_1}}(\phi) e^{-V_\Lambda(\phi)} \Big|_{s_1=1} \quad (3.29)$$

$$= \int d\mu_{C_{s_1}}(\phi) e^{-V_\Lambda(\phi)} \Big|_{s_1=0} + \int_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1} \int d\mu_{C_{s_1}}(\phi) e^{-V_\Lambda(\phi)} \quad (3.30)$$

よって

$$\tilde{Z}_\Lambda = \tilde{Z}_{\square'_1} + \sum_{\square_2 \neq \square_1} \tilde{Z}_\Lambda^{\square_1 \square_2} \quad (3.31)$$

¹³ さらに, (3.24) で定義される \tilde{Z}_Λ を考えると, polymer が Λ を埋め尽くす条件 $\cup_{k=1}^q Y_k = \Lambda$ が除外される. (3.43) の polymer 表現は, この形である.

と書ける. ここに

$$\tilde{Z}_{\Lambda}^{\square_1 \square_2} = \frac{1}{Z_{\square}^{|\Lambda|}} \int_0^1 ds_1 \int d\mu_{C_{s_1}}(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_1}} C \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_2}} e^{-V_{\Lambda}(\phi)} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_{\square_1}} C \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_2}} = \int_{\square_1} dx \int_{\square_2} dy \frac{\partial}{\partial \phi(x)} C(x, y) \frac{\partial}{\partial \phi(y)} \quad (3.33)$$

である [Theorem 3.1 参照].

« Step 2 » (3.31) の第 1 項において, $\Lambda \setminus \square^1$ から \square^2 を decouple する parameter を導入することにより, Step 1 と同様に進むことができる. 一方, (3.31) の第 2 項においては, $\square_{12} = \square_1 \cup \square_2$ と $\square'_{12} = \Lambda \setminus \square_{12}$ を decouple する parameter s_2 を用いて

$$C_{s_1 s_2} = s_2 C_{s_1} + (1 - s_2)(\square_{12} C_{s_1} \square_{12} + \square'_{12} C_{s_1} \square'_{12}) \quad (3.34)$$

とおくと

$$\tilde{Z}_{\Lambda}^{\square_1 \square_2} = \tilde{Z}_{\square_{12}}^{\square_1 \square_2} \tilde{Z}_{\square'_{12}} + \sum_{\square_3 \neq \square_1, \square_2} (\tilde{Z}_{\Lambda}^{(\square_1 \square_2)(\square_1 \square_3)} + \tilde{Z}_{\Lambda}^{(\square_1 \square_2)(\square_2 \square_3)}) \quad (3.35)$$

と書ける. ここに

$$\tilde{Z}_{\Lambda}^{(\square_1 \square_2)(\square_1 \square_3)} = \frac{1}{Z_{\square}^{|\Lambda|}} \int ds \int d\mu_{C_{s_1 s_2}}(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_1}} C \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_2}} \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_1}} C_{s_1} \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_3}} e^{-V_{\Lambda}(\phi)} \quad (3.36)$$

$$\tilde{Z}_{\Lambda}^{(\square_1 \square_2)(\square_2 \square_3)} = \frac{1}{Z_{\square}^{|\Lambda|}} \int ds \int d\mu_{C_{s_1 s_2}}(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_1}} C \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_2}} \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_2}} C_{s_1} \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_3}} e^{-V_{\Lambda}(\phi)} \quad (3.37)$$

$$\int ds = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \quad (3.38)$$

である.

« Step 3 » 上記の手続きを繰り返すことにより,

$$\tilde{Z}_Y^{\tau}, Y \subset \Lambda, \tau : \text{rooted ordered tree on } Y \quad (3.39)$$

が定義される. ただし

- Y は Λ の中の cell の(空でない)和集合
- rooted ordered tree on Y とは
 - (1) Y の中の cell を頂点とする tree であり
 - (2) root と呼ばれる特別の頂点をもち
 - (3) bond 全体が番号づけられており
 - (4) その番号は, root からの距離と consistent であるもの
- \tilde{Z}_Y^{τ} は次式で定義される.

$$\tilde{Z}_Y^{\tau} = \frac{1}{Z_{\square}^{|Y|}} \int ds M_{\tau}(s) \int d\mu_{C_s}(\phi) X_{\tau} e^{-V_Y(\phi)} \quad (3.40)$$

ここに, $M_{\tau}(s)$ は s_1, s_2, \dots の単項式, C_s は tree τ が定める順序に従って decoupling parameters s を導入した covariance, そして

$$X_{\tau} = \prod_{(\square_a, \square_b) \in \tau} \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_a}} C \frac{\partial}{\partial \phi_{\square_b}} \quad (3.41)$$

である.

そこで

$$A(Y) = \sum_{\tau: \text{rooted ordered tree on } Y} \tilde{Z}_Y^\tau \quad (3.42)$$

とおくと、

$$\tilde{Z}_\Lambda = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Y_1, Y_2, \dots, Y_q} \frac{1}{q!} \prod_{k=1}^q A(Y_k), \quad (3.43)$$

が成り立つ。ただし、 Y_1, Y_2, \dots, Y_q に関する和は

- $Y_k \subset \Lambda, k = 1, 2, \dots, q$
- $|Y_k| \geq 2, k = 1, 2, \dots, q$
- $k \neq k'$ ならば、 $Y_k, Y_{k'}$ は内点を共有しない

の範囲にわたる。 $|\Lambda| < \infty$ だから、この和は有限和である。これを cluster expansion という。

Unnormalized Schwinger function の cluster 展開

Unnormalized Schwinger function

$$\tilde{S}_{\Lambda, N}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \frac{1}{Z_\square^{|\Lambda|}} \int \prod_{i=1}^N \phi(z_i) e^{-V_\Lambda(\phi)} d\mu_C(\phi) \quad (3.44)$$

に対しても上記と同様の展開

$$\tilde{S}_{\Lambda, N}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Y_1, Y_2, \dots, Y_q} \frac{1}{q!} \prod_{k=1}^q A'(Y_k) \quad (3.45)$$

を得る。ただし、和は

- 各 z_i はどれかの Y_k に含まれる。
- $Y_k \subset \Lambda$
- $|Y_k| \geq 2$ if $z_1, \dots, z_N \notin Y_k$
- $k \neq k'$ ならば、 $Y_k, Y_{k'}$ は内点を共有しない

の範囲にわたる。

- (3.40) を評価するとき、 Z_\square の lower bound を必要とするが、明かに

$$v := \int V_\square(\phi) d\mu_{C^\square}(\phi) < \infty \quad (3.46)$$

であるから、

$$Z_\square = \int e^{-V_\square(\phi)} d\mu_{C^\square} \quad (3.47)$$

$$\geq \exp \left(- \int V_\square(\phi) d\mu_{C^\square} \right) = e^{-v} \quad (3.48)$$

が成り立つ。

3.3 Mayer 展開

重なりを許さない (hard core 条件) 和 (3.43) で表された量 \tilde{Z}_Λ を、重なりを許す和で表されたある量 W で書き直すと、 $\tilde{Z}_\Lambda = e^W$ となることを示す [(3.55) 参照]。また unnormalized Schwinger function (3.45) に同様の処理をすると、 \tilde{Z}_Λ が分離され [(3.61) 参照]、normalized Schwinger function の展開表現が得られる [(3.62) 参照]。

Partition function の場合

有限個の polymer の ordered sequence

$$\mathbf{M} = (Y_1, \dots, Y_q) \quad (3.49)$$

を configuration と呼び、

$$A(\mathbf{M}) = \frac{1}{q!} \prod_{k=1}^q A(Y_k) \quad (3.50)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{M}) = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq q\} \quad (3.51)$$

$$\langle Y_i, Y_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{内点を共有する} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.52)$$

とおくと、

$$\tilde{Z}_\Lambda = \sum_{\mathbf{M}} A(\mathbf{M}) \prod_{(i,j) \in \mathbf{P}(\mathbf{M})} (1 - \langle Y_i, Y_j \rangle) \quad (3.53)$$

$$= \sum_{\mathbf{M}} A(\mathbf{M}) \sum_{J \subset \mathbf{P}(\mathbf{M})} \prod_{(i,j) \in J} (-\langle Y_i, Y_j \rangle) \quad (3.54)$$

となる。そして、formal に和を取り直すと [12]、

$$\tilde{Z}_\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\mathbf{M}} T(\mathbf{M}) A(\mathbf{M}) \right)^n \quad (3.55)$$

$$T(\mathbf{M}) = \sum_{J \in \mathbf{C}(\mathbf{M})} \prod_{(i,j) \in J} (-\langle Y_i, Y_j \rangle) \quad (3.56)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{M}) = \{J \subset \mathbf{P}(\mathbf{M}) \mid J \text{ connects } \mathbf{M} \text{ into a single component}\} \quad (3.57)$$

従って

$$\frac{1}{|\Lambda|} \log \tilde{Z}_\Lambda = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{M}} T(\mathbf{M}) A(\mathbf{M}) \quad (3.58)$$

を得る。これを Mayer expansion という。

Theorem 3.2. [12][19, P.180] 条件

$$\sum_{Y \ni 0, Y \subset \mathbf{R}^d} |A(Y)| e^{|Y|} < 1 \quad (3.59)$$

のもとで、(3.58) は Λ に関して一様に絶対収束し、 $\Lambda \rightarrow \mathbf{R}^d$ の極限を持つ。また、(3.59) は λ が十分小さいとき成立する。 ◇

(3.59) が成立する根拠は、大まかには次のとおりである。

- (3.41) において, covariance C が massive decay する
- (3.40) において, X_τ の中の ϕ 微分が potential $V_Y(\phi)$ を hit するごとに, small constant λ が出る
- (3.40) において, $0 < e^{-V_Y} \leq 1$ が成り立つ

Schwinger function の場合

Unnormalized Schwinger function (3.45) に対しても, 同様の展開が可能である. この場合, polymer Y に (activity $A'(Y)$ に) “external variable” $\phi(z_j)$ が含まれるので, 若干の修正が必要である. configuration $\mathbf{M} = (Y_1, \dots, Y_q)$ に対し, Y_1, \dots, Y_q に含まれる external variable 全体を $\zeta = \{z_1, \dots, z_N\}$ とするとき, \mathbf{M} を ζ -configuration と呼ぶことにする. このとき

$$S_{\Lambda, N}^T(\zeta) = \sum_{\mathbf{M}: \zeta-\text{configuration}} T(\mathbf{M}) A'(\mathbf{M}) \quad (3.60)$$

とおくと, formal には $\tilde{S}_{\Lambda, N}$ は factorize して

$$\tilde{S}_{\Lambda, N}(\zeta) = \tilde{Z}_\Lambda \sum_{\zeta = \cup \zeta_j} \prod_j S_{\Lambda, N}^T(\zeta_j) \quad (3.61)$$

即ち

$$S_{\Lambda, N}(\zeta) = \sum_{\zeta = \cup \zeta_j} \prod_j S_{\Lambda, N}^T(\zeta_j) \quad (3.62)$$

を得る [12].

Theorem 3.3. [19, P.194] λ が十分小さいとき, (3.60), (3.62) は, Λ に関して一様に絶対収束する. 従って

$$S_N(z_1, \dots, z_N) = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbf{R}^d} S_{\Lambda, N}(z_1, \dots, z_N) \quad (3.63)$$

が存在する. \diamond

3.4 Reflection positivity

lattice regularization (2.23)-(2.25) を次のように書く.

$$\langle F(\phi) \rangle_{\Lambda, \epsilon} = \frac{1}{Z_{\Lambda, \epsilon}} \int d\nu(\phi) F(\phi) \exp(\phi J\phi) \quad (3.64)$$

$$Z_{\Lambda, \epsilon} = \int d\nu(\phi) \exp(\phi J\phi) \quad (3.65)$$

$$\phi J\phi = \sum_{x, y} J_{xy} \phi(x) \phi(y) \quad (3.66)$$

$$J_{xy} = \begin{cases} \epsilon^{-2} & |x - y| = \epsilon, x, y \in \Lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.67)$$

$$d\nu_\Lambda(\phi) = \prod_{x \in \Lambda} d\nu(\phi(x)) \quad (3.68)$$

$$d\nu(\phi(x)) = \exp(-\lambda \epsilon^d \phi(x)^4 - \epsilon^d (2d\epsilon^{-2} + m^2) \phi(x)^2) d\phi(x) \quad (3.69)$$

Theorem 3.4. 領域 Λ が

- (1) 平面 $x^1 = 0$ に関して対称であるとき,
- (2) 平面 $x^1 = \epsilon/2$ に関して対称であるとき,

それぞれ, lattice ϕ^4 model (2.23)-(2.25) は, これらの平面に関する反転 θ について reflection positive である. \diamond

Proof. (1) Λ 上の積分変数を 3 グループに分けて

$$\int d\nu_0(\phi) = \prod_{x^1=0} d\nu(\phi(x)) \quad (3.70)$$

$$\int d\nu_+(\phi) = \prod_{x^1>0} d\nu(\phi(x)) \quad (3.71)$$

$$\int d\nu_-(\phi) = \prod_{x^1<0} d\nu(\phi(x)) \quad (3.72)$$

$$\phi J_0 \phi = \sum_{x^1=y^1=0} \phi(x) J_{xy} \phi(y) \quad (3.73)$$

$$\phi J_+ \phi = \sum_{x^1>0 \text{ or } y^1>0} \phi(x) J_{xy} \phi(y) \quad (3.74)$$

$$\phi J_- \phi = \sum_{x^1<0 \text{ or } y^1<0} \phi(x) J_{xy} \phi(y) \quad (3.75)$$

とおく. $F(\phi)$ は $\phi(x)$, $x^1 \geq 0$ のみに依存するとすると, (3.64) より

$$\langle F(\phi) \theta F(\phi) \rangle_{\Lambda, \epsilon} = \frac{1}{Z_{\Lambda, \epsilon}} \int d\nu_0(\phi) \int d\nu_+(\phi) \int d\nu_-(\phi) \exp(\phi J \phi) F(\phi) \theta F(\phi) \quad (3.76)$$

$$= \frac{1}{Z_{\Lambda, \epsilon}} \int d\nu_0(\phi) \exp(\phi J_0 \phi) \left(\int d\nu_+(\phi) \exp(\phi J_+ \phi) F(\phi) \right)^2 \quad (3.77)$$

$$\geq 0 \quad (3.78)$$

が成り立つ. (2) も同様. \square

平面 $x^1 = \epsilon/2$ について Λ が対称であるとして, $\Lambda_+ = \Lambda \cap \{x^1 > \epsilon/2\}$ とおく. Λ_+ 上の変数にのみ依存する関数 $F(\phi), G(\phi)$ に対し, Schwarz の不等式

$$|\langle F \theta G \rangle_{\Lambda, \epsilon}| \leq \langle F \theta F \rangle_{\Lambda, \epsilon}^{1/2} \langle G \theta G \rangle_{\Lambda, \epsilon}^{1/2} \quad (3.79)$$

が成り立つ. そこで $x \in \Lambda_+$ に対し $y = \theta x$ とおくと,

$$|\langle f(\phi(x)) g(\phi(y)) \rangle_{\Lambda, \epsilon}| \leq \langle f(\phi(x)) f(\phi(y)) \rangle_{\Lambda, \epsilon}^{1/2} \langle g(\phi(x)) g(\phi(y)) \rangle_{\Lambda, \epsilon}^{1/2} \quad (3.80)$$

を得る.

