

# 構成的場の理論と繰り込み群

渡辺 浩<sup>1</sup>

Constructive field theory and renormalization group

Hiroshi WATANABE<sup>1</sup>

謝辞

この解説は、2001年7月の名古屋大学多元数理科学研究科における集中講義の講義ノートを整理したものである。講義の機会を与えて下さった服部哲弥先生、原隆先生に感謝します。

要約

数学的に場の量子論を構成する道筋の概略を簡単に解説し、厳密な解析方法として繰り込み群が果たす役割を述べ、強結合領域における繰り込み群解析に触れる。

## 目次

1	はじめに	2
2	Euclidean field theory	3
2.1	数学的な論点	4
2.2	構成的場の理論	6
3	$\phi^4$ model の繰り込み	6
3.1	$\phi^4$ model	7
3.2	Regularization	8
3.3	紫外発散	9
3.4	Counterterms	10
4	繰り込み群解析	12
4.1	Block spin 変換	12
4.2	繰り込み群変換	13
4.3	繰り込み群の dynamics	17
5	強結合領域における繰り込み群	19
5.1	Hierarchical model	20
5.2	Characteristic function	23
5.3	Lee–Yang property	26
5.4	Triviality	27

---

<sup>1</sup>日本医科大学・数学教室, Department of Mathematics, Nippon Medical School

# 1 はじめに

場の量子論<sup>1</sup>には、二つの源泉がある：

- 統計力学系の連続極限
- 素粒子の場の量子化された理論

即ち、場の量子論とは、

- 統計力学と素粒子論に共通の数学的構造を記述した理論

である。

統計力学の文脈では

統計力学<sup>2</sup>は、たとえば、

格子状に配置された無限個の確率変数 “spin” が、近隣同士で相互作用すると仮定して、系全体の巨視的な振舞いを調べる理論

である。従って、その連続極限（格子間隔を 0 に近付けた極限）を考える場の量子論では、

近接作用によって定義された理論が、macroscopic な現象を引き起こす過程

を解析することになる。

ここで、

- 格子間隔を 0 に近付ける際に、spin 同士の相互作用の強さを “程良く” 調節する必要がある。

このような調節を 繰り込み (renormalization) という。

素粒子論の文脈では

図式的に言うと、場の量子論は場の古典論を “量子化” したものである。場の古典論では、物理的に実現する場の配位は、変分原理が定める微分方程式（運動方程式）の解であると考えるが、量子論では、この “古典的な配位” ばかりでなく、汎関数積分 (functional integral) によって表される場の揺らぎを考慮し、それが引き起こす現象を問題にする。

しかし、この汎関数積分には、いわゆる「発散の困難」があり、

- 「繰り込み」と呼ばれる特別な処理

が必要になる。この部分が場の量子論の最も曖昧な箇所であるが、近年、統計力学における繰り込みとの関係を足掛かりとして、数学的に健全な formulation ができるようになって来た。

また、場の量子論における汎関数積分には、上述の「繰り込み」の他に、

- complex phase をもつ振動積分であるという困難

がある。しかし今日では、直接に振動積分を扱う事を避け、Euclidean field theory からのアプローチをとるのが普通である。Euclidean field theory とは、formal には、時間変数  $t$  を  $ix (x \in \mathbb{R})$  と置き、Minkowski 計量を Euclid 計量で置き換えたものである。Euclid 化すると量子論的揺らぎが確率論的揺らぎに変わるので、汎関数積分を関数空間上の確率測度として構成する道が開ける。このようにして、素粒子論を源泉とする場の量子論は、統計力学系の連続極限と共通の framework で論じ得ることになる。

<sup>1</sup>正確には、後述の Euclidean quantum field theory

<sup>2</sup>ここで考えているのは、平衡系の統計力学である。

## 繰り込み群解析

場の量子論は、繰り込みを施された汎関数積分によって記述される。このような積分を数学的に厳密に構成し、その性質を調べる際に、繰り込み群解析が重要な役割を果たす。

繰り込み群解析とは、

物理系の縮小変換を解析する方法

であり、より丁寧に言えば、

物理系を縮小しながら、系の微細な構造の情報を捨てるという手続きを、系の parameter の変換を通して解析する方法

である。繰り込み群解析は、物理的思想としては直観的で明解な描像をもつが、その数学的実現は、技術的にかなり複雑である。

特に、自然法則としても重要な 4 次元時空における場の量子論の model は、いまだに満足の行く形で構成されてはいない。4 次元における場の量子論の構成問題は、強結合領域での繰り込み群解析を必要とし、数理解物理の重要な未解決問題のひとつとなっている。

この解説では

まず Euclidean field theory に現れる汎関数積分に関して、一般的な見地から数学的な論点を整理し [Section 2],  $\phi^4$  モデルの繰り込みの概略を述べ [Section 3], 繰り込み群解析の基本的な考え方を紹介する [Section 4]. また、階層模型 (hierarchical model) に対して、強結合領域での繰り込み群解析の問題に触れる [Section 5].

なお、すでにこの紀要から出版された筆者による解説 [16] との重複を避けるため、議論の連続性を阻害しない範囲で、集中講義の内容の一部を省略した。

## 2 Euclidean field theory

Euclidean field theory は、 $\mathbb{R}^d$  の各点  $x$  に付随した random variable  $\phi(x)$  に関するある種の確率論であり、その統計的期待値を与える表式

$$\langle F(\phi) \rangle = \frac{1}{Z} \int F(\phi) e^{-V(\phi)} d\mu(\phi) \quad (2.1)$$

$$Z = \int e^{-V(\phi)} d\mu(\phi) \quad (2.2)$$

によって formal に“定義”される。ここで、 $d\mu(\phi)$  は Gaussian probability measure,  $V(\phi)$  は  $\phi(\cdot)$  の functional で potential と呼ばれる。Gauss 測度と potential の物理的な意味は、次のように、統計力学の文脈と素粒子論の文脈で異なる。

	統計力学の文脈	素粒子論の文脈
Gauss 測度 $d\mu(\phi)$	spin 間の相互作用	粒子の自由な伝播
potential $V(\phi)$	単独 spin の統計法則	粒子の生成消滅

特に  $V = 0$  のとき<sup>3</sup>, (2.1) は Gauss 積分となり、素粒子論の文脈では、相互作用のない理論 (自由場) を定義する。

<sup>3</sup>あるいは  $\phi$  の bilinear form のとき

## 2.1 数学的な論点

形式的な積分 (2.1)(2.2) に数学的意味を与える過程で一般的に問題となる点を列挙しよう.

### Regularization

Gaussian measure  $\mu$  の sample field  $\phi$  の regularity が悪いために,  $\phi$  を  $V$  に代入できないという問題が起きる. そこで Gaussian measure の regularization

$$\mu \implies \mu_\epsilon \quad (2.3)$$

を導入する. 即ち,

- $\epsilon > 0$  に対して, measure  $\mu_\epsilon$  の意味で確率 1 で, sample field  $\phi$  の regularity が改善され,  $V(\phi)$  が well-defined になり,
- $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で,  $\mu_\epsilon$  は  $\mu$  に収束する

ようにする. このような regularization は, sample field の高周波成分を cutoff することによって実現される.

またさらに,  $\mathbb{R}^d$  を bounded region  $\Lambda$  に制限する regularization も必要である. 即ち,  $\Lambda$  内に cutoff した potential を  $V_\Lambda$  とする.

結局, 場の量子論に内在する無限自由度を 2 つの方向

- 紫外 (UV) 方向:  $x \in \mathbb{R}^d$  にいくらでも近い  $y \in \mathbb{R}^d$  が存在する
- 赤外 (IR) 方向:  $x \in \mathbb{R}^d$  からいくらでも遠い  $y \in \mathbb{R}^d$  が存在する

に分けたとき, 各方向の cutoff を要するのである.

### Renormalization

上記の regularization を施しても, 単に  $\epsilon$  を 0 に近づけるだけでは, 多くの場合極限が存在しない. そこでさらに,  $\epsilon$  に依存するある種の項 (counterterm)  $U_{\Lambda,\epsilon}(\phi)$  を付加して,

$$V_{\Lambda,\epsilon}(\phi) = V_\Lambda(\phi) + U_{\Lambda,\epsilon}(\phi) \quad (2.4)$$

とおき,  $V_\Lambda(\phi)$  を  $V_{\Lambda,\epsilon}(\phi)$  で置き換えることが必要になる. このような処方を 繰り込み (renormalization) という.

言うまでもないことだが, 収束させることだけを目的として, counterterm  $U_{\Lambda,\epsilon}$  を  $-V_\Lambda$  などと置くのは無意味である. そこで, 意味のある counterterm の取り方を,  $\phi$  関数の構成にたとえて説明してみよう.

