

# フラクタルにおける対称性の回復

– くりこみ群を想う –

服部 哲弥

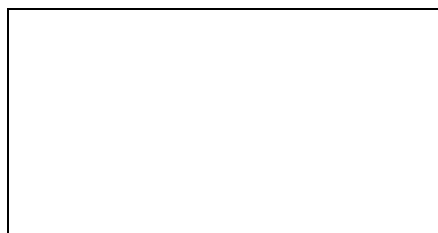


図1 Sierpiński gasket (左) と Sierpiński carpet (右) .

## 1. フラクタルとその対称性

フラクタルという言葉聞いたことのある人は多いだろう<sup>1)</sup> . 多くの角度から基礎研究が行われ、また、科学の種々の分野に応用研究が試みられている . ここでは、フラクタルの基礎研究の一つを、くりこみ群の思想との関連で紹介する<sup>2)</sup> .

広い意味での自己相似な図形を一般にフラクタルと呼ぶ . ここでは話を簡単にするために狭い意味の自己相似な図形を考える . 自己相似性は、ある図形を縮小した図形をいくつか合わせて元の図形を再現できること、と理解できる . 典型的な例として、以下では Sierpiński gasket と呼ばれる図形と Sierpiński carpet と呼ばれる図形に話を限る . 図1 にこれらのフラクタルを示した . 但し、図に描かれているのは「偽物」である . 「本物」のフラクタルは自己相似になるように無限に細かい構造を持っていないなければならない .

Sierpiński gasket は単位三角形の内部に複雑な構造を持つ図形である . 図2 は、Sierpiński gasket が、長さを半分に縮小すると元の図形の

$1/3$  の部分に重なることを示している . 重ね方は3通りある . Sierpiński carpet は単位正方形の内部に複雑な構造を持つ図形である . 図3 は、Sierpiński carpet が、長さを  $1/3$  に縮小すると元の図形の  $1/8$  の部分に重なることを示す .

一般に縮小写像の組を与えると、それらによって写された図形の和集合が元の図形に一致する、という条件から (空でない有界閉集合が一意的に定まるという意味で) フラクタル図形が定義できる<sup>3)</sup> . その意味で、図2 と 図3 はそれぞれ Sierpiński gasket と Sierpiński carpet の定義を説明している .

Sierpiński gasket は次のようにして作ることも



図2 Sierpiński gasket の自己相似性 .

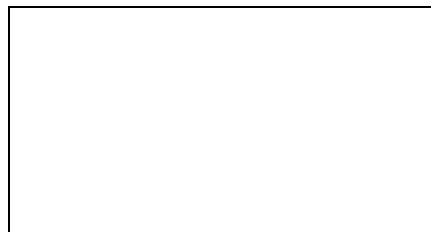
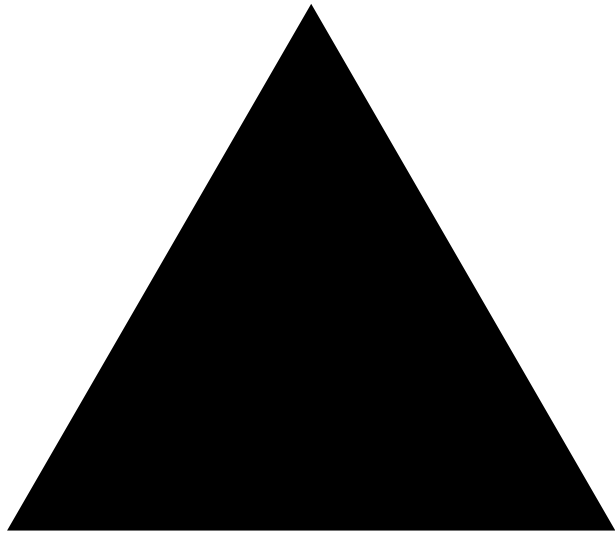
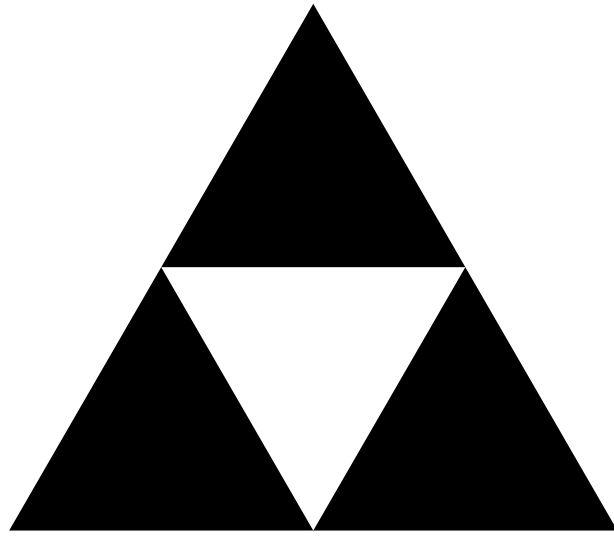