さて, 領域 Λ が座標平面に平行な面をもつ直方体であるとする. このとき, 周期境界条件を課して, Λ を torus と見なすと¹⁴, 座標平面に平行な平面が格子点の中点を通るとき, その平面について reflection positive となる. そこで (3.80) を繰り返し用いると, 次の chessboard bound を得る.

Theorem 3.5. [21] 直方体 Λ に周期境界条件を課す. 各 $x \in \Lambda$ に対し $F_x(t)$ を t の多項式とするとき,

$$|\langle \prod_x F_x(\phi(x)) \rangle_{\Lambda, \epsilon}| \leq \prod_x |\langle \prod_y F_x(\phi(y)) \rangle_{\Lambda, \epsilon}|^{1/|\Lambda|} \quad (3.81)$$

が成り立つ. \diamond

¹⁴ Λ の端同士をつなぐことに対応して, J の修正を要する.

$\alpha = (\alpha_x)$ に対し,

$$\phi^\alpha = \prod_x \phi(x)^{\alpha_x} \quad (3.82)$$

と書く. *Schwinger function* $\langle \phi^\alpha \rangle_{\Lambda, \epsilon}$ に (3.81) を用いると,

$$|\langle \phi^\alpha \rangle_{\Lambda, \epsilon}| \leq \prod_x |\langle \prod_y \phi(y)^{\alpha_x} \rangle_{\Lambda, \epsilon}|^{1/|\Lambda|} \quad (3.83)$$

となるが、右辺の x に関する積因子は、有限個の x を除いて 1 である。従って $\langle \prod_y \phi(y)^a \rangle_{\Lambda, \epsilon}$ を評価すればよいが、

$$-\phi(x)^2 - \phi(y)^2 \leq 2\phi(x)\phi(y) \leq \phi(x)^2 + \phi(y)^2 \quad (3.84)$$

を用いると、積分が decouple して

$$|\langle \prod_y \phi(y)^a \rangle_{\Lambda, \epsilon}| \leq \text{const.}^{|\Lambda|} \quad (3.85)$$

を得る。以上により

Theorem 3.6. 直方体 Λ に周期境界条件を課すと、*Schwinger function* $\langle \phi^\alpha \rangle_{\Lambda, \epsilon}$ は、 Λ に関して一様に有界である¹⁵。 ◇

3.5 Correlation inequality

強磁性相互作用に関する相関不等式 [Griffiths の不等式] を準備する。

Theorem 3.7. $\phi \leftrightarrow -\phi$ に関して対称な \mathbb{R} 上の measure $d\nu$ の有限直積に関する積分

$$\langle F(\phi) \rangle_J = \frac{1}{Z_J} \int \prod_x d\nu(\phi(x)) F(\phi) \exp\left(\sum_\alpha J_\alpha \phi^\alpha\right) \quad (3.86)$$

$$Z_J = \int \prod_x d\nu(\phi(x)) \exp\left(\sum_\alpha J_\alpha \phi^\alpha\right) \quad (3.87)$$

を考える。ただし、

$$\forall \alpha \quad J_\alpha \geq 0 \quad (3.88)$$

$$\forall \beta \quad \int \prod_x d\nu(\phi(x)) |\phi^\beta| \exp\left(\sum_\alpha |J_\alpha \phi^\alpha|\right) < \infty \quad (3.89)$$

とする。このとき

$$\langle \phi^\alpha \rangle_J \geq 0 \quad (3.90)$$

$$\langle \phi^\alpha \phi^\beta \rangle_J - \langle \phi^\alpha \rangle_J \langle \phi^\beta \rangle_J \geq 0 \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial J_\alpha} \langle \phi^\beta \rangle_J \geq 0 \quad (3.92)$$

が成り立つ。 ◇

¹⁵ 従って、 $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ で収束する部分列が存在する。この部分列は全ての *Schwinger function* に対して共通に取れる。一意的な極限を得るには、次節の correlation inequality が必要である。

Proof. (3.90) は \exp の展開による.

(3.91) は, ϕ の独立な copy を ϕ' として,

$$\langle \phi^\alpha \phi^\beta \rangle_J - \langle \phi^\alpha \rangle_J \langle \phi^\beta \rangle_J = \langle \phi^\alpha (\phi^\beta - \phi'^\beta) \rangle_J \quad (3.93)$$

と書き, さらに $\phi = \xi + \eta, \phi' = \xi - \eta$ と置いて, ξ, η に対して, (3.90) を用いる.

(3.92) は (3.91) による. \square

不等式 (3.92) を (3.64) に適用する.

Theorem 3.8. *Schwinger function* $\langle \phi^\alpha \rangle_{\Lambda, \epsilon}$ は, free boundary condition のもとで Λ に関して単調増加であり, infinite volume limit が存在する. \diamond

Proof. 領域 Λ を広げることは, (3.67) の J_{xy} を増加させることを意味するので, 前半が成立する. また, free boundary condition を periodic boundary condition に換えると J_{xy} が増加するので, Schwinger function も増加する. しかるに, Schwinger function は, Λ に関して一様な bound を持つから, 後半が成立する. \square

4 ϕ_2^4 の構成

Momentum cutoff された 2 次元 ϕ^4 model の UV limit は, 比較的容易にとることができるので, その後で, cluster/Mayer 展開して IR limit (infinite volume limit) をとれば, Schwinger function が構成できる. Lattice cutoff に基づく construction については, [7] を参照されたい.

4.1 Renormalization

Feynman graph

C_M を UV cutoff された Gaussian covariance (2.15) とし, Gauss 積分を

$$\langle F(\phi) \rangle_{C_M} = \int d\mu_{C_M} F(\phi) \quad (4.1)$$

と書く.

一般に field の積の Gauss 積分は,

$$\langle \prod_{k=1}^{2N} \phi(x_k) \rangle_{C_M} = \sum_{\text{pairing}} C_M(x_{k_1}, x_{k_2}) \cdots C_M(x_{k_{2N-1}}, x_{k_{2N}}) \quad (4.2)$$

のように, pairwise contraction の和となる. 従って, unnormalized Schwinger function

$$\tilde{S}_{M, \Lambda, n}(x_1, \dots, x_n) = \int d\mu_{C_M} \prod_{k=1}^n \phi(x_k) e^{-V_\Lambda(\phi)} \quad (4.3)$$

$$= \langle \prod_{k=1}^n \phi(x_k) e^{-V_\Lambda(\phi)} \rangle_{C_M} \quad (4.4)$$

を次のように形式的に項別積分すると,

$$\langle \prod_{k=1}^n \phi(x_k) e^{-V_\Lambda(\phi)} \rangle_{C_M} \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \langle V_\Lambda^j \prod_{k=1}^n \phi(x_k) \rangle_{C_M} \quad (4.5)$$

j 次の項は, 次のような graph G (Feynman graph) に関する和となる.

- (1) n 個の 外線 をもつ
- (2) j 個の 内点 をもつ
- (3) 各内点は, 4 本の 線 をもつ

Graph G に対応する積分値を G の amplitude と呼ぶ.

例えば $n = 2$ とすると, 次のような項が出る:

$$j = 0 \text{ から } \text{---} = C_M(x_1, x_2) \quad (4.6)$$

$$j = 1 \text{ から } \lambda \text{---} \circlearrowleft = \lambda \int_{\mathbf{R}^2} dy C_M(x_1, y) C_M(y, y) C_M(y, x_2) \quad (4.7)$$

$$j = 2 \text{ から } \lambda^2 \text{---} \circlearrowleft \circlearrowleft = \lambda^2 \int_{\mathbf{R}^2} dy \int_{\mathbf{R}^d} dz C_M(x_1, y) C_M(y, z)^3 C_M(z, x_2) \quad (4.8)$$

$n = 4$ とすると, $j = 2$ から

$$\lambda^2 \text{---} \circlearrowleft \circlearrowleft = \lambda^2 \int_{\mathbf{R}^2} dy \int_{\mathbf{R}^2} C_M(x_1, y) C_M(x_2, y) C_M(y, z)^2 C_M(z, x_3) C_M(z, x_4) \quad (4.9)$$

などが出る.

紫外発散

上記の graph のうち, (4.7)において UV cutoff をはずし $M \rightarrow \infty$ とすると, 紫外発散

$$\lim_{M \rightarrow \infty} C_M(y, y) = \infty \quad (4.10)$$

が生ずる [(2.6) 参照]. 従って, (4.3) の単純な UV limit $M \rightarrow \infty$ は存在しないだろう. そこで counterterm を導入してこの種の紫外発散を打ち消す. そのための counterterm は, 以下に述べる Wick product によって作られる. また, 2 次元の Gauss covariance の singularity は, (2.6) のように対数的であるから, (4.8)(4.9) は収束し,

- 紫外発散する graph は, (4.7) のように $C_M(y, y)$ を含むものに限る.

Wick product

Jointly Gaussian variables $\phi_j, j = 1, 2, \dots, k$ が生成する多項式全体をその中に移す線形写像 $F(\phi) \mapsto :F(\phi): \in \mathcal{C}$,

$$:1: = 1 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} : \phi^\alpha : = : \frac{\partial}{\partial \phi_j} \phi^\alpha : \quad (4.12)$$

$$\langle : \phi^\alpha : \rangle = 0, \quad |\alpha| > 0 \quad (4.13)$$

を満たすものを Wick product という. ここに, $\langle \rangle$ は Gaussian expectation であり,

$$\phi^\alpha = \prod_j \phi_j^{\alpha_j} \quad (4.14)$$

$$|\alpha| = \sum_j \alpha_j \quad (4.15)$$

である.

特に (4.1) の Gaussian の場合

$$:\phi(x): = \phi(x) \quad (4.16)$$

$$:\phi^2(x): = \phi^2(x) - C_M(0) \quad (4.17)$$

$$:\phi^4(x): = \phi^4(x) - 6C_M(0)\phi^2(x) + 3C_M(0)^2 \quad (4.18)$$

$$:\phi^n(x): = \phi(x) : \phi^{n-1}(x) : - (n-1)C_M(0) : \phi^{n-2}(x) :, \quad n \geq 2 \quad (4.19)$$

Wick product の Gauss 積分

Wick product を含む Gauss 積分では、特別の打ち消しが起きる。

Theorem 4.1. R を field ϕ の多項式とする

$$<:\phi(x)^n:R>_{C_M} = \int_{\mathbf{R}^2} dy C_M(x, y) <:\phi(x)^{n-1}: \frac{\partial}{\partial \phi(y)} R>_{C_M} \quad (4.20)$$

◇

Proof. (4.19) により

$$<:\phi(x)^n:R>_{C_M} = <\phi(x):\phi(x)^{n-1}:R>_{C_M} - (n-1)C_M(0) <:\phi(x)^{n-2}:R>_{C_M} \quad (4.21)$$

右辺に、‘‘部分積分’’ [2, P.208]

$$<\phi(x)F(\phi)>_{C_M} = \int_{\mathbf{R}^2} dy C_M(x, y) <\frac{\partial}{\partial \phi(y)} F(\phi)>_{C_M} \quad (4.22)$$

を用いると、

$$<:\phi(x)^n:R>_{C_M} \quad (4.23)$$

$$= \int_{\mathbf{R}^2} dy C_M(x, y) <\frac{\partial}{\partial \phi(y)} (<:\phi(x)^{n-1}:R)>_{C_M} - (n-1)C_M(0) <:\phi(x)^{n-2}:R>_{C_M} \quad (4.24)$$

$$= \int_{\mathbf{R}^2} dy C_M(x, y) <:\phi(x)^{n-1}: \frac{\partial}{\partial \phi(y)} R>_{C_M} \quad (4.25)$$

を得る。 □

これは Wick product 内の field 同士が contract されないことを意味する。例えば：

$$<:\phi^4(y_1)::\phi^4(y_2):>_{C_M} = 4!C_M(y_1 - y_2)^4 \quad (4.26)$$

一般に、Wick product の積の Gauss 積分は

- Wick product 内の field 同士を contract しないという制限のもとで
- pairwise contraction 全体にわたる和で表される。

従って、Wick product の積の 2 次元 Gauss 積分 (renormalized Feynman graph) は紫外発散しない。

Renormalization

Renormalized potential を

$$V_\Lambda(\phi) = \lambda \int_\Lambda dx : \phi(x)^4 : \quad (4.27)$$

で定義する。そして、

$$\langle F(\phi) \rangle_{\Lambda, M} = \frac{1}{Z_{\Lambda, M}} \langle e^{-V_\Lambda} F(\phi) \rangle_{C_M} \quad (4.28)$$

$$Z_{\Lambda, M} = \langle e^{-V_\Lambda} \rangle_{C_M} \quad (4.29)$$

の UV limit $M \rightarrow \infty$, IR limit $\Lambda \rightarrow \mathbf{R}^2$ を調べる。

Renormalization の結果、(2.18) の V_Λ は (4.27) の V_Λ に変わるので、異なるモデルを考えることにしたように見える。しかし、(4.18) によれば、両者の違いは ϕ の 2 次項と定数項であり、

- 定数は (2.19) の分子分母で cancel し、
- 2 次項を付加しても、(2.10), (2.15) において、パラメータ m^2 が $m^2 - 6\lambda C_M(0)$ に変わるだけである。

即ち、素朴な action (2.10) に含まれる parameter を cutoff M の適当な関数に置き換えることにより、紫外発散を吸収しようとしているのである¹⁶。

さらに、 $\lambda \rightarrow 0$ で ϕ^4 model は Gaussian measure に漸近すべきであるという見地から、2 点 Schwinger function $S_2(x, y)$ は、 λ が小さいとき、(2.7) のように massive decay すると予想される。このときの decay の速さを表す m は、Gaussian covariance の中の m に近いはずであり、counterterm によって再定義された parameter そのもの (M に依存して発散する) ではない。