$\Omega = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  上に 2 次の pole をもつ有理型関数を作ろうとして,

$$P(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^2} \quad (2.5)$$

という式を書いたとする. (2.5) の右辺は well-defined ではないので, まず有限和 (cutoff)

$$P_\epsilon(z) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |\omega| < 1/\epsilon}} \frac{1}{(z - \omega)^2} \quad (2.6)$$

を考える。しかし、この単純な極限  $\epsilon \rightarrow 0$  は存在しないので、

$$P_\epsilon^{\text{ren}}(z) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ 0 < |\omega| < 1/\epsilon}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) + \frac{1}{z^2} \quad (2.7)$$

のように定義し直す。すると、 $P_\epsilon^{\text{ren}}$  の well-defined な極限として、

$$\wp(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon^{\text{ren}}(z) \quad (2.8)$$

が定まる。ここで付加した項

$$P_\epsilon(z) - P_\epsilon^{\text{ren}}(z) = - \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ 0 < |\omega| < 1/\epsilon}} \frac{1}{\omega^2} \quad (2.9)$$

は、 $\epsilon \rightarrow 0$  で発散する定数であるが、このような項を付加することは、(2.5) を well-defined にしようという目的に反しない行為であると考え。 (2.9) が counterterm に当る。

統計力学の連続極限を取る際にも、ある種の counterterm を導入し、本来の目的を本質的に変えない範囲で、数学的に必要な修正を施す必要がある。また、素粒子論における積分の発散を処理するための「繰り込み」は、統計力学における counterterm の観点から理解することができる。

## 極限の構成

一般に、regularization と renormalization を施した積分

$$\langle F(\phi) \rangle_{\Lambda, \epsilon} = \frac{1}{Z_{\Lambda, \epsilon}} \int F(\phi) e^{-V_{\Lambda, \epsilon}(\phi)} d\mu_\epsilon(\phi) \quad (2.10)$$

$$Z_{\Lambda, \epsilon} = \int e^{-V_{\Lambda, \epsilon}(\phi)} d\mu_\epsilon(\phi) \quad (2.11)$$

の極限

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^d} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle F(\phi) \rangle_{\Lambda, \epsilon} \quad (2.12)$$

について、次の3つの可能性がある。

- (1) Limit は存在しない、またはつまらない limit をもつ (全ての期待値が 0 となる等)
- (2) Gaussian measure に収束する (triviality)
- (3) Non-Gaussian measure に収束する (nontriviality)

Counterterm を適切に選ばないと、(1) のような結果になる。また、counterterm を適切に選んでも、(2) のように極限が Gauss になってしまうことがある。構成論は、もちろん (3) の結果を望んでいる。

## Minkowski 化

点  $x \in \mathbb{R}^d$  の第 1 座標  $x_1$  を複素半平面  $\text{Re } x_1 > 0$  に“解析接続”して虚軸への境界値をとると、Euclid 計量をもつ Euclidean field theory は Minkowski 計量をもつ相対論的場の量子論となり、このとき  $x_1$  は時間座標となる。このようにして、素粒子論の文脈で有用な場の量子論のモデルを得ることができる。この翻訳過程は公理的に処理され、Euclidean field theory が Osterwalder-Schrader axioms と呼ばれる特定の条件を満たしているときに可能になる [16, P.10].

## 2.2 構成的場の理論

Well-defined な積分 (2.10)(2.11) を出発点として,

- $\epsilon \rightarrow 0$  (および  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$ ) の極限が存在するか
- その極限は non-trivial (non-Gaussian) か
- Osterwalder-Schrader axioms を満たすか

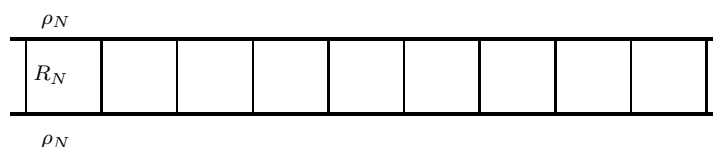
を調べることが、構成的場の理論の目標である。しかしながら、このプログラムが完成しているのは時空 2 次元と 3 次元の model に限られており、

- 4 次元時空で nontrivial field theory は存在するか

は、現在に至るまで未解決である。しかし、 $\phi^4$  model のような比較的簡単な model に対しては、4 次元の連続極限は Gauss 測度であろう (triviality) と予想されている。Triviality を示すことは、本来の構成的場の理論の目的ではないのだが、場の量子論の数学的構造を探るためには避けて通れない問題である。

問題 2.1.  $\varphi$  関数以外に、解析学における *counterterm* の例を挙げよ。

問題 2.2. 次のような同軸ケーブルの *model* を考える。



長さ  $L$  のケーブルを  $N$  等分し、長さ  $L/N$  の各導線部分を  $\rho_N(\Omega)$  の電気抵抗で置換え、 $N+1$  本の梯子段 (絶縁体) を  $R_N(\Omega)$  の電気抵抗で置き換える。右端の端子を解放したとき、およびショートしたときの左端の端子間の抵抗値が、 $N \rightarrow \infty$  で 0 でない有限確定値をもつためには、 $\rho_N, R_N$  の  $N$  依存性をどのように設定すべきか。

問題 2.3.  $a > 0$  で定義される積分

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \quad (2.13)$$

において、 $a = ib, b \in \mathbb{R}$ , とする “代入” について論ぜよ。

## 3 $\phi^4$ model の繰り込み

$\phi^4$  model に即して、regularization と renormalization の具体的な方法を概観する。

### 3.1 $\phi^4$ model

$d$  次元  $\phi^4$  model とは, formal には, 次のように表現される確率測度である<sup>4</sup>.

$$\langle F(\phi) \rangle = \frac{1}{Z} \int F(\phi) e^{-V(\phi)} d\mu_C(\phi) \quad (3.1)$$

$$Z = \int e^{-V(\phi)} d\mu_C(\phi) \quad (3.2)$$

$$V(\phi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)^4 dx \quad (3.3)$$

ここに  $\lambda > 0$  は定数,  $\phi(\cdot)$  は実数値を取る Gaussian random field で, その確率測度  $\mu_C$  は

$$\text{mean} : \int \phi(x) d\mu_C(\phi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (3.4)$$

$$\text{covariance} : \int \phi(x)\phi(y) d\mu_C(\phi) = (-\Delta + m^2)^{-1}(x, y) = C(x, y), \quad (3.5)$$

$$x, y \in \mathbb{R}^d, m > 0$$

を満たすものである. この Gaussian covariance  $C$  は,

$$C(x, y) \sim \begin{cases} -\text{const.} \log |x - y|, & d = 2, \\ \text{const.} |x - y|^{-d+2}, & d > 2, \end{cases} \quad |x - y| \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

$$C(x, y) \sim \text{const.} |x - y|^{-(d-1)/2} e^{-m|x-y|}, \quad |x - y| \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

という漸近形を持ち, formal には

$$C(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} dp \quad (3.8)$$

と書ける [2].  $m$  を mass と言う.

#### 場の古典論との対応

場の量子論と場の古典論の形式的な対応を見るときには,

$$\langle F(\phi) \rangle = \frac{1}{Z'} \int d\phi F(\phi) e^{-\mathcal{A}(\phi)} \quad (3.9)$$

$$\mathcal{A}(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, (-\Delta + m^2)\phi) + \int_{\mathbb{R}^d} \lambda \phi(x)^4 dx \quad (3.10)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{1}{2} |\nabla \phi(x)|^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 + \lambda \phi(x)^4 \right) dx \quad (3.11)$$

と書くこともある.  $\mathcal{A}$  は作用 (action) と呼ばれ,  $\mathcal{A}$  の変分を 0 とする配位  $\phi$  は, 場の古典論<sup>5</sup> の方程式

$$(-\Delta + m^2)\phi(x) + 4\lambda\phi(x)^3 = 0 \quad (3.12)$$

に従う.

<sup>4</sup>ここでは potential  $V$  を  $\phi$  の 4 次式に限るが, 2 次元では, 適当な性質をもつ多項式に議論を一般化できる ( $P(\phi)_2$  理論 [8]). しかし, potential は “繰り込み可能” でなければならないので, 例えば 4 次元では高々 4 次式でなければならないなどの制限がある.

<sup>5</sup>正確には, Euclidean classical field theory

## Feynman-Kac formula

$d = 1$  のとき, 座標  $x$  を “時間”  $s$  で置き換えると, (3.9) は,

$$\frac{1}{Z} \int d\phi F(\phi) \exp\left(-\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}(s)^2 + \frac{m^2}{2}\phi(s)^2 + \lambda\phi(s)^4\right) ds\right) \quad (3.13)$$

のように, Feynman-Kac formula と類似の形になる. Feynman-Kac formula とは, 作用素

$$H = -\Delta + U \quad (3.14)$$

による “時間” 発展を, Wiener process  $b(t)$  に関する期待値  $E$  を用いて

$$e^{-tH} f(x) = E\left(f(x + b(t)) \exp\left(-\int_0^t U(x + b(s)) ds\right)\right) \quad (3.15)$$

$$\stackrel{\text{formal}}{=} \frac{1}{Z} \int_{b(0)=x} f(b(t)) \exp\left(-\int_0^t \left(\frac{1}{2}\dot{b}(s)^2 + U(b(s))\right) ds\right) db \quad (3.16)$$

のように書き表す公式である.<sup>6</sup>

## Schwinger function

(3.1)–(3.3) に戻る.  $F(\phi)$  が field の積  $\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$  のとき, 期待値

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle \quad (3.17)$$

を Schwinger function という. Model が内包する粒子の物理的質量や束縛状態 (の有無) などの物理的内容は, 原理的には, Schwinger function から引き出すことができる [2, 1].

問題は, 積分(3.17) を厳密に構成し得るかどうかである. そのために, まず積分を regularize して well-defined な足場を作る.

## 3.2 Regularization

Gaussian measure  $\mu_C$  の sample field  $\phi$  は “関数” ではなく, 確率 1 で超関数となる. 従って, 同一点での field の積  $\phi(x)^4$  は定義されず,  $\phi$  を potential  $V$  に代入できない.

Sample field の紫外性質 (regularity) を改善するために, 様々な regularization が考案されているが, 次に述べる方法は, その代表的な例である.