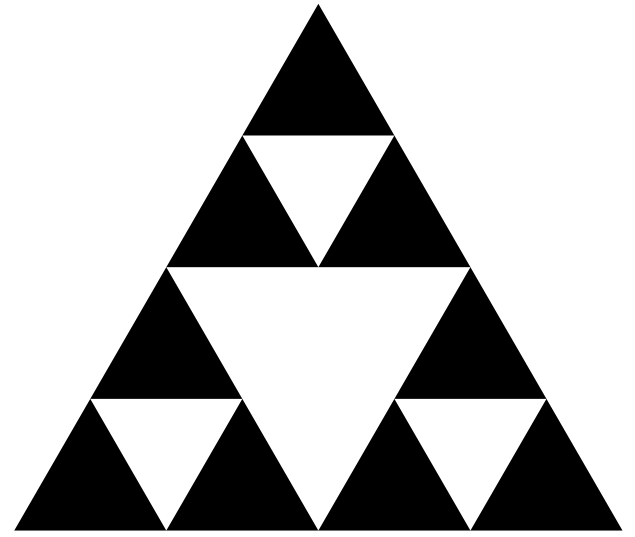
図3 Sierpiński carpet の自己相似性 .



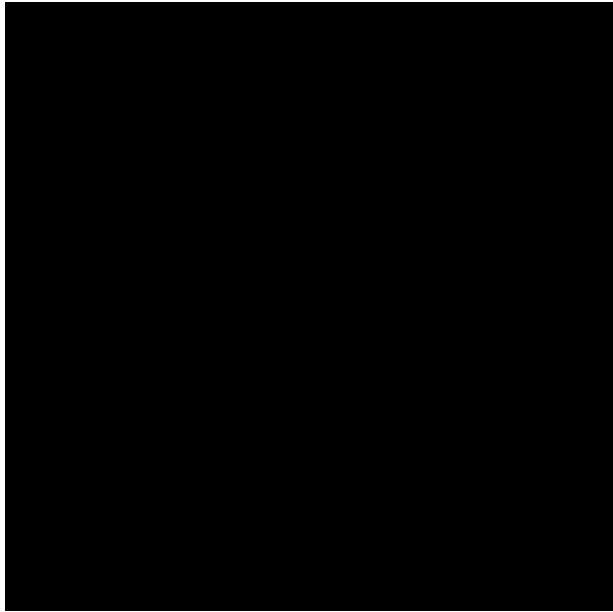
$F_0$



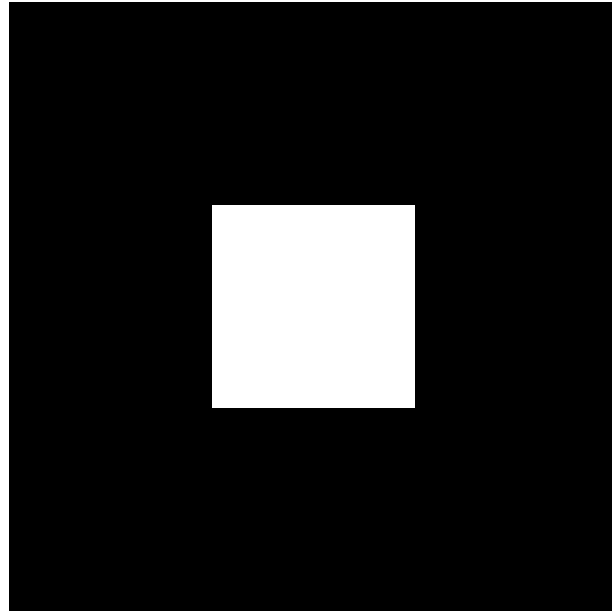
$F_1$



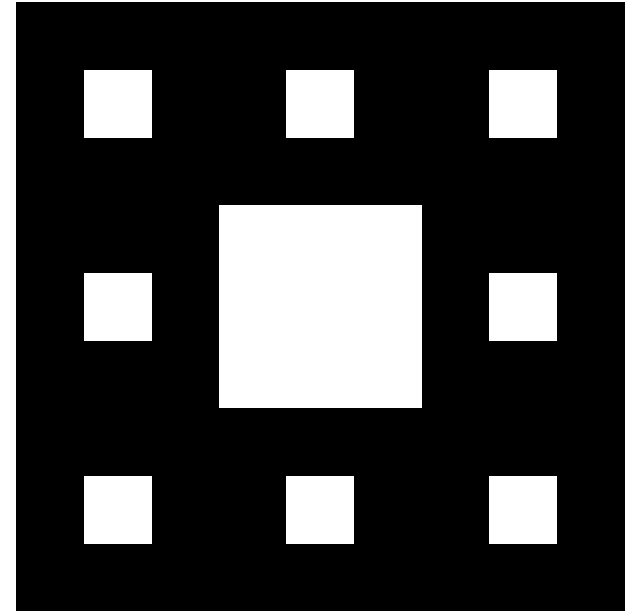
$F_2$



$F_0$



$F_1$



$F_2$

できる．一辺の長さが 1 の三角形（周と内部）を  $F_0$  とおく． $F_0$  から一辺  $1/2$  の下向きの三角形の内部を 1 個，図 4 のようにくり抜いてできる，一辺  $1/2$  の上向きの三角形 3 つからなる図形を  $F_1$  とおく．同様に  $F_1$  から一辺  $1/4$  の下向きの三角形を 3 個くり抜いてできる図形を  $F_2$  とおく．これを繰り返して，一般に， $F_{n-1}$  から一辺  $1/2^n$  の下向きの三角形を  $3^{n-1}$  個くり抜いてできる図形を  $F_n$  とおく． $F_n$  は一辺  $1/2^n$  の上向きの三角形を  $3^n$  個つないでできる図形になるが，その  $n \rightarrow \infty$  の極限として Sierpiński gasket を得る．

Sierpiński carpet の場合も同様である（図 5）．一辺 1 の正方形から  $n = 1, 2, \dots$ ，に対して順次一辺  $1/3^n$  の正方形を  $1/8^{n-1}$  個ずつくり抜いていき，その  $n \rightarrow \infty$  の極限として Sierpiński carpet を作れる．