一般に、counterterm を導入して繰りこみを施した action に含まれる (cutoff dependent な) parameter を bare¹⁷、Schwinger function の振舞いを特徴づける定数を physical (renormalized)¹⁸ と形容するが、

- bare な量 ($m^2 - 6\lambda C_M(0)$ など) と physical な量 (m^2 など) を概念的に区別せよ

という教訓が、場の理論における自然とその model の間の新たな関係を象徴している¹⁹。

以下便宜のため、 ϕ を Gauss measure μ_C に従う variable として、

$$\phi_M(x) = e^{\frac{\Delta}{2M^2}} \phi(x) \quad (4.30)$$

とおく。このとき、 ϕ_M は Gauss 分布 μ_{C_M} に従う。そこで、

$$V_{\Lambda, M}(\phi) = \lambda \int_\Lambda dx : \phi_M(x)^4 : \quad (4.31)$$

$$\langle F(\phi_M) \rangle_{\Lambda, M} = \frac{1}{Z_{\Lambda, M}} \langle e^{-V_{\Lambda, M}(\phi)} F(\phi_M) \rangle_C \quad (4.32)$$

$$Z_{\Lambda, M} = \langle e^{-V_{\Lambda, M}(\phi)} \rangle_C \quad (4.33)$$

と置き直す。

¹⁶ 4 次元では、(5.15) のように、 $(\partial\phi)^2$ 型の counterterm を入れる必要があると言われている。定数 Z を適当に選んで field ϕ を $Z\phi$ で置き換えると、この counterterm は Gaussian measure に吸収される。これを ϕ を規格化し直したと見たのが、renormalization という命名の由来である。

¹⁷ 人工的 model を書くための parameter

¹⁸ 実際に観測される物理量に関係する

¹⁹ 紫外発散を内在的にもつ場の理論は、自然の基本法則としてふさわしくないとする物理学者が多い。自然が現象する過程を、自然というコンピュータが遂行する計算と見たとき、いかなる自然と言えども、regularization なしに計算することはできないはずだという意味であろうか。自然に内蔵された regularization としては、素粒子の弦構造や時空の泡の描像が考えられているが、このような UV cutoff が極めて大きいことを理由に、それを無限大で近似する理論が、繰りこみ理論であると言える。

4.2 紫外極限

議論の要点は

- Renormalized Feynman graph (Wick product の積の Gauss 積分) の UV limit
- Partition function の M -independent bound

$$Z_{\Lambda, M} < e^{\text{const.} |\Lambda|} \quad (4.34)$$

である。これを、関数空間 $L^\nu(\mathcal{S}', \mu_C)$ 上の functional analysis として考える。

Renormalized Feynman graph

関数 $w(x) = w(x_1, x_2, \dots, x_r)$ が

$$w \in L^q(\mathbf{R}^{2r}), \quad \exists q > 1 \quad (4.35)$$

$$\text{Supp } w \subset \square_{j_1} \times \square_{j_2} \times \dots \times \square_{j_r} \quad (4.36)$$

を満たすとして、

$$R_M(\phi) = \int_{\mathbf{R}^{2r}} dx \prod_{i=1}^r : \phi_M(x_i)^{n_i} : w(x) \quad (4.37)$$

とおく。

Theorem 4.2. [4] $\forall \nu \geq 1$ に対し

$$R = \lim_{M \rightarrow \infty} R_M \text{ in } L^\nu(\mathcal{S}', \mu_C) \quad (4.38)$$

なる R が存在し

$$\| R \|_{L^\nu(\mathcal{S}', \mu_C)} \leq K^N \prod_{\square} N_\square! \| w \|_{L^q} \quad (4.39)$$

が成り立つ。ただし N_\square は、 R を構成する field $\phi(x_i)$ のうち cell \square に属するものの数であり、 $N = \sum N_\square$ 、また K は w によらない定数である。 ◇

Momentum space では $C_M(p) > 0$ であるから、被積分関数は w の Fourier 変換を除いて正値である。よって L^1 norm 評価は、実質的に Feynman graph の計算 [20] と変わるものはない。 ν が偶数なら、 R_M^ν は R_M と同じ形をしているので、 L^ν bound は L^1 bound に帰着する。 ν が偶数でないときは、Hölder の不等式により

$$\nu < \nu' \implies \| R \|_{L^\nu} \leq \| R \|_{L^{\nu'}} \quad (4.40)$$

が成立することを用いる。また、一般に ϕ の N 次式を Gauss 積分すると $(N/2)!$ 個の項が作られるから、 R を単純に評価すると

$$\left(\frac{N}{2} \right)! = \left(\frac{\sum N_\square}{2} \right)! \quad (4.41)$$

が出来てしまう。これが、“local factorial” $\prod_\square N_\square!$ に分解するのは、次の理由による。

- field が多くの cell に分かれると、異なる cell に属する field $\phi(x_i), \phi(x_j)$ の間の空間的距離 $|x_i - x_j|$ が大きくなり、Gaussian covariance の massive decay が効く。

Partition function

Wick product をとる前は、自明な bound

$$0 < e^{-\lambda \int_{\Lambda} \phi^4} \leq 1 \quad (4.42)$$

があったが、Wick product によって導入された counterterm のために、上記のような uniform bound は壊れる [M-dependent bound となる]。しかし、Wick product の定義により

$$\langle V_{\Lambda, M} \rangle_C = 0 \quad (4.43)$$

また (4.26) により

$$\langle V_{\Lambda, M}^2 \rangle_C < \text{const.} \lambda^2 |\Lambda|^2 \quad (4.44)$$

が成立するので [const. は M -independent]、effective には、 $V_{\Lambda, M}$ の大きさは $\lambda |\Lambda|$ 程度であると考えられる。実際、次の定理が成り立つ。

Theorem 4.3. [4] $\operatorname{Re} \lambda \geq 0, 1 \leq \nu$ のとき、定数 K_ν が存在して、

$$\| e^{-V_{\Lambda, M}} \|_{L^\nu(\mathcal{S}', \mu_C)} \leq e^{K_\nu |\Lambda|} \quad (4.45)$$

が成り立つ。 \diamond

Theorem 4.2, Theorem 4.3 から、次の定理が得られる。

Theorem 4.4. [4] $\operatorname{Re} \lambda \geq 0, \nu \geq 1$ のとき、極限

$$\operatorname{Re} e^{-V_\Lambda} = \lim_{M \rightarrow \infty} R_M e^{-V_{\Lambda, M}} \text{ in } L^\nu(\mathcal{S}', \mu_C) \quad (4.46)$$

が存在し、

$$\| \operatorname{Re} e^{-V_\Lambda} \|_{L^\nu(\mathcal{S}', \mu_C)} \leq K^N \prod_{\square} N_\square! \| w \|_{L^q} e^{K|\Lambda|} \quad (4.47)$$

が成り立つ。 \diamond

4.3 無限体積極限

上記の UV limit の論法と、Section 3.2, Section 3.3 の cluster/Mayer 展開を組み合せて、 ϕ_2^4 model を構成する。

(1) Wick product によって renormalization を施した積分 (4.28) に、Section 3.2, Section 3.3 の cluster/Mayer 展開を行う。

- (2) Polymer activity の UV limit を Theorem 4.4 によって評価する. ただし Section 4.2 の C, C_M を, cluster 展開の際に導入される $C_s, C_{M,s}$ で置き換えなければならない.
(3) 上記の評価が領域の体積によらないことに注意して, IR limit をとる.

結局, 次の定理が得られる.

Theorem 4.5. ϕ_2^4 model の Schwinger function

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbf{R}^2} \lim_{M \rightarrow \infty} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{\Lambda, M} \quad (4.48)$$

が, $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_\neq^{2n})$ の元として存在する. \diamond

5 ϕ_3^4, ϕ_4^4 の繰りこみ群解析

紫外発散は次元が大きくなると一般に強くなる. 強い紫外発散を含む model の分析には, 繰りこみ群解析 が適している. 繰りこみ群解析は scale 分解に基づく解析法の総称であり, multiscale analysis とも呼ばれている.

5.1 Renormalization

Feynman graph の紫外発散

d 次元 ϕ^4 model の紫外発散について整理する. n 本の外線と $j > 0$ 個の内点をもつ connected Feynman graph G に対し

$$\omega(G) = (4-d)j + \frac{d-2}{2}n - d \quad (5.1)$$

とおく.

Theorem 5.1. $\omega(G) \leq 0$ ならば, G の amplitude は発散する. \diamond

Proof. 内線の数 $= \frac{4j-n}{2}$ に注意する. Feynman graph の amplitude $A(x_1, \dots, x_n)$ の Fourier 変換

$$\int dx_1 \cdots \int dx_n \exp \left(\sum_{k=1}^n ip_k x_k \right) A(x_1, \dots, x_n) = \delta \left(\sum_{k=1}^n p_k \right) \hat{A}(p_1, \dots, p_n) \quad (5.2)$$

(右辺の δ 関数は, amplitude の平行移動不变性による) の “kernel” $\hat{A}(p_1, \dots, p_n)$ は, 次の Feynman rule によって計算される.

- 外線に $(p_k^2 + m^2)^{-1}$ を置く ($k = 1, 2, \dots, n$).
- 内線に $(q_k^2 + m^2)^{-1}$ を置く ($k = 1, 2, \dots, \frac{4j-n}{2}$).
- 内点に momentum 保存則を表す δ 関数を置く.
- 内線の momentum q_k について \mathbf{R}^d で積分する ($k = 1, 2, \dots, \frac{4j-n}{2}$).

すると,

- 内線に対応して分母に現れる momentum の次数は $4j - n$.
- 保存則の数は j だが, そのうち一つは, 外線 momentum の和に関するもの ((5.2) の右辺の δ) であるから, 独立な積分変数は $\frac{4j - n}{2} - j + 1$ 個.

よって, 発散条件は

$$4j - n \leq \left(\frac{4j - n}{2} - j + 1\right)d \quad (5.3)$$

即ち $\omega(G) \leq 0$ である. \square

定理の逆は成立しない. しかし, G の subgraph の情報を用いると, G の amplitude の収束条件が得られる. そこで, G の subgraph (G の線の集合) で connected なものの F に対して, $\omega(F)$ を $\omega(G)$ と同様に定義する. ただし, F を定義する線の端点を F の内点, F の内点から出る G の線のうち F に属さないものを F の外線とする.

Theorem 5.2. [19, P.65] Graph G の subgraph F で, connected かつ内点をもつものが, すべて

$$\omega(F) > 0 \quad (5.4)$$

を満たすならば, G の amplitude は有限である. \diamond

条件 (5.4) を破る危険な subgraph は, 次元ごとに変わる.

2 次元の場合

危険な subgraph の条件は

$$j \leq 1 \quad (5.5)$$

である. よって発散する graph は



だけであるが, これは Wick product により renormalize できた.

3 次元の場合

危険な subgraph の条件は

$$j + \frac{1}{2}n \leq 3 \quad (5.7)$$

である. よって発散する graph は

$$(j, n) = (1, 2) : \text{ } \quad (5.8)$$

$$(j, n) = (2, 2) : \text{ } \quad (5.9)$$

だけである。前者の発散を除去するための counterterm は、Wick product から来る

$$\kappa_0 \int_{\Lambda} dx \phi(x)^2, \quad \kappa_0 = -6\lambda C_M(0) \quad (5.10)$$

であり、後者の発散を除去するための counterterm は、

$$\kappa \int_{\Lambda} dx \phi(x)^2, \quad \kappa = 48\lambda^2 \int_{\Lambda} dy C_M(x, y)^3 \quad (5.11)$$

である。結局 ϕ_3^4 の counterterm は

$$(\kappa_0 + \kappa) \int_{\Lambda} dx \phi(x)^2 \quad (5.12)$$

potential は (定数差を除いて)

$$V_{\Lambda, M}(\phi) = \lambda \int_{\Lambda} dx : \phi(x)^4 : + \kappa \int_{\Lambda} dx : \phi(x)^2 : \quad (5.13)$$

となる。

4 次元の場合

$n \leq 4$ なる subgraph は全て危険であり、実際 $n = 2, 4$ のとき発散する。従って、無限個の発散 subgraph に 対応する counterterm が必要になる。それらは

$$\delta\lambda \int_{\Lambda} dx \phi(x)^4 + (\kappa_0 + \kappa) \int_{\Lambda} dx \phi(x)^2 + \zeta \int_{\Lambda} dx (\partial\phi)^2(x) \quad (5.14)$$

のように 2 次と 4 次の項にまとめられるが、係数を explicit に書くことはできない。これらの係数は、Section 5.2 の繰りこみ群解析によって定められる。結局 ϕ_4^4 の potential は、 $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ とおいて

$$V_{\Lambda, M}(\phi) = \lambda' \int_{\Lambda} dx : \phi(x)^4 : + \kappa' \int_{\Lambda} dx : \phi(x)^2 : + \zeta \int_{\Lambda} dx : (\partial\phi)^2(x) : \quad (5.15)$$

となる。

摂動的繰りこみ可能性 [20]

$d > 4$ では、各 n に対して十分大きな j をとると、 $\omega(G) \leq 0$ となる。このように紫外発散が多様化する理論では、有限個の counterterm を用いて紫外発散を除去することが不可能になる。

一方、4 次元以下では、counterterm によって紫外発散が消えるという主張も、決して自明ではない。 λ に関する形式的展開の各ベキごとに紫外発散が消えるという主張を摂動的繰りこみ可能性 という²⁰。

次元	摂動的繰りこみ可能性
2, 3, 4	可能
≥ 5	不可能

5 次元以上では、non-trivial な ϕ^4 を構成することはできないことが知られている。

²⁰ 摂動的繰りこみ可能性の証明は、最近に至るまで様々な改良が続けられてきたが、その難しさの一つは、subgraph の複雑さに起因する。Salam によれば

The difficulty, as in all this work, is to find a notation which is both concise and intelligible to at least two persons, of whom one may be an author.