### UV cutoff

Gaussian covariance  $C$  を momentum space で cutoff し

$$C_\epsilon(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \chi_\epsilon(p) dp \quad (3.18)$$

$$\chi_\epsilon(p) = e^{-\epsilon^2|p|^2}, \quad \epsilon > 0 \quad (3.19)$$

で置き換えると, その紫外性質は次のように改善される.

$$|C_\epsilon(x, y)| < \begin{cases} \text{const.} \log(1/\epsilon), & d = 2, \\ \text{const.} \epsilon^{-d+2}, & d > 2, \end{cases} \quad (3.20)$$

ここで,  $\chi_\epsilon$  の具体形は重要ではない.  $|p|$  が大きい領域 (UV region) を smooth に cutoff する関数なら何でもよい.

<sup>6</sup>(3.15) には counterterm が含まれていない. 即ち,  $d = 1$  次元の場の理論は, 繰り込みを必要としない. この理論において, 時間変数を純虚数化したのが量子力学であり,  $H$  による時間発展は Schrödinger 方程式となる.



**Theorem 3.1.** [6, P.28] Gaussian measure  $\mu_{C_\epsilon}$  の sample field は, 確率 1 で  $C^\infty \cap S'$  に属する.

### IR cutoff

上記の UV cutoff の結果として, sample field の積  $\phi(x)^4$  が定義されるが, その積分である  $V(\phi)$  は発散する可能性がある. そこで  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  を有界領域として, potential  $V(\phi)$  を

$$V_\Lambda(\phi) = \lambda \int_\Lambda \phi(x)^4 dx \quad (3.21)$$

のように IR cutoff すると, (3.1) は次のような well-defined な積分になる.

$$\langle F(\phi) \rangle_{\Lambda, \epsilon} = \frac{1}{Z_{\Lambda, \epsilon}} \int F(\phi) e^{-V_\Lambda(\phi)} d\mu_{C_\epsilon}(\phi) \quad (3.22)$$

$$Z_{\Lambda, \epsilon} = \int e^{-V_\Lambda(\phi)} d\mu_{C_\epsilon}(\phi) \quad (3.23)$$

さて, このまま  $\epsilon \rightarrow 0$  として UV cutoff をはずしても, 積分値は一般に極限を持たない.  $\epsilon \rightarrow 0$  とすることによって生じる発散を 紫外発散 という. 紫外発散を除くには, 適切な counterterm が必要である.

### 3.3 紫外発散

$d$  次元  $\phi^4$  model の紫外発散について整理する. 次元が高くなると, 一般に紫外発散は強くなり, それに伴って, counterterm の構造は複雑になる.

Field  $\phi$  の積を Gauss 測度  $d\mu_C$  に関して積分すると, その値は, たとえば,

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} dz C_\epsilon(x_1, y) C_\epsilon(y, z)^3 C_\epsilon(z, x_2) \quad (3.24)$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} C_\epsilon(x_1, y) C_\epsilon(x_2, y) C_\epsilon(y, z)^2 C_\epsilon(z, x_3) C_\epsilon(z, x_4) \quad (3.25)$$

のような covariance  $C$  の convolution 型の積分を用いて表現することができる. (3.24), (3.25) の左辺のように, covariance を line で表したグラフを Feynman graph といい, 右辺の積分値をその amplitude という. Gauss 積分は, Feynman graph に関する和で表される.

$n$  本の外線と  $j > 0$  個の内点をもつ connected Feynman graph  $G$  に対し

$$\omega(G) = (4 - d)j + \frac{d - 2}{2}n - d \quad (3.26)$$

とおく. たとえば, (3.24) の場合  $n = 2, j = 2, \omega = 6 - 2d$  であり, (3.25) の場合  $n = 4, j = 2, \omega = 4 - d$  である.

**Theorem 3.2.** [16]  $\omega(G) \leq 0$  ならば,  $G$  の amplitude は  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で発散する.

定理の逆は成立しない. しかし,  $G$  の subgraph の情報を用いると,  $G$  の amplitude の収束条件が得られる. この収束条件を定式化するために,  $G$  の subgraph ( $G$  の線の集合) で connected なもの  $F$  に対して,  $\omega(F)$  を  $\omega(G)$  と同様に定義する. ただし,  $F$  を定義する線の端点を  $F$  の内点,  $F$  の内点から出る  $G$  の線のうち  $F$  に属さないものを  $F$  の外線とする.

**Theorem 3.3.** [6, P.65] Graph  $G$  の subgraph  $F$  で, *connected* かつ内点をもつものが, すべて

$$\omega(F) > 0 \quad (3.27)$$

を満たすならば,  $G$  の *amplitude* は,  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で有限である.

条件 (3.27) を破る危険な subgraph は, 次元ごとに変わる.

### 3.4 Counterterms

#### 2次元の場合

危険な subgraph の条件は

$$j \leq 1 \quad (3.28)$$

である. よって発散する subgraph は

$$\text{---} \circ \text{---} \quad (3.29)$$

だけであるが, これは Wick product により renormalize できる [16, P.27]. 即ち, renormalized potential を次式で定義する.

$$V_{\Lambda, \epsilon}(\phi) = \lambda \int_{\Lambda} dx : \phi(x)^4 :_{C_{\epsilon}} \quad (3.30)$$

言い換えると, 発散を除去するための counterterm は

$$\mu_{\epsilon}^{(0)} \int_{\Lambda} dx \phi(x)^2, \quad \mu_{\epsilon}^{(0)} = -6\lambda C_{\epsilon}(0) \quad (3.31)$$

である.

そして, well-defined な積分

$$\langle F(\phi) \rangle_{\Lambda, \epsilon} = \frac{1}{Z_{\Lambda, \epsilon}} \langle e^{-V_{\Lambda}} F(\phi) \rangle_{C_{\epsilon}} \quad (3.32)$$

$$Z_{\Lambda, \epsilon} = \langle e^{-V_{\Lambda}} \rangle_{C_{\epsilon}} \quad (3.33)$$

を出発点として, UV limit  $\epsilon \rightarrow 0$ , IR limit  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$  を調べればよい.

#### 3次元の場合

危険な subgraph の条件は

$$j + \frac{1}{2}n \leq 3 \quad (3.34)$$

である. よって発散する subgraph は

$$(j, n) = (1, 2) : \text{---} \circ \text{---} \quad (3.35)$$

$$(j, n) = (2, 2) : \text{---} \circ \text{---} \quad (3.36)$$

だけである。前者の発散を除去するための counterterm は, Wick product から来る(3.31) であり, また後者の発散を除去するための counterterm として,

$$\mu_\epsilon^{(1)} \int_\Lambda dx \phi(x)^2, \quad \mu_\epsilon^{(1)} = 48\lambda^2 \int_\Lambda dy C_\epsilon(x, y)^3 \quad (3.37)$$

を入れる。結局 3 次元  $\phi^4$  model の counterterm は

$$\mu_\epsilon \int_\Lambda dx \phi(x)^2, \quad \mu_\epsilon = \mu_\epsilon^{(0)} + \mu_\epsilon^{(1)} \quad (3.38)$$

potential は

$$V_{\Lambda, \epsilon}(\phi) = \lambda \int_\Lambda dx \phi(x)^4 + \mu_\epsilon \int_\Lambda dx \phi(x)^2 \quad (3.39)$$

$$= \lambda \int_\Lambda dx : \phi(x)^4 : + \mu_\epsilon^{(1)} \int_\Lambda dx : \phi(x)^2 : + \text{const.} \quad (3.40)$$

の形になる。

#### 4次元の場合

$n \leq 4$  なる subgraph は全て危険であり, 実際  $n = 2, 4$  のとき発散する。従って, 無限個の発散 subgraph に対応する counterterm が必要になる。それらは

$$\Delta\lambda_\epsilon \int_\Lambda dx \phi(x)^4 + \mu_\epsilon \int_\Lambda dx \phi(x)^2 + \zeta_\epsilon \int_\Lambda dx \partial\phi(x)^2 \quad (3.41)$$

のように 2 次と 4 次の項にまとめられるが, 係数を explicit に書くことはできない。これらの係数は, Section 4 の繰り込み群解析によって定められる。結局, 4 次元  $\phi^4$  model の potential は,

$$V_{\Lambda, \epsilon}(\phi) = \lambda_\epsilon \int_\Lambda dx \phi(x)^4 + \mu_\epsilon \int_\Lambda dx \phi(x)^2 + \zeta_\epsilon \int_\Lambda dx \partial\phi(x)^2 \quad (3.42)$$

となる。

#### $d > 4$ 次元の場合

$d > 4$  では, 各  $n$  に対して十分大きな  $j$  をとると,  $\omega(G) \leq 0$  となる。このように紫外発散が多様化する理論では, 有限種類の counterterm を用いて紫外発散を除去することが不可能になる。

#### 摂動的繰りこみ可能性 [7]


4 次元以下では, counterterm によって紫外発散が消えるという主張は, 決して自明ではない。まず

- $\lambda$  に関する形式的展開の各べきごとに紫外発散が消えること (摂動的繰りこみ可能性)。

が大切である。これは場の量子論を数学的に構成するための重要なステップである。しかし, Schwinger function (3.17) を得るためには,

- すべての摂動項を足し上げなければならない。

この部分の解析が構成的場の理論の核心である。3 次元以下では, Section 4 の繰り込み群解析の本格的な運用によって示された。しかし 4 次元では未解決であり, 4 次元の場の理論の満たすモデルは, まだ知られていない。

問題 3.1. (3.24) で定義される Feynman graph  の Fourier kernel を

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx_1 \int_{\mathbb{R}^d} dx_2 \exp(ip_1 x_1 + ip_2 x_2) A(x_1, x_2) = \delta(p_1 + p_2) \hat{A}(p_1) \quad (3.43)$$

のように書く.  $\hat{A}(p_1)$  の UV limit ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) は  $d = 2$  で収束し,  $d \geq 3$  で発散することを示せ.