とのことである。

5.2 繰りこみ群

ϕ_3^4 の UV limit は、繰りこみ群解析によって調べることができる。 ϕ_4^4 の UV limit への応用は未解決の難題であるが、IR 方向の分析においては繰りこみ群解析が成功している。まず、繰りこみ群の概念を幾分一般的に提示する。

繰りこみ群の概念

与えられた Gaussian covarinace ((2.15) など) を D とし、それを Gaussian covariance の和

$$D = \sum_{k=0}^N D_k \quad (5.16)$$

に分解する。 D_k を covariance とする(互いに独立な) Gaussian variable を $\phi_k(x)$ と書き、

$$\phi_{k,0} = \sum_{j=0}^k \phi_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.17)$$

$$D_{k,0} = \sum_{j=0}^k D_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.18)$$

とおくと、 $\phi_{k,0}$ は $D_{k,0}$ を covariance とする Gaussian variable となる。

すると、汎関数 $H(\phi)$ の μ_D に関する積分は

$$\int d\mu_D(\phi) H(\phi) = \int d\mu_{D_{N,0}}(\phi_{N,0}) H(\phi_{N,0}) \quad (5.19)$$

$$= \int d\mu_{D_{N-1,0}}(\phi_{N-1,0}) \int d\mu_{D_N}(\phi_N) H(\phi_N + \phi_{N-1,0}) \quad (5.20)$$

のように書ける。そこで

$$H_{k-1}(\phi_{k-1,0}) = \int d\mu_{D_k}(\phi_k) H_k(\phi_k + \phi_{k-1,0}), \quad k = N, N-1, \dots, 1 \quad (5.21)$$

$$H_N = H \quad (5.22)$$

とおく。

Covariance の分解 (5.16) が、次に述べるような scale 分解に基づいており、 ϕ_k が各 scale の“ゆらぎ”を表すとき、recursion (5.21) によって定義される変換を繰りこみ群変換 という。

Gaussian measure の scale 分解の例

Covariance $D_{k,0}$ として

$$D_{k,0}(x, y) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \chi(L^{-k} p) dp \quad (5.23)$$

$$\chi(p) = e^{-p^2} \quad (5.24)$$

をとる。そして

$$D_k(x, y) = D_{k,0}(x, y) - D_{k-1,0}(x, y) \quad (5.25)$$

$$= \int_{\mathbf{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} (\chi(L^{-k} p) - \chi(L^{-(k-1)} p)) dp, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.26)$$

$$D_0(x, y) = D_{0,0}(x, y) \quad (5.27)$$

$$= \int_{\mathbf{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \chi(p) dp \quad (5.28)$$

とおり, 各 ϕ_k は, momentum scale L^k 程度 (波長 L^{-k} 程度) のゆらぎを表す Gaussian variable であると見える.

上記の例は, heat kernel $\chi(p)$ による scale 分解であるが, cutoff function $\chi(p)$ としては, C_0^∞ 関数を使うこともある. また, lattice regularization に即した scale 分解は, Block spin 変換として実現される [14].

Scaling

変換 (5.21) に scale 変換を組み合せると, 繰りこみ群変換の iteration が見やすくなる. $L > 1$ に対し, $\phi_k(x)$ を scaling して,

$$\varphi_k(x) = L^{-k(d-2)/2} \phi_k(L^{-k}x) \quad (5.29)$$

とおく. このとき, $\varphi_k(x)$ の covariance は

$$C_k(x, y) = L^{-k(d-2)} D_k(L^{-k}x, L^{-k}y) \quad (5.30)$$

となる. 例えば (5.26) の場合なら,

$$C_k(x, y) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + (m/L^k)^2} (\chi(p) - \chi(Lp)) dp \quad (5.31)$$

となり, C_k は殆ど k に依存せず, ゆらぎ φ_k の特徴的な長さは k によらず $O(1)$ である.

さらに,

$$\varphi_{k,0}(x) = L^{-k(d-2)/2} \phi_{k,0}(L^{-k}x) \quad (5.32)$$

$$C_{k,0}(x, y) = L^{-k(d-2)} D_{k,0}(L^{-k}x, L^{-k}y) \quad (5.33)$$

とおくと,

$$\varphi_{k,0}(x) = \varphi_k(x) + L^{-(d-2)/2} \varphi_{k-1,0}(L^{-1}x) \quad (5.34)$$

$$C_{k,0}(x, y) = C_k(x, y) + L^{-(d-2)} C_{k-1,0}(L^{-1}x, L^{-1}y) \quad (5.35)$$

が成り立つ. よって,

$$H_k(\phi_{k,0}) = \mathbf{H}_k(\varphi_{k,0}) \quad (5.36)$$

で定義される \mathbf{H}_k は,

$$\int d\mu_D(\phi) H(\phi) = \int d\mu_{D_{k,0}}(\phi_{k,0}) H_k(\phi_{k,0}) \quad (5.37)$$

$$= \int d\mu_{C_{k,0}}(\varphi_{k,0}) \mathbf{H}_k(\varphi_{k,0}) \quad (5.38)$$

$$\mathbf{H}_{k-1}(\varphi_{k-1,0}) = \int d\mu_{C_k}(\varphi_k) \mathbf{H}_k(\varphi_k(\cdot) + L^{-(d-2)/2} \varphi_{k-1,0}(L^{-1}\cdot)) \quad (5.39)$$

を満たす. 即ち, \mathbf{H}_{k-1} は, \mathbf{H}_k を fluctuation φ_k に関して積分し, その結果を scaling したものである.

また初期値 \mathbf{H}_N を

$$\mathbf{H}_N(\varphi) = \exp(-V_N(\varphi)) \quad (5.40)$$

と書くとき, ϕ_3^4 の場合

$$V_N(\varphi) = \int_{L^N \Lambda} dx (L^{-N} \lambda : \varphi(x)^4 : + L^{-2N} \kappa : \varphi(x)^2 :) \quad (5.41)$$

ϕ_4^4 の場合

$$V_N(\varphi) = \int_{L^N \Lambda} dx (\lambda' : \varphi(x)^4 : + L^{-2N} \kappa' : \varphi(x)^2 : + \zeta : \partial \varphi(x)^2 :) \quad (5.42)$$

となる²¹.

繰りこみ群の描像

UV cutoff や scale 分解の具体的な形によらず、繰りこみ群変換 (5.21) は、

high momentum または短波長のゆらぎを“繰りこむ”ことにより、low momentum または長波長のゆらぎに関する marginal distribution を得る手続きである

と言える。さらに、scale 変換を組み合せた繰りこみ群変換 (5.39) は

系 H_k を縮小することによって生じた細かい構造を繰りこんで、もとの系と同程度に細かい構造をもつ系 H_{k-1} を得る、一種の縮小変換である

と考えられる。

5.3 繰りこみ群の実現

一般に、繰りこみ群の flow の厳密な解析は、極めて複雑である。繰りこみ群解析には、いくつかの formulation が知られているが、最近、Brydges group による大変読み易い定式化が発表されたので、彼等の formulation に即して、繰りこみ群解析の概略を解説する [13]。

Polymer 表現

まず IR cutoff を導入し、領域を有界領域 Λ に限っておく。 $\phi = \phi_{N,0}$ を Λ 上の field とすれば、 $\phi_{k,0}$ の scaling $\varphi_{k,0}$ は $L^k \Lambda$ 上の field となる。

繰りこみ群の k step 目 $H_k(\varphi)$ を、“polymer 展開”

$$H_k(\varphi) = \sum_{\{X_i\}: \sum_i X_i = L^k \Lambda} \prod_i A(X_i, \varphi) \quad (5.43)$$

の形に表したい。ただし、

- “polymer” X_i は $L^k \Lambda$ 中の cell の和集合
- $\{X_i\}$ に関する和は、 $L^k \Lambda$ を disjoint polymer に分解する方法の全体にわたる。
- “polymer activity” $A(X, \varphi)$ は、 $\varphi|_X$ に依存する。

そして、

- $H_k(\varphi)$ が (5.43) のように表せることを inductive に示しながら、
- $A(X, \varphi)$ に対する評価を導いて行く

という方法をとる。ここで $A(X, \varphi)$ に対する評価は、

²¹ 上記の Wick product は、(ϕ ではなく) φ の covariance を用いて定義されることに注意。結果的に、 $: \phi^4 := L^{2N(d-2)} : \varphi^4 :$ が成り立つ。

- (1) X の shortest spanning tree²² の長さ $L(X)$ に関する decay
(2) φ に関する増大度

を測る適当な norm によって表現する.

Local potential

実際には, polymer activity を次のように表す.

$$A(X, \varphi) = \square(X) e^{-V(X, \varphi)} + K(X, \varphi) \quad (5.44)$$

ただし,

$$\square(X) = \begin{cases} 1 & X = \text{cell} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.45)$$

V は “local potential”, 即ち

$$V(X, \varphi) = \int_X Q(\varphi(x)) dx, \quad Q : \text{多項式} \quad (5.46)$$

なる形を持つ functional で, K は local potential からのずれを与える. このとき

$$\begin{aligned} & \sum_{\{X_i\}: \sum_i X_i = L^k \Lambda} \prod_i (\square(X_i) e^{-V(X_i, \varphi)} + K(X_i, \varphi)) \\ &= \sum_{\{X_i\}: \sum_i X_i \subset L^k \Lambda} \exp(-V(L^k \Lambda \setminus \sum_i X_i, \varphi)) \prod_i K(X_i, \varphi) \end{aligned} \quad (5.47)$$

となる. ただし右辺の $\{X_i\}$ に関する和は, 領域 $L^k \Lambda$ 内の (空でない) disjoint polymer の集合全体 (空集合を許す) にわたる. 特に (5.47) において $K = 0$ とすれば,

$$\sum_{\{X_i\}: \sum_i X_i = L^k \Lambda} \prod_i \square(X_i) e^{-V(X_i, \varphi)} = \exp(-V(L^k \Lambda, \varphi)) \quad (5.48)$$

となるので, 初期値 \mathbf{H}_N は, (5.41), (5.42) で与えられる local potential を用いて, (5.43), (5.44) の形に書ける.

繰りこみ群変換の構成

繰りこみ群変換は, polymer activity $A \equiv (V, K)$ を, 新しい $A' \equiv (V', K')$ に対応させる規則であり, 次の 3段階を経て定義される²³.

- (1) **Fluctuation:** (5.43) を (5.39) のように μ_{C_k} で積分し, その結果を再び (5.43) の右辺の形に書く.
- (2) **Extraction:** 新しい K の中に含まれる有害な成分を抜き出して V に移す. V の中の counterterm が, この有害な成分を逐次打ち消すはずである. ϕ_4^4 では, 有害成分を打ち消すという原理で, counterterm を決定する.
- (3) **Scaling:** Scale 変換することにより, iteration に備える.

²² X を構成する cell の中心を頂点とする connected tree graph のうち, 最も短いもの

²³ 厳密に評価するには根性がいる.

5.4 繰りこみ群の flow

初期値 $A_N = (V_N, K_N)$ に繰りこみ群変換を繰り返し施し, その flow $(V_k, K_k), k = N, N-1, N-2, \dots$ を追跡する. そのために, V_k を具体的に求め, K_k に対する評価を導く. Flow の本質的な情報は V_k 部分に含まれ, 残りの情報が K_k にまとめられる.

現在の繰りこみ群解析には, 次の 2 つの技術的な (あるいは本質的な?) 制約がある.

- (1) V_k 部分は有限自由度であること (polynomial interaction)
- (2) Coupling constant (V_k を定義する多項式の係数 λ) が小さいこと (asymptotically free)

Asymptotically free であるかどうかは, 次元と flow の方向 (UV / IR) に依存する (以下の解説を参照). ϕ^4 model の繰りこみ群解析適応性の現状をまとめておく.

次元	繰りこみ群解析適応性
2	不適
3	UV 方向に適
4	IR 方向に適
≥ 5	IR 方向に適

2 次元では, 全ての次数の項に注意を払わなければならないので, V_k が多項式にならない. 従って (1) に反しており, 現在の繰りこみ群解析は適さない. しかし, 各項の係数は UV 方向において極めて小さいから, (2) の制約に違反してはいない²⁴.

3 次元 (UV 方向)

繰りこみ群変換の初期値 $A_N = (V_N, K_N)$ は,

$$V_N(X, \varphi) = \int_X dx (L^{-N} \lambda : \varphi(x)^4 : + L^{-2N} \kappa : \varphi(x)^2 :) \quad (5.49)$$

$$K_N = 0 \quad (5.50)$$

である. これに繰りこみ群変換を繰り返し施し, その flow (V_k, K_k) を追跡する. このとき V_k を具体的に求め, K_k に対する評価を導く. $L^{-k} \lambda$ が小さい間は iterate できて,

$$V_k(X, \varphi) = \int_X dx (\lambda_k : \varphi(x)^4 : + \kappa_k : \varphi(x)^2 :) \quad (5.51)$$

$$\lambda_k = L^{-k} \lambda \quad (5.52)$$

$$\kappa_k = L^{-2k} \lambda^2 + \mathbf{O}(\lambda^3) \quad (5.53)$$

となる.

従って, λ を十分小さく固定しておけば, $k = 0$ まで flow を追跡できる. さて, $k = 0$ に固定して, 出発点 N を ∞ に持つて行くのが UV limit であるが, λ を十分小さく選べば, UV limit が存在することになる.

3 次元 (IR 方向) — 未解決

Massive model($m > 0$) の IR limit は cluster 展開で調べられるが, massless model($m = 0$) に cluster 展開は使えない. このような model に繰りこみ群解析を応用して, 臨界現象の統計力学を作るというのが, Wilson, Kadanoff の本来の発想であった.

²⁴ (1) の制約は技術的に克服できる可能性もある. しかし (2) の制約は, より深刻である (Section 5.5 参照).

Massless $m = 0$ の場合, $k = 0$ を越えて $k < 0$ の方向 (IR 方向) に進むと, $\lambda_k = L^{-k}\lambda$ が大きくなるので, 上記の繰りこみ群解析は間もなく続けられなくなる. しかし繰りこみ群の flow は, 次第に nontrivial fixed point に漸近するだろうと予想されている.

4 次元 (UV 方向) — 未解決

ϕ_4^4 の場合, λ を小さく選ぶと, coupling constant λ_k は, 次の recursion に従う.

$$\lambda_N = \lambda \quad (5.54)$$

$$\lambda_{k-1} = \lambda_k - c\lambda_k^2 + \mathbf{O}(\lambda_k^3) \quad (5.55)$$

ただし, $c > 0$ である. よって,

$$\lambda_k \sim \frac{\lambda}{N-k}, \quad k \ll N \quad (5.56)$$

となる. k を固定して $N \rightarrow \infty$ とすると, coupling constant λ_k は 0 に収束する. 即ち, λ を小さい値に選んだときの UV limit は, Gaussian である. これを weak triviality という.

λ が小さくない場合については, lattice regularization を用いて, triviality を示唆する幾つかの結果が得られているが, 完全な解決には至っていない [8, P.389].

4 次元 (IR 方向)

Massless $m = 0$ の場合, $N = 0$ を出発点として $k \rightarrow -\infty$ の方向に繰りこみ群解析を進めることができる. この場合の coupling constant の flow は

$$\lambda_{-j} \sim \frac{\lambda}{j}, \quad j \gg 1 \quad (5.57)$$

となり, IR 方向に asymptotically free である. この model (IR ϕ_4^4) は, 繰りこみ群解析の代表的な応用例として, よく知られている.

5.5 繰りこみ群の歴史

繰りこみ群の歴史は, 概ね次の 4 期に分けることができる.

- 発見の時代 1940 ~
 - 摂動的繰りこみ可能性
- 定式化の時代 1960 ~
 - 縮小変換の描像
 - 臨界現象の統計力学
- 厳密化の時代 1980 ~
 - 近 Gauss 測度 (asymptotically free theory) の厳密構成
- 成熟期 2000 ~ ??
 - 遠 Gauss 測度 (large coupling problem)

- QED の(非)存在
- quark 閉じ込めの証明

現在は、“厳密化の時代”の後期に当ると思われる。これに関連して、服部哲弥氏の予想を引用する [23].

私は、今の解析学および理論物理学は 1900 年を中心とした革命期の後の洗練期に入ったと思っています。次の革命期は今から 50 年後、仮に 2041 年としましょう、を中心とした時期だと思います。…私の思う 2041 年の解析学および理論物理学の革命とは、20 世紀の言葉で近似的に言えば無限自由度系の解析であり、さらに 20 世紀で言うくりこみ群の 21 世紀における姿が今 微積分学のような基礎技術になるということです。

6 Fermion

Section 2.4 の OS4 は、Schwinger function の対称性を要求している。即ち、 ϕ^4 model が記述する粒子は boson である。これから扱う fermion の量子論は、反対称 Schwinger function をもち、同一点に 2 つ以上の粒子が存在できないとする Pauli 原理を満たす。前節までの bosonic integral に対する fermionic integral は、Grassmann variable を用いて定義される²⁵。また、この section で導入する gauge 場は外場として fix されるが、次の section で量子化されて functional integral の対象となる。以後すべて torus $T^d = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ 上で考える。

6.1 Grassmann 積分

Grassmann variable [20, P.439]

反交換関係

$$\psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = 0 \quad (6.1)$$

$$\bar{\psi}_i \bar{\psi}_j + \bar{\psi}_j \bar{\psi}_i = 0 \quad (6.2)$$

$$\psi_i \bar{\psi}_j + \bar{\psi}_j \psi_i = 0 \quad (6.3)$$

を満たす有限個の variable $\psi_i, \bar{\psi}_i, i = 1, 2, \dots, N$ が生成する \mathbf{C} 上の Grassmann algebra \mathcal{G} を考える。 Grassmann variable の formal power series は、有限で切れる。例えば

$$\exp(\bar{\psi}_1 \psi_1) = 1 + \bar{\psi}_1 \psi_1 \quad (6.4)$$

である。

\mathcal{G} 上の線形写像 $I : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{C}$ で

$$I(F) = 0, \quad F : \text{polynomial of order } < 2N \quad (6.5)$$

$$I(\bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_2 \cdots \bar{\psi}_N \psi_N) = 1 \quad (6.6)$$

なるものを、Grassmann integral といい、

$$I(F) = \int d\psi d\bar{\psi} F = \int d\psi_1 d\bar{\psi}_1 d\psi_2 d\bar{\psi}_2 \cdots d\psi_N d\bar{\psi}_N F, F \in \mathcal{G} \quad (6.7)$$

と書く。

²⁵ Fermion の量子論を Euclidean framework から relativistic framework に翻訳する手続きは、[5] が与えている。

Grassmann Gaussian integral

$N \times N$ 正則行列 $A = (A_{ij})$ に対し,

$$(\bar{\psi}, A\psi) = \sum_{ij} \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j \quad (6.8)$$

とおくと,

$$\int d\psi d\bar{\psi} e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} = (-1)^N \det A \quad (6.9)$$

$$\int d\psi d\bar{\psi} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} = (-1)^N A_{ij}^{-1} \det A \quad (6.10)$$

$$\int d\psi d\bar{\psi} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \bar{\psi}_k \bar{\psi}_{\ell} e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} = (-1)^N (A_{ij}^{-1} A_{k\ell}^{-1} - A_{i\ell}^{-1} A_{jk}^{-1}) \quad (6.11)$$

などが成り立つ.

6.2 Fermion の量子化

Euclidean Dirac operator [17]

簡単のため gauge group は $U(1)$ とし, $L^2(\mathbf{T}^d)$ に act する²⁶ Euclidean free Dirac operator を \not{D} と書く:

$$\not{D} = \sum_{\mu=1}^d \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \quad (6.12)$$

ただし, γ_{μ} は Euclidean Dirac matrix

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = -2\delta_{\mu\nu} \quad (6.13)$$

$$\gamma_{\mu}^* = -\gamma_{\mu} \quad (6.14)$$

であり, $2^{[d/2]} \times 2^{[d/2]}$ matrix として表現される. 表現空間 $\mathbf{C}^{2^{[d/2]}}$ の要素を spinor という.

Gauge 化

Gauge potential $A_{\mu}(\cdot), \mu = 1, 2, \dots, d$, をもつ covariant Dirac operator を

$$\not{D}_A = \sum_{\mu=1}^d \gamma_{\mu} (\partial_{\mu} - igA_{\mu}) \quad (6.15)$$

$$= \not{D} - ig\mathcal{A} \quad (6.16)$$

と書く. ただし, g は実数の定数で, fermion の“電荷”を表す. また A_{μ} を掛け算作用素と見なしている. この section では, これ以降

$$A_{\mu} \in C^{\infty}(\mathbf{T}^d) \quad (6.17)$$

を仮定する. よく知られているように, \not{D}_A は gauge 不変である. 即ち, $U(\theta)u(x) = e^{i\theta(x)}u(x)$ で $U(\theta)$ を定めるとき,

$$U(-\theta)\not{D}_A + \partial\theta U(\theta) = \not{D}_A \quad (6.18)$$

²⁶ 簡単のため, trivial bundle \mathcal{O} section を考える.

が成り立つ。

Quantization

Bosonic path integral (1.1) に対する fermionic path integral を、まず formal な Grassmann 積分として、次のように書く。

$$\ll F \gg_A = \frac{1}{\det(i\partial + mI)} \int d\psi d\bar{\psi} e^{-(\bar{\psi}, (i\partial_A + mI)\psi)} F(\bar{\psi}, \psi) \quad (6.19)$$

ただし、 $m > 0$ は fermion の mass で、

$$d\psi d\bar{\psi} = \prod_{x \in \mathbf{T}^d} \prod_{a=1}^{2^{[d/2]}} d\psi_a(x) d\bar{\psi}_a(x), \quad (a \text{ は spinor の subscript}) \quad (6.20)$$

$$(\bar{\psi}, (i\partial_A + mI)\psi) = \int_{\mathbf{T}^d} dx \sum_{a,b=1}^{2^{[d/2]}} \bar{\psi}_a(x) (i(\partial_A)_{ab} + m\delta_{ab}) \psi_b(x) \quad (6.21)$$

である。

ここで

$$S = (i\partial + mI)^{-1} \quad (6.22)$$

$$S_A = (i\partial_A + mI)^{-1} \quad (6.23)$$

とおくと、

$$\ll F \gg_A = \det S \int d\psi d\bar{\psi} e^{-(\bar{\psi}, (S^{-1} + gA)\psi)} F(\bar{\psi}, \psi) \quad (6.24)$$

特に $F = 1$ とすると、

$$\ll 1 \gg_A = \det S \int d\psi d\bar{\psi} e^{-(\bar{\psi}, (S^{-1} + gA)\psi)} \quad (6.25)$$

$$= \det S \det(S^{-1} + gA) \quad (6.26)$$

$$= \det(I + gSA) \quad (6.27)$$

$F = \psi(x)\bar{\psi}(y)$ とすると、

$$\ll \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) \gg_A = \det(I + gSA) S_A(x, y)_{ab} \quad (6.28)$$

$F = \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\psi_c(x')\bar{\psi}_d(y')$ とすると、

$$\ll \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\psi_c(x')\bar{\psi}_d(y') \gg_A = \det(I + gSA) \begin{vmatrix} S_A(x, y)_{ab} & S_A(x, y')_{ad} \\ S_A(x', y)_{cb} & S_A(x', y')_{cd} \end{vmatrix} \quad (6.29)$$

となる。この種の公式を、Matthews-Salam formula という。

この section では、

- Matthews-Salam formula によって fermion の量子論を定義する

という立場をとる。より基本的なレベルから Matthews-Salam formula を導くという問題は、Section 7 で扱う。

6.3 Fermion determinant

Matthews-Salam formula (6.27)(6.28)(6.29) に現れる関数行列式 (fermion determinant) $\det(1 + gS\mathcal{A})$ には、紫外発散が含まれている。まず、fermion determinant の紫外発散の構造を、Fredholm determinant の formalism [10, 17, 18] を用いて理解する。

Fredholm determinant

$L^2(\mathbf{T}^d)$ 上の compact operator K と $q = 1, 2, 3, \dots$ に対し、

$$K \in \mathbf{B}_q \iff \text{Tr}(K^* K)^{q/2} < \infty \quad (6.30)$$

$$\|K\|_q := \left(\text{Tr}(K^* K)^{q/2} \right)^{1/q} \quad (6.31)$$

と定める。このとき、

$$\mathbf{B}_p \subset \mathbf{B}_q, p < q \quad (6.32)$$

$$K \in \mathbf{B}_p, K' \in \mathbf{B}_q \implies KK' \in \mathbf{B}_r, p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} \quad (6.33)$$

が成り立つ。

$K \in \mathbf{B}_1$ とする。Exterior product $\wedge^n L^2(\mathbf{T}^d)$ に

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_n \mapsto Ku_1 \wedge \dots \wedge Ku_n, \quad u_j \in L^2(\mathbf{T}^d) \quad (6.34)$$

のように作用する operator を $\wedge^n K$ と書き、Fredholm determinant を

$$\det(I + gK) := \sum_{n=0}^{\infty} g^n \text{Tr}(\wedge^n K) \quad (6.35)$$

で定義する。ここで

$$|\text{Tr}(\wedge^n K)| \leq \frac{1}{n!} \|K\|_1^n \quad (6.36)$$

であるから

$$|\det(I + gK)| \leq e^{|g|\|K\|_1} \quad (6.37)$$

が成り立つ。また $\{\lambda_j\}$ を K の 0 以外の固有値とすれば、

$$\det(I + gK) = \prod_j (1 + g\lambda_j) \quad (6.38)$$

である。

さらに、 $q = 2, 3, \dots$ に対し、

$$K \in \mathbf{B}_q \implies I - (I + gK) \exp \left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{(-g)^k}{k} K^k \right) \in \mathbf{B}_1 \quad (6.39)$$

が成立することに注意して、modified Fredholm determinant \det_q を

$$\det_q(I + gK) := \det \left[(I + gK) \exp \left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{(-g)^k}{k} K^k \right) \right] \quad (6.40)$$

で定義する。

Theorem 6.1. $K \in \mathbf{B}_q$ に対し,

$$|\det_q(I + gK)| \leq e^{|g|^q c(q) \|K\|_q^q} \quad (6.41)$$

$$\det_q(I + gK) = \prod_j \left[(1 + g\lambda_j) \exp \left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{(-g)^k}{k} \lambda_j^k \right) \right] \quad (6.42)$$

が成り立つ. ただし $c(q)$ は q だけで定まる正の定数, $\{\lambda_j\}$ は K の 0 以外の固有値である. また $K \in \mathbf{B}_1$ ならば

$$\det(I + gK) = \exp \left(- \sum_{k=1}^{q-1} \frac{(-g)^k}{k} \text{Tr } K^k \right) \det_q(I + gK), \quad 2 \leq q \quad (6.43)$$

さらに $|g| \|K\|_1 < 1$ ならば

$$\det(I + gK) = \exp \left(- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-g)^k}{k} \text{Tr } K^k \right) \quad (6.44)$$

が成り立つ. \diamond

Fermion determinant

Fredholm determinant の formalism を fermion determinant $\det(I + gS\mathcal{A})$ に適用する.

まず $|g| \|S\mathcal{A}\|_1 < 1$ であったとすると, (6.44) によって gauge 場の effective potential が

$$V(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-g)^k}{k} \text{Tr } (S\mathcal{A})^k \quad (6.45)$$

で定義される. そして右辺の

$$\begin{aligned} \text{Tr } (S\mathcal{A})^k &= \int dx_1 \cdots \int dx_k \text{tr } (S(x_k - x_1)\mathcal{A}(x_1)S(x_1 - x_2)\mathcal{A}(x_2) \\ &\quad S(x_2 - x_3)\mathcal{A}(x_3) \cdots S(x_{k-1} - x_k)\mathcal{A}(x_k)) \end{aligned} \quad (6.46)$$

は graph 的に解釈できる. しかし一般に $|g| \|S\mathcal{A}\|_1 < 1$ は成立しないので, effective potential $V(A)$ は定義されない.