問題 3.2. (3.37) で定義された係数  $\mu_\epsilon^{(1)}$  に対し,

$$48\lambda^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \mu_\epsilon^{(1)} \int dy C_\epsilon(x_1, y) C_\epsilon(y, x_2) \quad (3.44)$$

の Fourier kernel の UV limit は,  $d = 3$  で収束し,  $d \geq 4$  で発散することを示せ.

問題 3.3. (3.40) で定義された potential に対し,

$$S_{\Lambda, \epsilon}(x_1, x_2) = \frac{\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \exp(-V_{\Lambda, \epsilon}) \rangle_{C_\epsilon}}{\langle \exp(-V_{\Lambda, \epsilon}) \rangle_{C_\epsilon}}, \quad x_1 \neq x_2 \quad (3.45)$$

を考える.  $\lambda$  に関して  $\lambda^2$  まで形式的に展開し,  $d = 3$  のとき,  $S_{\Lambda, \epsilon}$  の UV limit は収束することを示せ.

## 4 繰り込み群解析

統計力学系や場の量子論の model において, 積分を scale 分解することにより, 逐次的に解析する方法を 繰り込み群解析 と言う. ここでは, 繰り込み群の概念を直観的に提示し,  $\phi^4$  model への応用に触れる.

### 4.1 Block spin 変換

#### 簡単な例

初めに, 簡単な例によって, 繰り込み群の基本的な考え方を準備する.

級数

$$S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} \quad (4.1)$$

の  $N \rightarrow \infty$  での発散を評価する.

$$\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{(2k-1)(2k)}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

に注意すると, 定数  $0 < \alpha < \beta$  が存在して,

$$S_{2N} = S_N + r_N \quad (4.3)$$

$$\alpha < r_N < \beta \quad (4.4)$$

が成立することが分かる. 従って,

$$1 + \alpha n \leq S_{2^n} \leq 1 + \beta n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.5)$$

上記の計算を, 次のように scale 分解と関係づけて見る. まず,  $\mathbb{N}$  の 縮小変換  $\mathcal{R}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を

$$\mathcal{R}(2k-1) = \mathcal{R}(2k) = k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

で定義し、これに伴って、 $\mathbb{N}$  上の実数値関数  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  への  $\mathcal{R}$  の作用を

$$(\mathcal{R}a)(k) = \sum_{j:\mathcal{R}(j)=k} a(j) \quad (4.7)$$

で定める。すると、

$$\sum_{k=1}^{2^n} a(k) = (\mathcal{R}^n a)(1) \quad (4.8)$$

が成り立つ。これは、

$2^n$  個の数を加える計算を、隣同士の数を加えながら系を縮小するプロセスに分解したことを意味する。

そして、 $a(k) = 1/k$  は  $\mathcal{R}$  の近似的な固定点であり、

$$\mathcal{R}a = a + b \quad (4.9)$$

誤差  $b$  は scale 変換の回数によらない評価

$$\alpha < (\mathcal{R}^n b)(1) < \beta \quad (4.10)$$

をもつ。従って、 $(\mathcal{R}^n a)(1)$  は  $\mathcal{O}(n)$  となる。

統計力学や場の量子論における繰り込み群は、 $\mathbb{Z}^d$  や  $\mathbb{R}^d$  の縮小変換に基づいて、random field またはその確率分布の変換として定義される。

### Block spin 変換

次に、格子上の spin 系を考える。

たとえば Ising spin の場合 (図 4.1) ,

- (1) up spin と down spin の与えられた配置 (a) に対し、
- (2)  $3 \times 3$  の block ごとに up spins の割合を gray level で表す (b).
- (3) これを  $1/3$  倍に縮小し (c) ,
- (4) 多数決論理で up/down を決めると、もともとの配置 (a) の縮小像が得られる (d).

これらのプロセス<sup>7</sup> を繰り返し、spin 系の microscopic な情報を捨てることによって、macroscopic な振るまいに関する情報が抽出される。各 gray level を **block spin** と言い、gray level の従う統計法則を逐次的に定める規則を **block spin 変換** と言う (Section 5 参照)。上記のような格子系の繰り込み群の直観的な描像をもとにして、以下において、momentum space の scale 分解に基づく繰り込み群を説明する。

## 4.2 繰り込み群変換

### Scale 分解

一般に、 $D$  を covariance とする Gauss 測度  $d\mu_D(\phi)$  に関して、適当な関数  $H(\phi)$  を積分することを考える。

$$\int d\mu_D(\phi) H(\phi) \quad (4.11)$$

<sup>7</sup>実際には、(c) から (d) に行かずに (b) に進む。

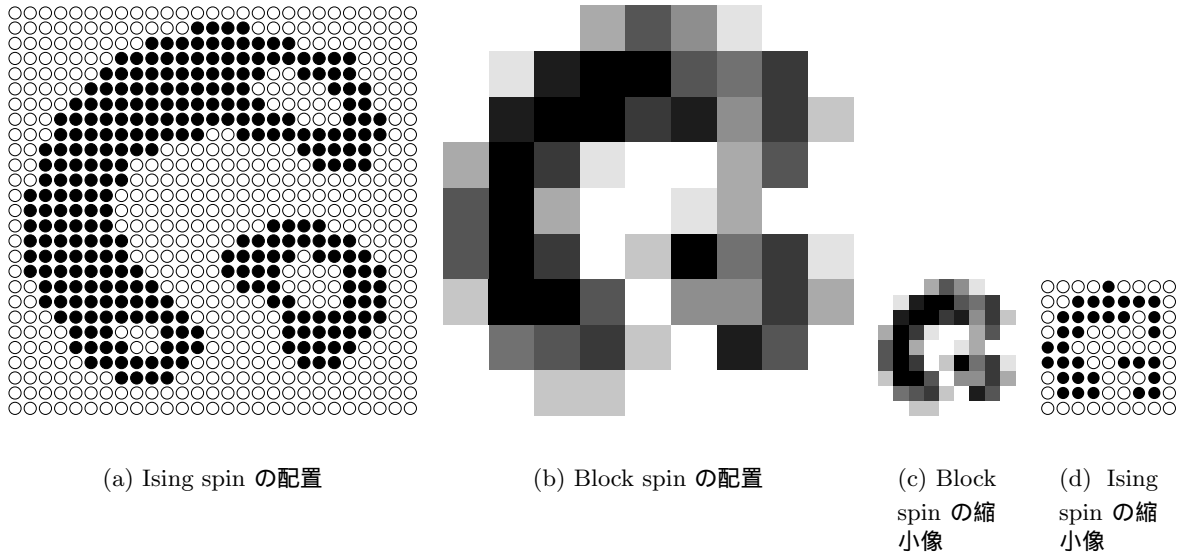


図 4.1: Ising spin の block spin 変換

$D$  を分解して

$$D = D_0 + D_1 \quad (4.12)$$

とし,  $D_0, D_1$  を covariance とする独立な Gaussian variable を  $\phi_0, \phi_1$  として

$$H'(\phi_0) = \int d\mu_{D_1}(\phi_1) H(\phi_0 + \phi_1) \quad (4.13)$$

とおけば

$$\int d\mu_D(\phi) H(\phi) = \int d\mu_{D_0}(\phi_0) H'(\phi_0) \quad (4.14)$$

となる. ここで

- $\phi_1$  が UV 側 (短波長) のゆらぎを表し,
- $\phi_0$  が IR 側 (長波長) のゆらぎを表す

とすれば, 変換

$$H \mapsto H' \quad (4.15)$$

は,

- UV 側のゆらぎを 繰り込んで,
- IR 側のゆらぎに関する marginal distribution を得る手続きである

と言える.

### Iteration

Gaussian covariance  $D$  を

$$D = \sum_{k=0}^N D_k \quad (4.16)$$

のように分解する.  $D_k$  を covariance とする独立な Gaussian variable を  $\phi_k(x)$  と書き,

$$\phi_{k,0} = \sum_{j=0}^k \phi_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.17)$$

$$D_{k,0} = \sum_{j=0}^k D_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.18)$$

とおくと,  $\phi_{k,0}$  は  $D_{k,0}$  を covariance とする Gaussian variable となる.  
すると Gauss 積分 (4.11) は

$$H_N = H \quad (4.19)$$

$$H_{k-1}(\phi_{k-1,0}) = \int d\mu_{D_k}(\phi_k) H_k(\phi_k + \phi_{k-1,0}), \quad k = N, N-1, \dots, 1 \quad (4.20)$$

$$\int d\mu_D(\phi) H(\phi) = \int d\mu_{D_0}(\phi_0) H_0(\phi_0) \quad (4.21)$$

のように分解される.

### 繰り込み群の定義

変換 (4.15) において, ゆらぎ  $\phi_0$  を含む系  $H'$  を幾何的に縮小して,  $\phi_0$  と  $\phi_1$  の“波長”がほぼ等しくなるようにすれば,

- 系を縮小することによって生じた短波長のゆらぎをくりこんで
- もとの系と同程度に細かい構造を持つ系を作った

ことになる.

そこで, 便宜のために, あらかじめ各  $k$  に対し,  $\phi_k(x)$  の拡大像を

$$\tilde{\phi}_k(x) = L^{-k(d-2)/2} \phi_k(L^{-k}x) \quad (4.22)$$

とおく. このとき,  $\tilde{\phi}_k(x)$  の covariance は

$$\tilde{D}_k(x, y) = L^{-k(d-2)} D_k(L^{-k}x, L^{-k}y) \quad (4.23)$$

となる.