Theorem 6.2. 仮定 $A_\mu \in C^\infty(\mathbf{T}^d)$ のもとで

$$S\mathcal{A} \in \mathbf{B}_{d+1} \quad (6.47)$$

従って, $\det_{d+1}(I + gS\mathcal{A})$ は well-defined である. \diamond

Proof. 一般に $f, g \in L^q(\mathbf{T}^d)$ に対して,

$$\|f(x)g(i\partial)\|_q \leq \text{const.} \|f\|_{L^q} \|g\|_{L^q} \quad (6.48)$$

が成立する. $f(x) = A(x), g(p) = \tilde{S}(p) = (\not{p} + m)^{-1}$ とすると (6.47) を得る. \square

上記の定理によると, (6.43) における $\det(I + gS\mathcal{A})$ の未定義部分は

$$\exp \left(- \sum_{k=1}^d \frac{(-g)^k}{k} \text{Tr } (S\mathcal{A})^k \right) \quad (6.49)$$

となる。もちろん、この未定義部分全体を打ち消す counterterm

$$\sum_{k=1}^d \frac{(-g)^k}{k} \text{Tr}(S\mathcal{A})^k \quad (6.50)$$

を導入すれば、紫外発散はすべて消える。しかし、このような nonlocal な counterterm を入れると、reflection positivity が壊れるなど、物理的に期待されない理論を与える結果となる（gauge field A について積分できなくなる懼れもある）。そこで、

$$\int Q_0(A(x))dx, \int Q_1(\partial A(x))dx, \quad Q_0, Q_1 : \text{polynomial} \quad (6.51)$$

という形の local counterterm を用いて紫外発散を除去することを考える。

6.4 Renormalized determinant

UV cutoff function

$$\chi_M(p) = \begin{cases} 1, & |p| < M, \\ 0, & |p| \geq M, \end{cases} \quad M > 0 \quad (6.52)$$

を用いて、

$$\tilde{S}_M(p) = \tilde{S}(p)\chi_M(p) = (\not{p} + m)^{-1}\chi_M(p) \quad (6.53)$$

とおく。このとき、 $S_M\mathcal{A} \in \mathbf{B}_k, k = 1, 2, \dots$ となり、次の Furry の定理が成立する。

Theorem 6.3. [20, P.276] $k = 1, 3, 5, \dots$ に対し、

$$\text{Tr}(S_M\mathcal{A})^k = 0 \quad (6.54)$$

が成り立つ。 \diamond

2 次元の場合

Theorem 6.3 により、紫外発散の心配があるのは、 $\text{Tr}(S_M\mathcal{A})^2$ のみである。Momentum space $\mathbf{T}^{2*} = 2\pi\mathbf{Z}^2$ で計算すると、

$$\text{Tr}(S_M\mathcal{A})^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{q \in \mathbf{T}^{2*}} \sum_{\mu\nu} T_M^{\mu\nu}(q) A_\mu(q) \bar{A}_\nu(q) \quad (6.55)$$

$$T_M^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{p \in \mathbf{T}^{2*}} \chi_M(p) \chi_M(p-q) \text{tr}((\not{p} + m)^{-1} \gamma_\mu (\not{p} - \not{q} + m)^{-1} \gamma_\nu) \quad (6.56)$$

見かけ上、 $T_M^{\mu\nu}(q)$ は $M \rightarrow \infty$ で対数発散するので、

$$T_{\text{ren}}^{\mu\nu}(q) = \lim_{M \rightarrow \infty} (T_M^{\mu\nu}(q) - T_M^{\mu\nu}(0)) \quad (6.57)$$

とおき、renormalized trace と renormalized determinant を

$$\text{Tr}_{\text{ren}}(S\mathcal{A})^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{q \in \mathbf{T}^{2*}} \sum_{\mu\nu} T_{\text{ren}}^{\mu\nu}(q) A_\mu(q) \bar{A}_\nu(q) \quad (6.58)$$

$$\det_{\text{ren}}(I + gS\mathcal{A}) = \exp\left(-\frac{g^2}{2} \text{Tr}_{\text{ren}}(S\mathcal{A})^2\right) \det_3(I + gS\mathcal{A}) \quad (6.59)$$

$$= \exp\left(-\frac{g^2}{2} \text{Tr}_{\text{ren}}(S\mathcal{A})^2\right) \det_4(I + gS\mathcal{A}) \quad (6.60)$$

で定義する。即ち、導入された counterterm は

$$g^2 \sum_{\mu\nu} T_M^{\mu\nu}(0) \int_{\mathbf{T}^2} dx A_\mu(x) A_\nu(x) = g^2 \kappa_M \int_{\mathbf{T}^2} dx \sum_\mu A_\mu(x)^2 \quad (6.61)$$

$$\kappa_M = T_M^{\mu\mu}(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{p \in \mathbf{T}^{2*}} \chi_M(p) \frac{-2m^2}{(p^2 + m^2)^2} \quad (6.62)$$

であるが、 κ_M は $M \rightarrow \infty$ で収束するので、2 次元の場合、 $\det(I + gS\mathcal{A})$ に紫外発散はなかったことになる。しかし上記の counterterm は、gauge 不変性

$$\begin{aligned} \det_{\text{ren}}(I + gS\mathcal{A}) &= \det_{\text{ren}}(I + gS(\mathcal{A} + \partial\xi)) \\ (\xi &\text{は適当な regularity をもつ関数}) \end{aligned} \quad (6.63)$$

を成立させるために導入しなければならない [Section 7]。即ち、gauge 不変な量子論における counterterm は、

- 紫外発散の除去 (and/or)
- momentum cutoff によって壊された gauge 不変性の回復

という目的を持っているのである。

4 次元の場合

紫外発散の心配があるのは、 $k = 2, 4$ のみである。Momentum space $\mathbf{T}^{4*} = 2\pi\mathbf{Z}^4$ で計算すると、

$$\text{Tr } (S_M \mathcal{A})^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{q \in \mathbf{T}^{4*}} \sum_{\mu\nu} T_M^{\mu\nu}(q) A_\mu(q) \bar{A}_\nu(q) \quad (6.64)$$

$$T_M^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{p \in \mathbf{T}^{4*}} \chi_M(p) \chi_M(p-q) \text{tr } ((\not{p} + m)^{-1} \gamma_\mu (\not{p} - \not{q} + m)^{-1} \gamma_\nu) \quad (6.65)$$

$T_M^{\mu\nu}(q)$ は $M \rightarrow \infty$ で（本当に）2 次発散するので、

$$T_{\text{ren}}^{\mu\nu}(q) = \lim_{M \rightarrow \infty} (T_M^{\mu\nu}(q) - T_M^{\mu\nu}(0) - \sum_\tau q^\tau \partial_\tau T_M^{\mu\nu}(0) - \frac{1}{2} \sum_{\tau\sigma} q^\tau q^\sigma \partial_\tau \partial_\sigma T_M^{\mu\nu}(0)) \quad (6.66)$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} (T_M^{\mu\nu}(q) - T_M^{\mu\nu}(0) - \frac{1}{2} \sum_{\tau\sigma} q^\tau q^\sigma \partial_\tau \partial_\sigma T_M^{\mu\nu}(0)) \quad (6.67)$$

$$\text{Tr}_{\text{ren}}(S\mathcal{A})^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{q \in \mathbf{T}^{4*}} \sum_{\mu\nu} T_{\text{ren}}^{\mu\nu}(q) A_\mu(q) \bar{A}_\nu(q) \quad (6.68)$$

と定義する。

一方、4 次の trace

$$\begin{aligned} \text{Tr } (S_M \mathcal{A})^4 &= \frac{1}{(2\pi)^{16}} \sum_{q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbf{T}^{4*}} \sum_{\mu\nu\tau\sigma} \delta_{q_1+q_2+q_3+q_4, 0} \\ Q_M^{\mu\nu\tau\sigma}(q_1, q_2, q_3, q_4) A_\mu(q_1) \bar{A}_\nu(q_2) A_\tau(q_3) \bar{A}_\sigma(q_4) \end{aligned} \quad (6.69)$$

は、 $M \rightarrow \infty$ で見かけ上対数発散するが、実は収束する。それでも、gauge 不変性を成立させるために、つぎのように counterterm を導入する。

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{ren}}(S_M \mathcal{A})^4 &= \frac{1}{(2\pi)^{16}} \sum_{q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbf{T}^{4*}} \sum_{\mu\nu\tau\sigma} \delta_{q_1+q_2+q_3+q_4, 0} \\ (Q_M^{\mu\nu\tau\sigma}(q_1, q_2, q_3, q_4) - Q_M^{\mu\nu\tau\sigma}(0, 0, 0, 0)) A_\mu(q_1) \bar{A}_\nu(q_2) A_\tau(q_3) \bar{A}_\sigma(q_4) \end{aligned} \quad (6.70)$$

上記の renormalized trace を用いて, renormalized determinant を

$$\det_{\text{ren}}(I + gS\mathcal{A}) = \exp\left(-\frac{g^2}{2}\text{Tr}_{\text{ren}}(S\mathcal{A})^2 - \frac{g^4}{4}\text{Tr}_{\text{ren}}(S\mathcal{A})^4\right) \det_5(I + gS\mathcal{A}) \quad (6.71)$$

$$= \exp\left(-\frac{g^2}{2}\text{Tr}_{\text{ren}}(S\mathcal{A})^2 - \frac{g^4}{4}\text{Tr}_{\text{ren}}(S\mathcal{A})^4\right) \det_6(I + gS\mathcal{A}) \quad (6.72)$$

で定義する.

7 Gauge 場

最後に, fermion と gauge 場の相互作用の量子論を考える. 現実的な場の理論はすべてこの範疇に入るにもかかわらず, この分野はまだ未発達な状態にあり, 2 次元理論の構成も完全ではない.

この節では, fermion と $U(1)$ gauge field の相互作用 (QED) を, 2 次元 torus $\mathbf{T}^2 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$ 上で考察する. 即ち, Section 6 で定義した renormalized determinant $\det_{\text{ren}}(I + gS\mathcal{A})$ を, gauge field A の適当な measure に関して積分する.

7.1 Gauge field measure

Classical action

\mathbf{T}^d 上の $U(1)$ Gauge field $A = (A_\mu)$ の classical action は,

$$\mathbf{S}(A) = \frac{1}{4} \int_{\mathbf{T}^d} dx F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (7.1)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x) \quad (7.2)$$

である. よく知られているように, \mathbf{S} は gauge 不変である [20, P.12]. Momentum space では,

$$\mathbf{S}(A) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{p \in \mathbf{T}^{d*}} (p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) A_\mu(p) \bar{A}_\nu(p) \quad (7.3)$$

ただし, $A(p)$ は $A(x)$ の Fourier 変換で

$$A(-p) = \bar{A}(p) \quad (7.4)$$

を満たす.

Gauge fixing

Gauge field A が従う probability measure は, formal には

$$\frac{1}{N} \exp(-\mathbf{S}(A)) dA \quad (7.5)$$

と書けるものにしたい. 即ち, $\mathbf{S}(A) = \frac{1}{2}(A, \mathbf{J}A)$ と見て, \mathbf{J}^{-1} を covariance とする measure を考えたいのだが, $J_{\mu\nu} = p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu$ で定義される matrix J は正則でない²⁷. そこで action を修正し,

$$\mathbf{S}(A) = \frac{1}{4} \int_{\mathbf{T}^d} dx F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathbf{T}^d} dx (\partial_\mu A_\mu(x))^2 \quad (7.6)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{p \in \mathbf{T}^{d*}} \left(p^2 \delta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) p_\mu p_\nu \right) A_\mu(p) \bar{A}_\nu(p) \quad (7.7)$$

²⁷ $Jp = 0$. これは曲率 F , 従って action \mathbf{S} が gauge 不変だからである.

とすると²⁸ ,

$$J_{\mu\nu} = p^2 \delta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) p_\mu p_\nu \quad (7.8)$$

で定義される matrix J は $p \neq 0$ で正則となり,

$$C_{\mu\nu}(p) = J_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{p^2} \left(\delta_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), \quad p \neq 0 \quad (7.9)$$

が存在する. 条件 $\alpha > 0$ のもとで, matrix $C(p)$ は正定値の bilinear form を定義する.

Gauge field measure

そこで,

$$\int d\mu_C(A) \bar{A}_\nu(q) A_\mu(p) = \delta_{pq} \frac{1}{p^2} \left(\delta_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), \quad p, q \in \mathbf{T}^{d^*} \setminus \{0\} \quad (7.10)$$

を満たす (mean 0 の) Gauss measure $d\mu_C$ を考え, gauge field

$$A(p), \quad p \in \mathbf{T}^{d^*} \setminus \{0\} \quad (7.11)$$

は, measure $d\mu_C$ に従って分布するものとする.

また

$$A(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{p \in \mathbf{T}^{d^*} \setminus \{0\}} e^{ipx} A(p) \quad (7.12)$$

の部分和 (UV cutoff) を

$$A_N(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{p \in \mathbf{T}^{d^*} \setminus \{0\}} e^{ipx} A(p) \chi_N(p) \quad (7.13)$$

$$\chi_N(p) = \begin{cases} 1, & |p| < N \\ 0, & |p| \geq N \end{cases} \quad (7.14)$$

で定める. A_N は, e^{ipx} の有限線形結合だから smooth である.

7.2 QED₂

2 次元 torus \mathbf{T}^2 上で, QED の構成を概観する. 即ち, Section 6 で定義した renormalized determinant $\det_{\text{ren}}(I + gS\mathcal{A})$ を, Section 7.1 で定義した measure $d\mu_C$ で積分する. このとき, 次の 2 つの問題が生じる.

- Measure $d\mu_C$ の sample field A に対して, renormalized determinant が定義できるか.
[Section 6 では, A の smoothness を仮定した.]
- Renormalized determinant は, $d\mu_C$ に関して可積分か.
[effective potential の semi-boundedness が目に見えない.]

²⁸ 付加項は, gauge fixing term と呼ばれる. (7.10) で定義される measure による積分値は, 一般に α に依存するが, gauge invariant な物理量の積分値は α によらない.

Renormalized determinant の定義の修正

Section 6 により, $\det_{\text{ren}}(1 + gS\mathcal{A}_N)$ が確率 1 で定義される. しかし技術的な理由で, Section 6 の議論を修正する.

(1) fermion field $\psi, \bar{\psi}$ が属する空間 $L^2(\mathbf{T}^d)$ に, anti-periodic boundary condition を課す [Theorem 7.4 参照]²⁹.

(2) 次に,

$$Q = (-\Delta + m^2)^{-1/4} = (S^* S)^{1/4} \quad (7.15)$$

$$V = Q^2(-i\partial + mI) \quad (7.16)$$

とおいて, S を polar 分解する.

$$S = Q^2 V \quad (7.17)$$

$$V^* = V^{-1} \quad (7.18)$$

$$[Q, V] = 0 \quad (7.19)$$

さらに

$$K_N(A) = QV\mathcal{A}_NQ \quad (7.20)$$

とおくと

$$QK_N(A)Q^{-1} = S\mathcal{A}_N \quad (7.21)$$

が成り立ち, (7.21) により (少なくとも formal には),

$$\text{Tr}(S\mathcal{A}_N)^k = \text{Tr} K_N(A)^k \quad (7.22)$$

$$\det(1 + gS\mathcal{A}_N) = \det(1 + gK_N(A)) \quad (7.23)$$

となることに注意する. そこで Section 6 における $S\mathcal{A}_N$ を $K_N(A)$ について読み換えて

$$\exp\left(-\frac{g^2}{2}\text{Tr}_{\text{ren}}K_N(A)^2\right)\det_4(I + gK_N(A)) \quad (7.24)$$

を構成する [Theorem 7.1 参照].