さらに,

$$\tilde{\phi}_{k,0}(x) = L^{-k(d-2)/2} \phi_{k,0}(L^{-k}x) \quad (4.24)$$

$$\tilde{D}_{k,0}(x, y) = L^{-k(d-2)} D_{k,0}(L^{-k}x, L^{-k}y) \quad (4.25)$$

とおくと,

$$\tilde{\phi}_{k,0}(x) = \tilde{\phi}_k(x) + L^{-(d-2)/2} \tilde{\phi}_{k-1,0}(L^{-1}x) \quad (4.26)$$

$$\tilde{D}_{k,0}(x, y) = \tilde{D}_k(x, y) + L^{-(d-2)} \tilde{D}_{k-1,0}(L^{-1}x, L^{-1}y) \quad (4.27)$$

が成り立つ. ここで,  $\tilde{H}_k$  を

$$H_k(\phi_{k,0}) = \tilde{H}_k(\tilde{\phi}_{k,0}) \quad (4.28)$$

で定義すると,

$$\tilde{H}_{k-1}(\tilde{\phi}_{k-1,0}) = \int d\mu_{\tilde{D}_k}(\tilde{\phi}_k) \tilde{H}_k(\tilde{\phi}_k(\cdot) + L^{-(d-2)/2} \tilde{\phi}_{k-1,0}(L^{-1}\cdot)) \quad (4.29)$$

$$\tilde{H}_N(\tilde{\phi}_{N,0}) = H(\phi_{N,0}) \quad (4.30)$$

$$\int d\mu_D(\phi) H(\phi) = \int d\mu_{\tilde{D}_0}(\tilde{\phi}_0) \tilde{H}_k(\tilde{\phi}_0) \quad (4.31)$$

となる. 即ち

- $\tilde{H}_{k-1}$  は  $\tilde{H}_k$  の縮小像であり,
- 両者は同程度に細かい構造を持っている.

変換

$$\tilde{H}_k \mapsto \tilde{H}_{k-1} \quad (4.32)$$

を繰り込み群変換 という.

UV limit

上記の一般的な枠組を, UV cutoff された covariance

$$D(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \chi(L^{-N}p) dp \quad (4.33)$$

$$\chi(p) = e^{-p^2} \quad (4.34)$$

に適用する.  $N$  は任意の (大きい) 整数とする.

この covariance  $D$  の分解 (4.16) を,

$$D_k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} (\chi(L^{-k}p) - \chi(L^{-(k-1)}p)) dp, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.35)$$

$$D_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \chi(p) dp \quad (4.36)$$

によって定義すると, 各  $\phi_k$  は, momentum scale  $L^k$  程度 (波長  $L^{-k}$  程度) のゆらぎを表す Gaussian variable であると見ることができる.

さらに, (4.23) で定義された covarinace は,

$$\tilde{D}_k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + (m/L^k)^2} (\chi(p) - \chi(Lp)) dp \quad (4.37)$$

となり,  $\tilde{D}_k$  は殆ど  $k$  に依存せず, ゆらぎ  $\tilde{\phi}_k$  の特徴的な長さは  $k$  によらず  $\mathcal{O}(1)$  である.

さて, UV limit とは, UV cutoff をはずすことであるから, (4.33) において,  $N \rightarrow \infty$  の極限をとることを意味する. 即ち, 繰り込み群を用いて UV limit を調べるためには, 繰り込み群変換の無限に長い軌道

$$\dots \rightarrow H_n \rightarrow H_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow H_0 \quad (4.38)$$

を追跡すればよいことになる.



### 4.3 繰り込み群の dynamics

(3.40) または (3.42) の potential を  $V(\phi)$  として,

$$V_N(\phi) = V(\phi) \quad (4.39)$$

$$H_N(\phi) = \exp(-V_N(\phi)) \quad (4.40)$$

とおく. そして  $H_N(\phi)$  の拡大像

$$\tilde{H}_N(\tilde{\phi}_{N,0}) = \exp(-\tilde{V}_N(\tilde{\phi}_{N,0})) \quad (4.41)$$

に繰り込み群変換を施す.

$$\tilde{H}_{N-1}(\tilde{\phi}_{N-1,0}) = \int d\mu_{\tilde{D}_N}(\tilde{\phi}_N) \tilde{H}_N(\tilde{\phi}_N(\cdot) + L^{-(d-2)/2} \tilde{\phi}_{N-1,0}(L^{-1}\cdot)) \quad (4.42)$$

右辺の主要項は, 単に scale された項

$$\int d\mu_{\tilde{D}_N}(\tilde{\phi}_N) \tilde{H}_N(L^{-(d-2)/2} \tilde{\phi}_{N-1,0}(L^{-1}\cdot)) = \tilde{H}_N(L^{-(d-2)/2} \tilde{\phi}_{N-1,0}(L^{-1}\cdot)) \quad (4.43)$$

であり, この他に, Gauss 積分によって contract された項が続く. そして, 繰り込み群変換の次の step では, 今生じた全ての項が源となって, scale された項と contract された項を生み出す.

#### Relevant part

まず, scale された項について調べる.

例えば  $\phi^m$  項

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \tilde{\phi}_{k,0}(x)^m \quad (4.44)$$

から生ずる scaled term は,

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \left( L^{-(d-2)/2} \tilde{\phi}_{k-1,0}(L^{-1}x) \right)^m = L^{d-m(d-2)/2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \tilde{\phi}_{k-1,0}(x)^m \quad (4.45)$$

であり,

- $d - m(d-2)/2 > 0$  ならば成長する (relevant)
- $d - m(d-2)/2 = 0$  ならば不変 (marginal)
- $d - m(d-2)/2 < 0$  ならば縮小する (irrelevant)

よって

- $d > 2$  では, 有限個の項を除いて irrelevant
- $d = 2$  では, 全ての項が relevant

となる.

そこで  $d > 2$  では,

- 有限個の relevant/marginal terms を explicit に追跡し
- それ以外の項は縮小性によって評価する

という方針をとる.

### Gaussian contraction

(4.42) の右辺において, Gauss 積分によって contract された項を考える.

直観的に様子を掴むために, (4.41) の右辺を Taylor 展開して,

$$\tilde{H}_N(\tilde{\phi}_{N,0}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tilde{V}_N(\tilde{\phi}_{N,0}))^k}{k!} \quad (4.46)$$

の右辺の contraction を考える. たとえば,  $k = 2$  の部分から,

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \int dx \int dy \tilde{\phi}_{N-1,0}(x) \tilde{\phi}_{N-1,0}(y) \tilde{D}_N(x, y)^3 \quad (4.47)$$

のような nonlocal interaction を含む項が現われる.

### 繰り込み

繰り込み群変換の産物  $H_n$  を Taylor 展開すると, (4.44) のような項を始めとして, 多種多様な項が現れる. そして,  $H_n$  に繰り込み群変換を施すと, これらの項が絡み合っ,  $H_{n-1}$  の各項を定める. このとき, もしも繰り込み群変換を繰り返すにつれ その係数が発散する なら, counterterm を導入して発散を打ち消さなければならない.

この点を模式的に説明しよう. (4.44) のような  $H_n$  の一つの項に着目し, その係数  $a_n$  の  $n$  依存性を追跡することを考える. 繰り込み群変換を 1 回施すと, この項の係数  $a_{n-1}$  はどのようになるだろうか. 単純に scale された結果として現れる係数を  $L^\alpha a_n$  とし, それ以外のすべての寄与を  $b_n$  と書くと, 次のような漸化式を得る.

$$a_{n-1} = L^\alpha a_n + b_n, \quad n = N, N-1, \dots, 1 \quad (4.48)$$

ここで,  $a_n$  が relevant な係数であるための条件は  $\alpha > 0$ , marginal な係数であるための条件は  $\alpha = 0$ , irrelevant な係数であるための条件は  $\alpha < 0$  である. そして,  $a_0$  は

$$a_0 = L^{N\alpha} a_N + \sum_{n=1}^N L^{(n-1)\alpha} b_n \quad (4.49)$$

で与えられる.

さて, UV limit を取るということは,  $N \rightarrow \infty$  の極限

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} L^{N\alpha} a_N + \sum_{n=1}^{\infty} L^{(n-1)\alpha} b_n \quad (4.50)$$

を調べることを意味する. ここで, 初期値  $a_N$  を  $N$  に応じてどのように取った方がいいかが問題となる.<sup>8</sup>

通常  $b_n$  は  $n \rightarrow \infty$  で (指数的に) 0 に収束するので,  $a_n$  が irrelevant ( $\alpha < 0$ ) ならば, (4.50) の右辺の第 2 項は収束する. 従って, 極限 (4.50) が存在するような初期値  $a_N$  の条件を考えると, 右辺第 2 項のことは気にしなくてよい.

一方, relevant または marginal な状況 ( $\alpha \geq 0$ ) では, (4.50) の右辺の第 2 項は発散するかも知れない. そのときは, 発散を打ち消すように  $a_N$  を調節する必要がある. これが「繰り込み」で

<sup>8</sup>各  $a_n, b_n$  は  $N$  に依存しているので,  $a_{n,N}, b_{n,N}, n = N, N-1, \dots, 0$  と書き, 極限  $\lim_N a_{n,N}$  を考えると書いた方が正確である.

あり、そのために初期値  $a_N$  に組み込まれる項が counterterm である。しかし、counterterm による発散の打ち消しを直接 (4.50) の右辺に見ることはできないし、(4.49) の右辺において、巨大な数同士の打ち消しを見ることも難しい。そこで、繰り込み群変換の各ステップにおいて、(4.48) の右辺の第 1 項と第 2 項の打ち消しを inductive に評価するという方法を取る。

実際の  $\phi^4$  model に対する繰り込み群変換においては、 $a_n$  と書かれた係数が無限個あり、 $b_n$  はそれらの係数の非線形な関数になる。

### Large field bound

上記のような繰り込み群変換の描像は、Taylor 展開に基づく形式的な摂動論であり、そのままの形では厳密に正しいとは言えない。

例えば、 $\phi^4$  potential をもつ 1 次元積分

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda x^4 - \frac{1}{2}x^2) dx \quad (4.51)$$

を考えよう。右辺を形式的に展開して積分すると、次のようになる。

$$I(\lambda) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^{4n} \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n \quad (4.52)$$

ここに

$$a_n = (-1)^n \sqrt{2\pi} (4n-1)!! / n! \quad (4.53)$$

であるから、(4.52) の収束半径は 0 である。このように、 $\lambda$  に関する形式的な展開は収束せず、実は漸近展開となる。その評価は、potential の正值性、即ち  $\lambda > 0$  に基づいて導出される。

$\phi^4$  model は、上記の 1 次元積分の無限次元化であり、 $\lambda$  に関する形式的な展開は収束せず、一般に漸近展開となる。このとき、 $\phi^4$  potential の正值性に基づいて、

- $\tilde{\phi}$  が大きくなる確率は極めて小さい

という評価をする。このような確率評価を large field bound という。

結局、繰り込み群解析は

- 成長因子 (relevant/marginal part) の追跡
- 縮小因子 (irrelevant part) の評価
- Large field bound

の 3 点からなる。形式的な摂動論から構成的場の理論を区別するのは、(主に) 最後の large field bound である。

以上述べたように、繰り込み群の描像それ自体は自然でありまた普遍的なものだが、その厳密な解析は様々な技術的な困難を伴い、決して自明ではない。しかし coupling constant  $\lambda$  が小さいときには、様々な formulation が知られている。このような弱結合領域における繰り込み群については、[4, 16] を参照されたい。

問題 4.1. (4.5) に習って、(4.10) を示せ。

## 5 強結合領域における繰り込み群

4 次元  $\phi^4$  理論の triviality を論ずるには、弱結合領域ばかりでなく、強結合領域 ( $\lambda$  が大きい領域) における trajectory を追跡しなければならない。そこで、 $\phi^4$  model の強結合極限 ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) である Ising model の hierarchical 近似 [9, 10, 11, 12, 13] に即して、強結合領域の繰り込み群解析の問題を取り上げる。[詳細は [15] 参照]

## 5.1 Hierarchical model

よく知られているように, 1次元の最隣接相互作用 Ising model は相転移しない. しかし spin が long range interaction を持つときは相転移し得る. Dyson [9] は, 今日 hierarchical model と呼ばれる特殊な spin 系を導入して, この事実を示した. Hierarchical model は, 繰り込み群変換が単純になるように Gaussian measure の部分を改変した model であり, 言わば, 繰り込み群解析の練習台である.

### Hierarchical model の定義

$2^N$  個の spin 変数

$$\phi_\theta = \phi_{\theta_N, \dots, \theta_1}, \quad \theta = (\theta_N, \dots, \theta_1) \in \{0, 1\}^N \quad (5.1)$$

を考え, Hamiltonian

$$H_N(\phi) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{c}{4}\right)^n \sum_{\theta_N, \dots, \theta_{n+1}} \left( \sum_{\theta_n, \dots, \theta_1} \phi_{\theta_N, \dots, \theta_1} \right)^2 \quad (5.2)$$

および single spin distribution  $h(\phi_\theta)$  が定める統計力学系を

$$\langle F \rangle_{N,h} = \frac{1}{Z_{N,h}} \int d\phi F(\phi) \exp(-\beta H_N(\phi)) \prod_{\theta} h(\phi_\theta) \quad (5.3)$$

$$Z_{N,h} = \int d\phi \exp(-\beta H_N(\phi)) \prod_{\theta} h(\phi_\theta) \quad (5.4)$$

で定義する. ただし,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = 1 \quad (5.5)$$

とする. これを 階層模型 (hierarchical model) という.

特に, 大きさ  $s$  の Ising spin measure

$$h_{\text{Ising}}(x) = \frac{1}{2}(\delta(x-s) + \delta(x+s)) \quad (5.6)$$

は,  $\phi^4$  形 single spin measure

$$h_{\mu\lambda}(x) = \text{const.} \exp(-\mu x^2 - \lambda x^4) \quad (5.7)$$

の強結合極限

$$\mu = -2\lambda s^2, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (5.8)$$

と考えられるので, 繰り込み群の強結合問題の例として hierarchical Ising model を考察する.

Hierarchical Ising model は, 条件

$$0 < c < 2 \quad (5.9)$$

のもとで infinite volume limit が存在し, 条件

$$1 < c < 2 \quad (5.10)$$

のもとで, 相転移がある [9]. また spin 変数  $\phi$  を定数倍することにより,  $\beta > 0$  を任意の正数にすることができるので, 以下

$$\beta = \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \quad (5.11)$$

とおくことにする.

### Block spin 繰り込み群

Block spin  $\phi'$  を

$$\phi'_\tau = \frac{\sqrt{c}}{2} \sum_{\theta_1=0,1} \phi_{\tau\theta_1}, \quad \tau = (\tau_{N-1}, \dots, \tau_1) \quad (5.12)$$

で定義すると,

$$\sum_{\theta_n, \dots, \theta_1} \phi_{\theta_n, \dots, \theta_1} = \sum_{\theta_n, \dots, \theta_2} \frac{\sqrt{c}}{2} \phi'_{\theta_n, \dots, \theta_2} \quad (5.13)$$

よって

$$H_N(\phi) = H_{N-1}(\phi') - \frac{1}{2} \sum_{\tau} \phi'_\tau{}^2 \quad (5.14)$$

となり,  $F(\phi)$  が block spin の関数

$$F(\phi) = F'(\phi') \quad (5.15)$$

のとき,

$$\langle F \rangle_{N,h} = \langle F' \rangle_{N-1, \mathcal{R}h} \quad (5.16)$$

$$\mathcal{R}h(x) = \text{const.} \exp\left(\frac{\beta}{2}x^2\right) \int_{\mathbb{R}} dy h\left(\frac{x}{\sqrt{c}} + y\right) h\left(\frac{x}{\sqrt{c}} - y\right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.17)$$

が成立する. 即ち, 繰り込み群変換は  $h$  の非線形変換  $\mathcal{R}$  として実現される. そこで, 様々の初期値  $h_0$  に対して,  $\mathcal{R}$  の trajectory

$$h_n = \mathcal{R}^n h_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.18)$$

を調べることが必要になる.

### Gaussian trajectory

Single spin measure を Gauss

$$h_0(x) = \text{const.} \exp\left(-\frac{\alpha_0}{2}x^2\right) \quad (5.19)$$

にとると, 繰り込み群の trajectory は

$$\mathcal{R}^n h_0(x) = \text{const.} \exp\left(-\frac{\alpha_n}{2}x^2\right) \quad (5.20)$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{2}{c}\alpha_n - \beta \quad (5.21)$$

となる. 従って, (5.11) のもとでは

$$\alpha_n = \left(\frac{2}{c}\right)^n \left(\alpha_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad (5.22)$$

となる. 従って, 系は

$$\alpha_N > 0 \quad (5.23)$$

のときに well-defined となり,

$$\alpha_0 > \frac{1}{2} \quad (5.24)$$

のとき infinite volume limit を持つ. 特に  $\alpha_0 = \frac{1}{2}$  のとき,

$$h_G(x) = \text{const.} \exp\left(-\frac{1}{4}x^2\right) \quad (5.25)$$

は  $\mathcal{R}$  の fixed point となり, massless Gaussian measure を定める.

### Dimensionality

$m = 1, 2, \dots, N$  に対し,

$$M_m(\phi) = \sum_{\theta_m, \dots, \theta_1} \phi_{\theta_m, \dots, \theta_1} \quad (5.26)$$

$$\chi_{m,N,h} = \frac{1}{2^m} \langle M_m(\phi) \rangle_{N,h} \quad (5.27)$$

とおく.  $\chi_{N,N,h}$  は spin 系の susceptibility

$$\chi_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} \langle \phi(0)\phi(x) \rangle \quad (5.28)$$

に相当する.

Block spin を用いると,

$$\chi_{m,N,h} = \frac{2}{c} \chi_{m-1, N-1, \mathcal{R}h} \quad (5.29)$$

を得る. 特に  $h = h_G$  とし, infinite volume limit  $N \rightarrow \infty$  をとると,

$$\chi_{m,\infty,h_G} = \text{const.} \left(\frac{2}{c}\right)^m \quad (5.30)$$

となる.

これを  $\mathbb{Z}^d (d > 2)$  上の massless Gaussian model の correlation decay

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \sim \text{const.} |x-y|^{-d+2}, \quad |x-y| \rightarrow \infty \quad (5.31)$$

から得られる評価

$$\sum_{|x| < r} \langle \phi(0)\phi(x) \rangle \sim \text{const.} r^2 \quad (5.32)$$

と等置すると

$$\left(\frac{2}{c}\right)^m = r^2 \quad (5.33)$$

となり, さらに spin 数の関係  $2^m \sim r^d$  を用いると

$$c = 2^{1-2/d} \quad (5.34)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(2^{2/d} - 1) \quad (5.35)$$

を得る.  $c$  が (5.34) を満たすとき,  $d$  次元 hierarchical model と言うことにする.