(3) さらに, renormalized determinant を

$$\det_{\text{ren}}(1 + gK_N(A)) = \exp\left(-\frac{g^2}{2}\text{Tr}_{\text{ren}} : K_N(A)^2 :\right)\det_4(I + gK_N(A)) \quad (7.25)$$

のように定義し直す. (7.24) と (7.25) の違いは, Wick product による constant factor (N に依存する) だけであるから, Schwinger function においては, この factor は分子分母で cancel する. しかし, (7.25) の $N \rightarrow \infty$ の極限をとるときには, この factor(発散する) が効く.

Renormalized determinant の定義の拡張

μ_C の sample field A を $J(A) \in \mathbf{B}_p$ に移す mapping J で,

$$(f, J(A)g)_{L^2(\mathbf{R}^2)} \text{ is a.s. measurable, } \forall f, g \in L^2(\mathbf{R}^2) \quad (7.26)$$

$$\|J\|_{p;q} := \left(\int d\mu_C(A) \|J(A)\|_p^q \right)^{1/q} < \infty \quad (7.27)$$

を満たすもの全体を \mathbf{B}_p^q と書く. この空間は complete である.

²⁹ Gauge field A は periodic とする.

Theorem 7.1. [15]

(1) $K_N(\cdot), N > 0$ は \mathbf{B}_4^8 に属し, Cauchy 列をなす. よって

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} K_N \in \mathbf{B}_4^8 \quad (7.28)$$

が存在する.

(2) 確率 1 で, 次式が成り立つ.

$$K(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} K_N(A) \text{ in } \mathbf{B}_4 \quad (7.29)$$

$$\det_4(1 + gK(A)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \det_4(1 + gK_N(A)) \quad (7.30)$$

(3) 確率 1 で, 次式が成り立つ.

$$\det_4(1 + gK(A)) > 0 \quad (7.31)$$

◇

Proof. (1)

$$\| K_N(A) - K_M(A) \|_{4;8}^8 = \int d\mu_C(A) (\mathrm{Tr}[Q^2(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_M)]^4)^2 \quad (7.32)$$

を, Feynman graph を用いて評価すればよい³⁰.

(1) から (7.29) を得るには, Gauss measure に関する hypercontractivity [21] を用いる. (7.30) は, \mathbf{B}_4 上で $J \mapsto \det_4(1 + J)$ が連続であることによる.

(3) $gK_N(A)$ の固有値は -1 ではなく, 実数 または complex conjugate pair からなる³¹. よって,

$$\det_4(1 + gK_N(A)) > 0 \quad (7.33)$$

さらに, $gK(A)$ の固有値は -1 でないので, (7.31) が成り立つ. □

同様の論法で, 次の定理が得られる.

Theorem 7.2. [15]

(1) $\mathrm{Tr} : K_N(\cdot)^2 : , N > 0$ は $L^2(d\mu_C)$ に属し, Cauchy 列をなす.

(2) 確率 1 で, 極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathrm{Tr} : K_N(A)^2 :$ が存在する.

◇

Theorem 7.1, Theorem 7.2 により

$$\mathrm{Tr} : K(A)^2 : = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathrm{Tr} : K_N(A)^2 : \quad (7.34)$$

$$\det_{\mathrm{ren}}(1 + K(A)) = \exp\left(-\frac{g^2}{2} \mathrm{Tr} : K(A)^2 :\right) \det_4(1 + gK(A)) \quad (7.35)$$

が定義される.

Renormalized determinant の可積分性

Gauge 場の量子論を構成する際の基本的な問題点は,

³⁰ $K_N(A)$ でなく $S\mathcal{A}_N$ だと, 評価できない.

³¹ $K_N(A)$ でなく $S\mathcal{A}_N$ だと, こうは言えない.

- effective potential (6.45) の semi-boundedness に相当する性質が目に見えないこと

である。この問題は、理論の gauge 不変性と密接に結び付いており、その解決には、gauge 不変性が明らかである lattice regularization を必要とする。

Lattice からの結論は次のとおり。

- 殆ど全ての A に対して、 $K(A)$ の lattice approximation $K^{(\epsilon)}(A)$ が定義される³²。ただし格子点の間隔を ϵ とする。
- 殆ど全ての A に対して、 $\det_{\text{ren}}(1 + gK(A))$ の lattice approximation

$$\det_{\text{ren}}(1 + gK^{(\epsilon)}(A)) = \exp\left(-\frac{g^2}{2}\text{Tr} : K^{(\epsilon)}(A)^2 :\right) \det_4(1 + gK^{(\epsilon)}(A)) \quad (7.36)$$

が定義され、正の値をとる。右辺の trace は Tr_{ren} ではなく、繰り込まれていない Tr である。これは、lattice では gauge 不変性が厳密に成り立つので、gauge 不変性を回復するための counterterm が必要ないからである。

- ϵ, A によらない正定数 β, δ, θ が存在して、次の評価が成り立つ。

$$\det(1 + gK^{(\epsilon)}(A)) \leq 1 \text{ a.s.} \quad (7.37)$$

$$\mu_C \left[\left| \log \frac{\det_{\text{ren}}(1 + gK(A))}{\det_{\text{ren}}(1 + gK^{(\epsilon)}(A))} \right| > 1 \right] < \beta \exp(-\delta/\epsilon^\theta) \quad (7.38)$$

不等式 (7.37) は diamagnetic bound と呼ばれ、gauge field の effective potential の semi-boundedness に相当する³³。Diamagnetic bound は、gauge 不変性を用いて示される [Section 7.5]。 (7.38) は、lattice approximation の誤差の評価である。これらの結果を用いると、 ϕ_2^4 の (4.45) ($|\Lambda| = 1$) に相当する次の定理が得られる。

Theorem 7.3. [15] $0 < p < \infty$ に対し、

$$\det_{\text{ren}}(1 + gK(\cdot)) \in L^p(d\mu_C) \quad (7.39)$$

◇

Proof. (7.37) から

$$\det_{\text{ren}}(1 + gK^{(\epsilon)}(A)) \leq \delta'/\epsilon^{\theta'} \quad (7.40)$$

が従う (Wick product による付加項を評価した)。よって

$$\Delta_\epsilon = \log \frac{\det_{\text{ren}}(1 + gK(A))}{\det_{\text{ren}}(1 + gK^{(\epsilon)}(A))} \quad (7.41)$$

とおくと、

$$\log \det_{\text{ren}}(1 + gK(A)) \leq \log(\delta'/\epsilon^{\theta'}) + |\Delta_\epsilon| \quad (7.42)$$

が成り立つ。すると、任意の $x \geq 0$ に対し

$$\log \det_{\text{ren}}(1 + gK(A)) \geq x \implies \log(\delta'/\epsilon^{\theta'}) + |\Delta_\epsilon| > x \quad (7.43)$$

³² $K^{(\epsilon)}(A)$ は (有限次元) 行列で表される。

³³ $A = 0$ のとき等号が成立する。

そこで

$$\log(\delta'/\epsilon^{\theta'}) + 1 = x \quad (7.44)$$

なる ϵ をとると³⁴ ,

$$\log \det_{\text{ren}}(1 + gK(A)) \geq x \implies |\Delta_\epsilon| > 1 \quad (7.45)$$

従って (7.38) より

$$\mu_C[\det_{\text{ren}}(1 + gK(A)) \geq x] \leq \beta' \exp(-\delta'' x^{\theta''}), \quad x > 0 \quad (7.46)$$

また (7.31) により

$$\mu_C[\det_{\text{ren}}(1 + gK(A)) \leq 0] = 0 \quad (7.47)$$

これらから定理を得る. \square

7.3 Dirac 作用素の格子化

(7.37) を示すために, gauge 不変な lattice regularization を導入する. また lattice regularization は, Matthews-Salam formula を, より基本的なレベルから導くための framework でもある.

格子化

$\epsilon = 1/N, N = 1, 2, \dots$ を格子間隔とする discrete torus $\mathbf{T}_\epsilon^d = (\epsilon \mathbf{Z}/\mathbf{Z})^d$ を考える. これに伴って, $L^2(\mathbf{T}_\epsilon^d)$ は,

$$(u, v) = \epsilon^d \sum_{x \in \mathbf{T}_\epsilon^d} \bar{u}_x v_x \quad (7.48)$$

を内積とする有限次元 vector space $L^2(\mathbf{T}_\epsilon^d)$ となる. ただし anti-periodic boundary condition を課す. $L^2(\mathbf{T}_\epsilon^d)$ 上の linear mapping は, (有限次元の) 行列で表される³⁵ .

Free Dirac operator を

$$\not{D} = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{\mu=1}^d \gamma_\mu (T_\mu - T_\mu^*) \quad (7.49)$$

のように差分化する. T_μ は $-\mu$ 軸方向の free translation

$$(T_\mu w)(x) = w(x + \epsilon e_\mu) \quad (7.50)$$

である. \mathbf{T}_ϵ^d の bond に沿う covariant translation を定義するために, bond $(x, x + \epsilon e_\mu)$ に $U(1)$ の元を assign する:

$$U_{x,x+\epsilon e_\mu} \in U(1) \quad (7.51)$$

$$U_{x+\epsilon e_\mu,x} = U_{x,x+\epsilon e_\mu}^* \quad (7.52)$$

³⁴ $1/\epsilon$ が整数でなければならないが, ここでは忘れる.

³⁵ Linear mapping の積の表現行列は, それぞれの表現行列の (行列としての) 積と normalization が異なるので注意を要する. 以下, 表現行列は使わない.

そして, covariant translation $T_\mu(U)$ を

$$T_\mu(U)w(x) = U_{x,x+\epsilon e_\mu}w(x + \epsilon e_\mu) \quad (7.53)$$

で定め, covariant Dirac operator を

$$\not{D}(U) = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{\mu=1}^d \gamma_\mu (T_\mu(U) - T_\mu^*(U)) \quad (7.54)$$

のように差分化する.

Continuum gauge field A と $U_{x,x+\epsilon e_\mu}$ を関係づける方法は色々あるが, 最も自然なのは

$$U_{x,x+\epsilon e_\mu} = \exp(-ig \int_0^\epsilon A_\mu(x + se_\mu) ds) \quad (7.55)$$

であろう. しかしここでは, μ_C に関して確率 1 で well-defined である

$$U_{x,x+\epsilon e_\mu} = \exp(-ig\epsilon A_\mu^{(\epsilon)}(x + \frac{1}{2}\epsilon e_\mu)) \quad (7.56)$$

を採用する. ただし, $A^{(\epsilon)} = (A_\mu^{(\epsilon)})$ は, A の UV cutoff (7.13) である. しかし以下の議論は, U と A の関係の詳細に依存しない.

Spectrum

Lattice 上の momentum space を

$$\mathbf{T}_\epsilon^{d^*} = \{p \in \pi(2\mathbf{Z} + 1)^d \mid -\pi/\epsilon \leq p_j < \pi/\epsilon, j = 1, 2, \dots, d\} \quad (7.57)$$

と書く. $w \in \mathbf{C}^{2^{[d/2]}}$ に対し,

$$w_p(x) = e^{ipx} w, \quad p \in \mathbf{T}_\epsilon^{d^*} \quad (7.58)$$

とおく. これに free Dirac operator $\not{D}, \not{\partial}$ を作用させると,

$$\not{D}w_p = \sum_\mu i\gamma_\mu \frac{1}{\epsilon} \sin(p_\mu \epsilon) w_p \quad (7.59)$$

$$\not{\partial}w_p = \sum_\mu i\gamma_\mu p_\mu w_p \quad (7.60)$$

よって $\epsilon \sim 0$ のとき,

- $p = \mathbf{O}(1)$ なる w_p に対しては, \not{D} と $\not{\partial}$ は殆ど同様に働く
- $p \equiv \mathbf{O}(1) \pmod{\frac{\pi}{\epsilon}}$ かつ $p \neq \mathbf{O}(1)$ なる w_p に対しては, \not{D} と $\not{\partial}$ の働きは全く異なる.

即ち,

- $\not{\partial}$ の eigenfunction は, \not{D} の eigenvector で近似できるが,
- \not{D} の eigenvector の中には, $\not{\partial}$ の eigenfunction を近似しないものが存在する.

\not{D} の eigenvector のうち, $\not{\partial}$ の eigenfunction を近似しないものを doubler, 近似するものを normal mode という. 連続極限に移行するとき, 何等かの方法で doubler を除去しないと, 正しい極限が得られない. $\not{D}(U)$ についても, 同様の問題がある.

Wilson term

そこで, $r > 0$ に対して

$$R(U) = \frac{r}{2\epsilon} \sum_{\mu} (T_{\mu}^*(U) - I)(T_{\mu}(U) - I) \quad (7.61)$$

$$= \frac{r}{2\epsilon} \sum_{\mu} (2I - T_{\mu}(U) - T_{\mu}^*(U)) \quad (7.62)$$

$$R = \frac{r}{2\epsilon} \sum_{\mu} (2I - T_{\mu} - T_{\mu}^*) \quad (7.63)$$

とおくと, $\epsilon \sim 0$ のとき,

- doubler w に対しては, $R(U)w = \mathbf{O}(\epsilon^{-1})$
- normal mode w に対しては, $R(U)w = \mathbf{O}(\epsilon)$

となる. そこで, $iD(U) + mI$ の代わりに

$$iD(U) + mI + R(U) \quad (7.64)$$

を使う. $R(U)$ を Wilson term という. ここで,

$$\| (iD(U) + mI + R(U))w \| \geq m \| w \| \quad (7.65)$$

であるから, $(iD(U) + mI + R(U))^{-1}$ が存在し,

$$\det(iD(U) + mI + R(U)) \neq 0 \quad (7.66)$$

$$\det(iD + mI + R) \neq 0 \quad (7.67)$$

が成立することに注意する.

7.4 格子 fermion

Lattice regularization

(6.19) で使った action $(\bar{\psi}, (iD_A + mI)\psi)$ の lattice version

$$\mathbf{S}_{\epsilon}(\bar{\psi}, \psi, U) = \epsilon^d \sum_{x \in \mathbf{T}_{\epsilon}^d} \bar{\psi}(x) (iD(U) + mI + R(U)) \psi(x) \quad (7.68)$$

を用いて, fermionic integral (6.19) の lattice regularization を

$$\ll F \gg_U^{(\epsilon)} = \frac{1}{\det(iD + mI + R)} \int d\bar{\psi} d\psi \exp(-\mathbf{S}_{\epsilon}(\bar{\psi}, \psi, U)) F \quad (7.69)$$

$$\int d\bar{\psi} d\psi = \prod_{x \in \mathbf{T}_{\epsilon}^d} \int d\bar{\psi}(x) \int d\psi(x) \quad (7.70)$$

で定義する. ただし, (7.62)(7.63) における r を $0 < r \leq 1$ の範囲にとる [Theorem 7.4 参照]. Functional integral への doubler の寄与は, Wilson term のために, continuum limit $\epsilon \rightarrow 0$ で消えるだろうと期待する.

Matthews-Salam formula

(7.69) で $F = 1$ とすると,

$$\ll 1 \gg_U^{(\epsilon)} = \det(I + gS^{(\epsilon)}\Gamma^{(\epsilon)}(U)) \quad (7.71)$$

$$S^{(\epsilon)} = (iD + mI + R)^{-1} \quad (7.72)$$

$$\Gamma^{(\epsilon)}(U) = \frac{1}{g}(iD(U) - iD + R(U) - R) \quad (7.73)$$

となり, (6.27) の lattice version が厳密に成立する. 同様に (6.28)(6.29) も lattice 上で厳密化される.

さらに, (7.15)-(7.20) に対応して,

$$Q^{(\epsilon)} = (S^{(\epsilon)*}S^{(\epsilon)})^{1/4} \quad (7.74)$$

$$V^{(\epsilon)} = Q^{(\epsilon)^2}(-iD + mI + R) \quad (7.75)$$

$$K^{(\epsilon)}(U) = Q^{(\epsilon)}V^{(\epsilon)}\Gamma^{(\epsilon)}(U)Q^{(\epsilon)} \quad (7.76)$$

とおくと,

$$\text{Tr}(S^{(\epsilon)}\Gamma^{(\epsilon)}(U))^k = \text{Tr}(K^{(\epsilon)}(U))^k \quad (7.77)$$

$$\det(I + gS^{(\epsilon)}\Gamma^{(\epsilon)}(U)) = \det(I + gK^{(\epsilon)}(U)) \quad (7.78)$$

が成り立つ. 対応 (7.56) のもとで, (7.36)(7.37)(7.38) における $K^{(\epsilon)}(A)$ を, $K^{(\epsilon)}(U)$ によって定義する.

Gauge 不変性

Gauge 変換

$$\psi'(x) = e^{i\xi(x)}\psi(x) \quad (7.79)$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\xi(x)} \quad (7.80)$$

$$U'_{x,x+\epsilon e_\mu} = e^{i\xi(x)}U_{x,x+\epsilon e_\mu}e^{-i\xi(x+\epsilon e_\mu)} \quad (7.81)$$

のもとで, action は不变である:

$$\mathbf{S}_\epsilon(\psi', \bar{\psi}', U') = \mathbf{S}_\epsilon(\psi, \bar{\psi}, U) \quad (7.82)$$

また

$$d\psi' d\bar{\psi}' = d\psi d\bar{\psi} \quad (7.83)$$

も成立する.

従って, 例えば

$$Z(U) = \int d\bar{\psi} d\psi \exp(-\mathbf{S}_\epsilon(\bar{\psi}, \psi, U)) \quad (7.84)$$

は gauge 不変である:

$$Z(U') = Z(U) \quad (7.85)$$

7.5 Diamagnetic bound

Diamagnetic bound (7.37), 即ち

$$|Z(U)| \leq Z(1) \quad (7.86)$$

を証明する [18].

Reflection

\mathbf{T}_ϵ^d を, 2 平面 $x^1 = \epsilon/2, x^1 = 1/2 + \epsilon/2$ によって, 2 つの部分 $\mathbf{T}_{\epsilon+}^d, \mathbf{T}_{\epsilon-}^d$ にわけ, これらを互いに入れ換える \mathbf{T}_ϵ^d の反転を θ とする. $\mathbf{T}_{\epsilon\pm}^d$ に属する Grassmann variables が生成する Grassmann algebra を \mathcal{G}_\pm とし, reflection $\theta : \mathcal{G}_+ \rightarrow \mathcal{G}_-$ を

- (1) $\theta\psi(x) = \bar{\psi}(\theta x)i\gamma_1$
- (2) $\theta\bar{\psi}(x) = i\gamma_1\psi(\theta x)$
- (3) $\theta(fg) = (\theta g)(\theta f)$
- (4) antilinear

によって定義する. α が γ matrix の積のとき,

$$\theta(\alpha\psi(x)) = (\theta\psi(x))\alpha^* \quad (7.87)$$

$$\theta(\bar{\psi}(x)\alpha) = \alpha^*(\theta\bar{\psi}(x)) \quad (7.88)$$

が成り立つ.

Theorem 7.4. 2 平面 $x^1 = \epsilon/2, x^1 = 1/2 + \epsilon/2$ の一方を跨ぐ bond b 上で $U_b = 1$ となる gauge において³⁶,

$$\exp(-\mathbf{S}_\epsilon(\psi, \bar{\psi}, U)) = F\theta F' \exp\left(\sum_j G_j \theta G_j\right) \quad (7.89)$$

$$F, F' \in \mathcal{G}_+ \quad (7.90)$$

$$G_j : \text{odd} \quad (7.91)$$

と分解できる. \diamond

Proof. まず

$$\mathbf{S}_\epsilon = \mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_- + \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_{1/2} \quad (7.92)$$

のように分解する. ただし, $\mathbf{S}_\pm \in \mathcal{G}_\pm$ であり, $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_{1/2}$ は, それぞれ平面 $x = \epsilon/2, x = 1/2 + \epsilon/2$ を跨ぐ coupling を集めたものである. 従って

$$F = \exp(-\mathbf{S}_+) \quad (7.93)$$

$$F' = \theta^{-1} \exp(-\mathbf{S}_-) \quad (7.94)$$

と置けば, $F, F' \in \mathcal{G}_+$ となる.

また $-\mathbf{S}_0$ に含まれる項は

$$\bar{\psi}(x) \frac{i\gamma_1 + r}{2\epsilon} \psi(\theta x), \quad x \in \mathbf{T}_+^d \quad (7.95)$$

$$\bar{\psi}(\theta x) \frac{-i\gamma_1 + r}{2\epsilon} \psi(x), \quad x \in \mathbf{T}_+^d \quad (7.96)$$

³⁶ 任意の U に対し, 適当な gauge 変換を施すことにより, このようにできる.

という形をしている. $P = \frac{1+i\gamma_1}{2}$ は projection であるから, (7.88) を用いると, 前者は

$$\bar{\psi}(x) \frac{i\gamma_1 + r}{2\epsilon} \psi(\theta x) = \bar{\psi}(x) \frac{1 + ir\gamma_1}{2\epsilon} \theta \bar{\psi}(x) \quad (7.97)$$

$$= \frac{1 - r}{2\epsilon} \bar{\psi}(x) \theta \bar{\psi}(x) + \frac{r}{\epsilon} (\bar{\psi}(x) P) \theta (\bar{\psi}(x) P) \quad (7.98)$$

と変形でき, $\sum_j G_j \theta G_j$ という形に表せる³⁷. 後者も同様である.

$-S_{1/2}$ も同様に $\sum_j G_j \theta G_j$ という形に表せる³⁸.

□

Theorem 7.5. *Theorem 7.4 の gauge において*

$$|Z(U)|^2 \leq Z(U_+) Z(U_-) \quad (7.99)$$

が成り立つ. ただし, U_\pm は, *Theorem 7.4 の gauge* 条件を満たし, $T_{\epsilon^\pm}^d$ 上で U と一致し, $T_{\epsilon^\mp}^d$ 上で $U|_{T_{\epsilon^\pm}^d}$ の反転と一致する configuration である. ◇

Proof. 自明な reflection positivity

$$\int d\bar{\psi} d\psi A \theta A \geq 0 \quad A \in \mathcal{G}_+ \quad (7.100)$$

により, Schwarz の不等式

$$|\int d\bar{\psi} d\psi A \theta B| \leq (\int d\bar{\psi} d\psi A \theta A) (\int d\bar{\psi} d\psi B \theta B) \quad A, B \in \mathcal{G}_+ \quad (7.101)$$

が成立する. よって

$$|\int d\bar{\psi} d\psi F \theta F' \exp(\sum_j G_j \theta G_j)| \quad (7.102)$$

$$= |\sum_n \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{1}{n!} \int d\bar{\psi} d\psi (F \theta F') G_{j_1} \cdots G_{j_n} \theta [G_{j_1} \cdots G_{j_n}]| \quad (7.103)$$

$$\leq \sum_n \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{1}{n!} \left(\int d\bar{\psi} d\psi (F \theta F) G_{j_1} \cdots G_{j_n} \theta [G_{j_1} \cdots G_{j_n}] \right)^{1/2} \\ \left(\int d\bar{\psi} d\psi (F' \theta F') G_{j_1} \cdots G_{j_n} \theta [G_{j_1} \cdots G_{j_n}] \right)^{1/2} \quad (7.104)$$

$$\leq \left(\sum_n \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{1}{n!} \int d\bar{\psi} d\psi (F \theta F) G_{j_1} \cdots G_{j_n} \theta [G_{j_1} \cdots G_{j_n}] \right)^{1/2} \\ \left(\sum_n \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{1}{n!} \int d\bar{\psi} d\psi (F' \theta F') G_{j_1} \cdots G_{j_n} \theta [G_{j_1} \cdots G_{j_n}] \right)^{1/2} \quad (7.105)$$

$$\leq \left(\int d\bar{\psi} d\psi F \theta F \exp(\sum_j G_j \theta G_j) \right)^{1/2} \left(\int d\bar{\psi} d\psi F' \theta F' \exp(\sum_j G_j \theta G_j) \right)^{1/2} \quad (7.106)$$

□

³⁷ $0 < r \leq 1$ を仮定した.

³⁸ ここで anti-periodic boundary condition を要する.

(7.86) の証明

4 本の bond からなる単位正方形 (plaquette) P の周に沿って U_b を掛け合わせたものを U_P とし, $U_P = 1$ のとき, U は P において trivial であると言うことにする. Theorem 7.5 の U_{\pm} は, 平面 $x = \frac{\epsilon}{2}$ または平面 $x = \frac{\epsilon}{2}$ を跨ぐすべての plaquette P において trivial となる.

$Z(U)$ は compact set 上の連続関数だから,

$$\max_U |Z(U)| = |Z(U^*)| \quad (7.107)$$

なる U^* が存在する. このとき, Theorem 7.5 により

$$|Z(U^*)|^2 \leq Z(U_+^*)Z(U_-^*) \quad (7.108)$$

よって

$$|Z(U^*)| = Z(U_{\pm}^*) \quad (7.109)$$

が成り立つ.

もしも U^* がすべての plaquette において trivial だとする. このとき local に $U_b = 1$ とする gauge がとれるが, torus は nontrivial cycle をもつから, global に $U_b = 1$ とする gauge がとれるとは言えない. しかし U_{\pm}^* は, x_1 方向の nontrivial cycle に沿って $(U_{\pm}^*)_b$ の積をとると 1 となる. Theorem 7.5 の操作を各座標軸方向に行うと, global に $U_b = 1$ とする gauge がとれる. 従って

$$|Z(U^*)| = Z(1). \quad (7.110)$$

また U^* が, ある plaquette P において nontrivial だとする. このときは, P と交差する平面に関する反転に対して (7.109) を用いると, U_{\pm}^* の少なくとも一方において, trivial plaquette の数が必ず増加する. この操作を繰り返せば, すべての plaquette において trivial となる configuration が得られる.

参考文献

- [1] J.Glimm, A.Jaffe, T.Spencer, *The Particle Structure of the Weakly Coupled $P(\phi)_2$ Model and Other Applications of High Temperature Expansions*, in G. Velo, A. Wightman (eds.), *Constructive Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics 25*, Springer, 1973, 132-242.
- [2] J.Glimm, A.Jaffe, *Quantum Physics, Second Edition*, Springer, 1987.
- [3] P.Colella, E.Lanford, *Sample Field Behavior for the Free Markov Random Field*, in G. Velo, A. Wightman (eds.), *Constructive Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics 25*, Springer, 1973, 44-70.
- [4] J.Dimock, J.Glimm, *Measures on Schwartz Distribution Space and Applications to $P(\phi)_2$ Field Theories*, Advances in Math. **12**, 1974, 58-83.
- [5] K.Osterwalder, R.Schrader, *Axioms for Euclidean Green's Functions*, Commun. Math. Phys., **31**, 1973, 83-112.
- [6] K.Osterwalder, R.Schrader, *Axioms for Euclidean Green's Functions II*, Commun. Math. Phys., **42**, 1975, 281-305.

- [7] D. Brydges, J. Fröhlich, A. D. Sokal, *A New proof of the Existence and Nontriviality of the Continuum ϕ_2^4 and ϕ_3^4 Quantum Field Theories*, Commun. Math. Phys., **91**, 1983, 141-186.
- [8] R. Fernández, J. Fröhlich, A. D. Sokal, *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory*, Springer, 1992.
- [9] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.
- [10] B. Simon, *Trace Ideals and their Applications*, London Mathematical Society Lecture Note Series 35, Cambridge University Press, 1979.
- [11] Y.M.Zinoviev, *Equivalence of Euclidean and Wightman Field Theories*, Commun. Math. Phys., **174**, 1995, 1-27.
- [12] D. Brydges, *A Short Course on Cluster Expansions*, in *Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories, Les Houches session XLIII, 1984*, Elsvier Science Publishers, 1986.
- [13] D. Brydges, J. Dimock, T.R. Hurd, *Estimates on Renormalization Group Transformations*, November 12, 1996, *Preprint*.
- [14] K. Gawedzki, A. Kupiainen, *Massless Lattice ϕ_4^4 theory: Rigorous Control of a Renormalizable Asymptotically Free Model*, Commun. Math. Phys., **99**, 1985, 197-252.
- [15] D. H. Weingarten, J. L. Challifour, *Continuum Limit of QED₂ on a Lattice*, Annals of Physics, **123**, 1979, 69-101.
- [16] D. Weingarten, *Continuum Limit of QED₂ on a Lattice, II*, Annals of Physics, **126**, 1980, 154-175.
- [17] E. Seiler, *Constructive Quantum Field Theory: Fermion*, in *Gauge Theories: Fundamental Interactions and Rigorous Results, Proceedings of the 1981 Poiana Brasov Summer School*, Birkhäuser.
- [18] E. Seiler, *Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Lecture Notes in Physics, 159*, Springer, 1982.
- [19] V. Rivasseau, *From Perturbative to Constructive Renormalization*, Princeton University Press, 1991.
- [20] C. Itzykson, J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1985.
- [21] 江沢洋, 新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 日本評論社, 1988.
- [22] 江沢洋, 漸近解析, 岩波書店, 1995.
- [23] 服部哲弥, 2041年くりこみ群の研究, 統計数理研究所リポート, **48**, 1993, 139-147.