### Fixed points

(5.25) は自明な (Gaussian) fixed point であるが, 自明でない (non-Gaussian) fixed point の存在に関しては, 次のことが知られている.[10, 11, 12]

- $d \geq 4$  では,  $\varphi_G$  の “近く” に non-Gaussian fixed point は存在しない.
- $d < 4$  で  $d$  が十分 4 に近いとき,  $\varphi_G$  の “近く” に non-Gaussian fixed point が存在する.

さらに,

- $d \geq 4$  では,  $\varphi_G$  の “近く” から出発する trajectory を用いて構成される連続極限は, trivial である

ことも分かっている.

しかし, Ising や強結合  $\phi^4$  model の triviality を論ずるには, Ising や強結合  $\phi^4$  model (これらは Gauss 近傍にはない) から出発する trajectory を調べなければならない. しかし, [10, 12] で導入された Gauss 近傍の定義が複雑であるために, この領域に trajectory が届いているかどうかを確かめることは難しい.

この難点を解決するのが, characteristic function である.

## 5.2 Characteristic function

Single spin distribution  $h_n$  の characteristic function

$$\varphi_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} h_n(x) \quad (5.36)$$

に対する繰り込み群変換は

$$\varphi_{n+1} = \mathcal{R}\varphi_n \quad (5.37)$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{T}\mathcal{S} \quad (5.38)$$

$$\mathcal{S}g(\xi) = g\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi\right)^2 \quad (5.39)$$

$$\mathcal{T}g(\xi) = \exp\left(-\frac{\beta}{2}\Delta\right)g(\xi) \quad (5.40)$$

となる.

特に Ising spin

$$h_0(x) = \frac{1}{2}(\delta(x-s) + \delta(x+s)) \quad (5.41)$$

の場合, 初期値は

$$\varphi_0(\xi) = \cos(s\xi) \quad (5.42)$$

である.

### $d = \infty$ の場合

$c = 2, \beta = 0$  とすると, recursion は

$$\varphi_{n+1}(\xi) = \varphi_n\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad (5.43)$$

となる. 特に Ising spin の場合

$$\varphi_n(\xi) = \cos^{2^n}\left(\frac{s\xi}{2^{n/2}}\right) \quad (5.44)$$

$$\rightarrow \exp\left(-\frac{s^2}{2}\xi^2\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (5.45)$$

従って, この trajectory を用いて構成された連続極限は Gauss (trivial) である. (これは実質的に中心極限定理である.)

(5.45) について若干の注意を付け加えると,

- $|\xi| < 2^{n/2} \frac{\pi}{2s}$  を満たす  $\xi$  に対して

$$\varphi_n(\xi) = \exp(-V_n(\xi)) \quad (5.46)$$

$$V_n(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{2j}^{(n)} \xi^{2j} \quad (5.47)$$

と書き,  $V_n$  を dual potential と呼ぶことにする. このとき  $V_n$  の係数は, recursion

$$\mu_{2j}^{(n)} = 2^{1-j} \mu_{2j}^{(n-1)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.48)$$

に従う. 即ち,  $\xi^2$  の項は marginal であり, 4 次以上の項は irrelevant である.

- “Dual potential”  $V_n(\xi)$  の定義域は

$$|\xi| < 2^{n/2} \frac{\pi}{2s} \quad (5.49)$$

であるが, その continuum limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(\xi) = \frac{s^2}{2} \xi^2 \quad (5.50)$$

は, 各点収束極限として  $\mathbb{R}$  全体で定義される. 即ち, continuum limit に必要な情報は, 初期的 characteristic function の  $\xi = 0$  の無限小近傍だけである. これは, characteristic function を用いた繰り込み群解析に, large field problem が現れないことを意味する.

- Ising spin (5.41) の場合, “dual potential” の初期値

$$V_0(\xi) = \frac{s^2}{2} \xi^2 + \frac{s^4}{12} \xi^4 + \frac{s^6}{45} \xi^6 + \frac{17s^8}{2560} \xi^8 + \dots \quad (5.51)$$

は正係数をもつ. そして, (5.48) から, この性質は ( $d = \infty$  の) 繰り込み群変換によって保存されることが分かる.

### $d < \infty$ の場合

$d < \infty (\beta > 0)$  においては, (5.40) の operator  $\mathcal{T}$  が働くので, 上記の dual potential の描像は定量的にも定性的にも変化する.

例えば, relevant/irrelevant terms の分類は次のようになる.



- $d > 4$  では,  $\xi^2$  は relevant,  $\xi^4$  以上は irrelevant となる.
- $d = 4$  では,  $\xi^2$  は relevant,  $\xi^4$  は marginal,  $\xi^6$  以上は irrelevant となる.
- $d < 4$  では,  $\xi^2, \xi^4$  は relevant, そして  $d$  の低下に伴って, relevant part が増えて行く.

この描像は, 前述の non-Gaussian fixed point の存在問題に深く関係する. そこで, 繰り込み群の trajectory を数値的に調べ, この描像が正しいことを直観的に確かめておく. [“摂動的” な計算によって示すことももちろんできる.] 図 5.2 において,

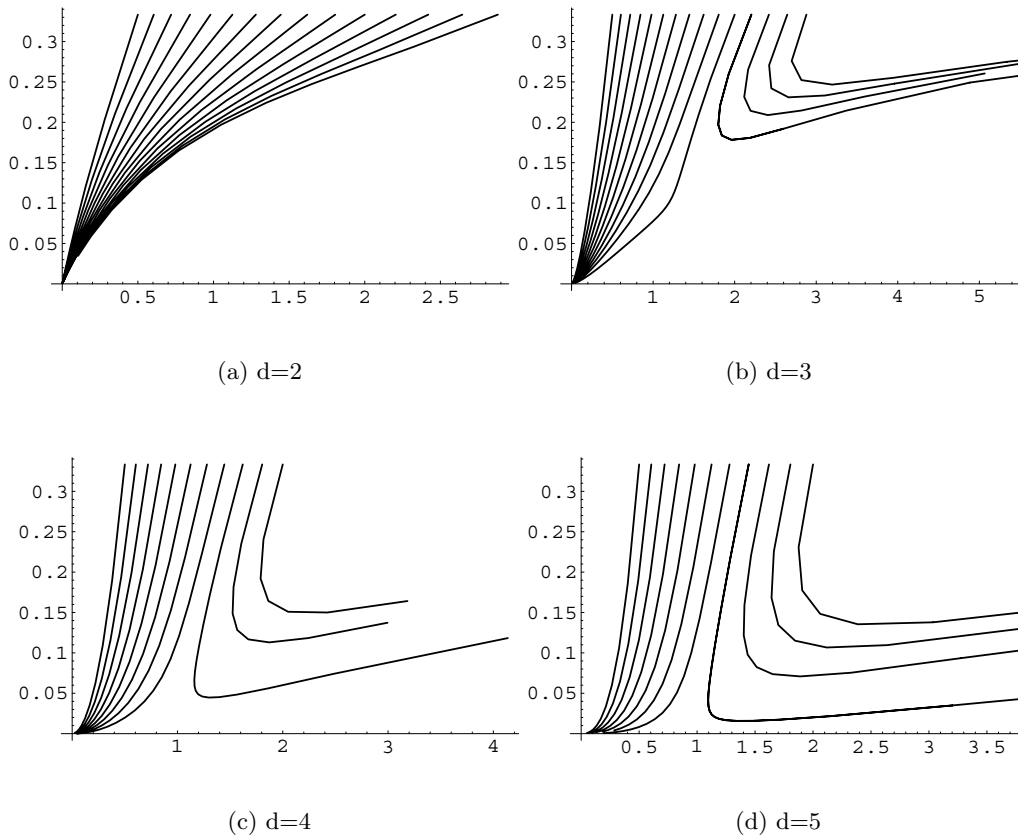


図 5.1: Ising から出発する trajectory を数値的に追跡して, potential の係数を  $(\mu_2, \mu_4/\mu_2^2)$  平面に plot したものの. Gaussian fixed point (5.25) は, 点  $(1, 0)$  に対応する.

- 各 trajectory の  $s$  値は, 左から順に  $s = 1.0, 1.1, 1.2, \dots$  であり, 初期値は,

$$\mu_2^{(0)} = s^2/2, \quad \mu_4^{(0)}/\mu_2^{(0)2} = 1/3 \quad (5.52)$$

- $d > 2$  では相転移があり,
  - $\mu_2^{(0)}$  が小さいとき, trajectory は  $(0, 0)$  に近づく (高温相).
  - $\mu_2^{(0)}$  が大きいとき, trajectory は無限遠方に飛ぶ (低温相)
  - $\mu_2^{(0)}$  がある特定の値 (critical point) をとるとき, trajectory は  $(0, 0)$  以外のある点に収束する (critical trajectory).

### 5.3 Lee–Yang property

#### Newman’s bound

Ising を初期値とする dual potential 列は次の著しい性質を持つ.

$$\mu_{2j}^{(n)} \geq 0, \quad j \geq 1 \quad (5.53)$$

$$\mu_{2j}^{(n)} \leq \frac{1}{j}(2\mu_4^{(n)})^{j/2}, \quad j \geq 3 \quad (5.54)$$

どちらも,

- Characteristic function の零点は純虚数である [強磁性 spin 系の Lee–Yang property]

をもとにして証明される [14].

#### Newman’s bound の応用

(5.54) から

- $V_n$  の Taylor 展開の収束域が評価され,  $n \rightarrow \infty$  で  $\mu_4^{(n)} \rightarrow 0$  となるなら, 定義域は実数全体に拡大する.
- $\mu_4^{(n)}$  が 0 に収束することを示せば, それ以上の全ての係数が 0 に収束すること, 即ち triviality が得られる.
- “Gauss 近傍” の概念を有限個の  $\mu_{2j}$  を用いて定式化することができる. 従って, critical trajectory が Gauss 近傍に届いたかどうかを, computer を用いて検証する道が開ける

ことが分かる.

また, (5.53) は, operator  $\mathcal{T}$  を調べるときに本質的に重要な役割を果たす.

(5.40) を

$$g_t(\xi) = \exp(-t\Delta)g(\xi) \quad (5.55)$$

$$\mathcal{T}g = g_{\beta/2} \quad (5.56)$$

と書く.  $g_t$  は微分方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(\xi) = -\Delta g_t(\xi) \quad (5.57)$$

$$g_0(\xi) = g(\xi) \quad (5.58)$$

の解である. そこで

$$g_t(\xi) = \exp(-V_t(\xi)) \quad (5.59)$$

とおくと,  $V_t$  は

$$\frac{d}{dt}V_t = (\nabla V_t)^2 - \Delta V_t \quad (5.60)$$

を満たす. ここで

- $V_t$  の Taylor 係数がすべて非負である

ことを使うと, (5.60) から Taylor 係数の upper bound が得られる. [この upper bound を使うと, (5.60) から lower bound が得られる.]

## 5.4 Triviality

Characteristic function による繰り込み群解析の概略を, [15] に基づいて紹介する.  $d \geq 4$  hierarchical Ising model の triviality を厳密に示すための基本的な idea は次のとおりである.

- (1) Characteristic function を用いて “Gauss 近傍” の概念を定式化し, 繰り込み群の振舞いを分析する.
- (2) Ising から出発する critical trajectory が, 有限回の繰り込み群変換によって “Gauss 近傍” に入ることを, computer を用いて数値的に確かめる.

Model が critical であるためには,

$$1 \leq \mu_{2,N} \leq 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\mu_{4,N} \quad (5.61)$$

が必要であることが分かるので,  $N = 0, 1, 2, \dots$  に対して,

$$\underline{s}_N = \inf\{s > 0 \mid \mu_{2,N} \geq 1\}, \quad (5.62)$$

$$\bar{s}_N = \inf\{s > 0 \mid \mu_{2,N} \geq \min\{1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\mu_{4,N}, 2 + \sqrt{2}\}\}. \quad (5.63)$$

とおく.

次の命題は, 弱結合領域における Bleher–Sinai argument [10] の変形である.

**Proposition 5.1.**  $N_0 \leq N_1$  なる自然数  $N_0, N_1$  が存在して, すべての  $s \in [\underline{s}_{N_1}, \bar{s}_{N_1}]$  に対し,

$$0 \leq \mu_{4,N_0} \leq 0.0045, \quad (5.64)$$

$$1.6\mu_{4,N_0}^2 \leq \mu_{6,N_0} \leq 6.07\mu_{4,N_0}^2, \quad (5.65)$$

$$0 \leq \mu_{8,N_0} \leq 48.469\mu_{4,N_0}^3, \quad (5.66)$$

$$\mu_{2,N} < 2 + \sqrt{2}, \quad N_0 \leq N < N_1, \quad (5.67)$$

が成立するとする. このとき,  $s_c \in [\underline{s}_{N_1}, \bar{s}_{N_1}]$  が存在して,  $s = s_c$  に対し,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{4,N} = 0, \quad (5.68)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{2,N} = 1 \quad (5.69)$$

が成立する.

次の命題は, 強結合領域における軌道の評価であり, 厳密な評価を伴う数値計算によって示される.

**Proposition 5.2.** Proposition 5.1 の仮定は  $N_0 = 70$  and  $N_1 = 100$  として成立する. ただし,  $\underline{s}_{N_1}$  and  $\bar{s}_{N_1}$  は

$$1.792\ 567\ 117\ 009\ 262\ 4 \leq \underline{s}_{N_1}, \quad \bar{s}_{N_1} \leq 1.792\ 567\ 117\ 009\ 262\ 5 \quad (5.70)$$

を満たす.

Proposition 5.1, Proposition 5.2 から, 次の定理を得る.

**Theorem 5.3.**  $d = 4$  のとき,  $s$  の critical value  $s_c$  が区間

$$[1.792\ 567\ 117\ 009\ 262\ 4, 1.792\ 567\ 117\ 009\ 262\ 5] \quad (5.71)$$

に存在し,  $s = s_c$  に対応する trajectory は Gauss 測度

$$h_\infty(x) = \exp(-x^2/4) \quad (5.72)$$

に収束する.

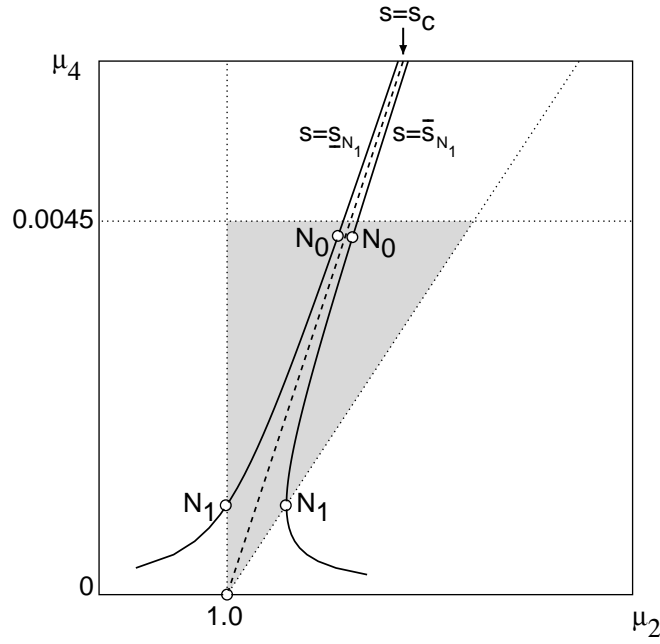


図 5.2:  $(\mu_2, \mu_4)$  平面に描かれた繰り込み群軌道の概念図 (Proposition 5.1). Gauss 固定点は  $(1.0, 0)$ , 実線は  $s = \bar{s}_{N_1}$  および  $s = \underline{s}_{N_1}$  に対応する軌道, 破線は  $s = s_c$  に対応する臨界軌道である. (5.61), (5.64), (5.67) を満たす部分に影をつけた.

問題 5.1. (5.2) を

$$H_N(\phi) = \sum_{\theta, \theta'} J_{\theta\theta'} (\phi_\theta - \phi_{\theta'})^2 - \sum_{\theta} \mu \phi_\theta^2 \quad (5.73)$$

と書くとき,  $\mu$  を定めよ.

問題 5.2. Ising measure の特性関数  $\varphi(\xi) = \cos(s\xi)$  に対し, potential の Taylor 展開 (5.51) は, 正 (または 0) の係数をもつことを示せ.

## 参考文献

- [1] J.Glimm, A.Jaffe, T.Spencer, *The Particle Structure of the Weakly Coupled  $P(\phi)_2$  Model and Other Applications of High Temperature Expansions*, in G. Velo, A. Wightman (eds.), *Constructive Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics 25*, Springer, 1973, 132-242.
- [2] J.Glimm, A.Jaffe, *Quantum Physics, Second Edition*, Springer, 1987.
- [3] R. Fernández, J. Fröhlich, A. D. Sokal, *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory*, Springer, 1992.
- [4] D.Brydges, J.Dimock, T.R.Hurd, *The short distance behavior of  $(\phi^4)_3$* , Commun. Math. Phys., **172**, 1995, 143-186
- [5] K.Gawedzki, A.Kupiainen, *Massless Lattice  $\phi_4^4$  theory: Rigorous Control of a Renormalizable Asymptotically Free Model*, Commun. Math. Phys., **99**, 1985, 197-252.
- [6] V. Rivasseau, *From Perturbative to Constructive Renormalization*, Princeton University Press, 1991.

- [7] C. Itzykson, J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1985.
- [8] 江沢洋, 新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 日本評論社, 1988.
- [9] F. J. Dyson, Existence of a Phase-Transition in a One-Dimensional Ising Ferromagnet, *Commun. Math. Phys.*, **12**, 1969, 91–107.
- [10] Ya. G. Sinai, *Theory of Phase Transition: Rigorous Results*, Pergamon Press, 1982.
- [11] P. Collet, J.-P. Eckmann, A Renormalization Group Analysis of the Hierarchical Model in Statistical Mechanics, *Springer Lecture Note in Physics* 74
- [12] K. Gawedzki, A. Kupiainen, Non-Gaussian Fixed Point of the Block Spin Transformation. Hierarchical Model Approximation, *Commun. Math. Phys.*, **89**, 1983, 191–220.
- [13] H.Koch, P.Wittwer, A Non-Gaussian Renormalization Group Fixed Point for Hierarchical Scalar Lattice Field Theories, *Commun. Math. Phys.*, **106**, 1986, 495–532.
- [14] C.M.Newman Inequalities for Ising models and field theories which obey the Lee–Yang theorem, *Commun. Math. Phys.*, **41**, 1975, 1-9.
- [15] T.Hara, T.Hattori, H.Watanabe, *Triviality of hierarchical Ising model in four dimensions*, *Commun. Math. Phys.*, **220**, 2001, 13–40.
- [16] 渡辺 浩, 場の量子論の数学的構成, 日本医科大学基礎科学紀要, 第 22 号,1997, 1–67