記号を節約して Sierpiński carpet のこの構成に対しても，Sierpiński gasket のときと同様に，最初の正方形を  $F_0$  とし，一般に第  $n$  段階の図形を  $F_n$  とおく（第 2 節は一般論，第 3 節は Sierpiński gasket，第 4 節以降は Sierpiński carpet についての記述，と分かれているので，同じ  $F_n$  を用いても混乱はないと思う．）フラクタルに対して，上のような  $F_n$  たちを，フラクタル前駆図形という気持ちで，プレ-フラクタル (pre-Sierpiński gasket, pre-Sierpiński carpet) と呼ぶ．



図 4 Pre-Sierpiński gaskets.



図 5 Pre-Sierpiński carpets.

フラクタルというとはまず自己相似性に注目する．定義から考えて健全な態度である．しかし，ここでは，図形の自己相似性とは直接関係のない対称性にも注目しよう．

Sierpiński gasket (pre-Sierpiński gasket) は図形の中心 ( $F_n$  の重心) の回りに  $\pm 120^\circ$  回転しても変わらないという回転対称性を持つ．同様の意味で，Sierpiński carpet (pre-Sierpiński carpet) は  $90^\circ$  回転対称性を持つ．回転対称性という代わりに鏡映対称性と言っても良い．例えば，Sierpiński carpet は  $x$  軸と  $y$  軸の入れ替えを行う鏡映対称性に関して不変な図形である．以下の話は回転対称性と思うか鏡映対称性と思うかによらないので，こだわらないことにする．

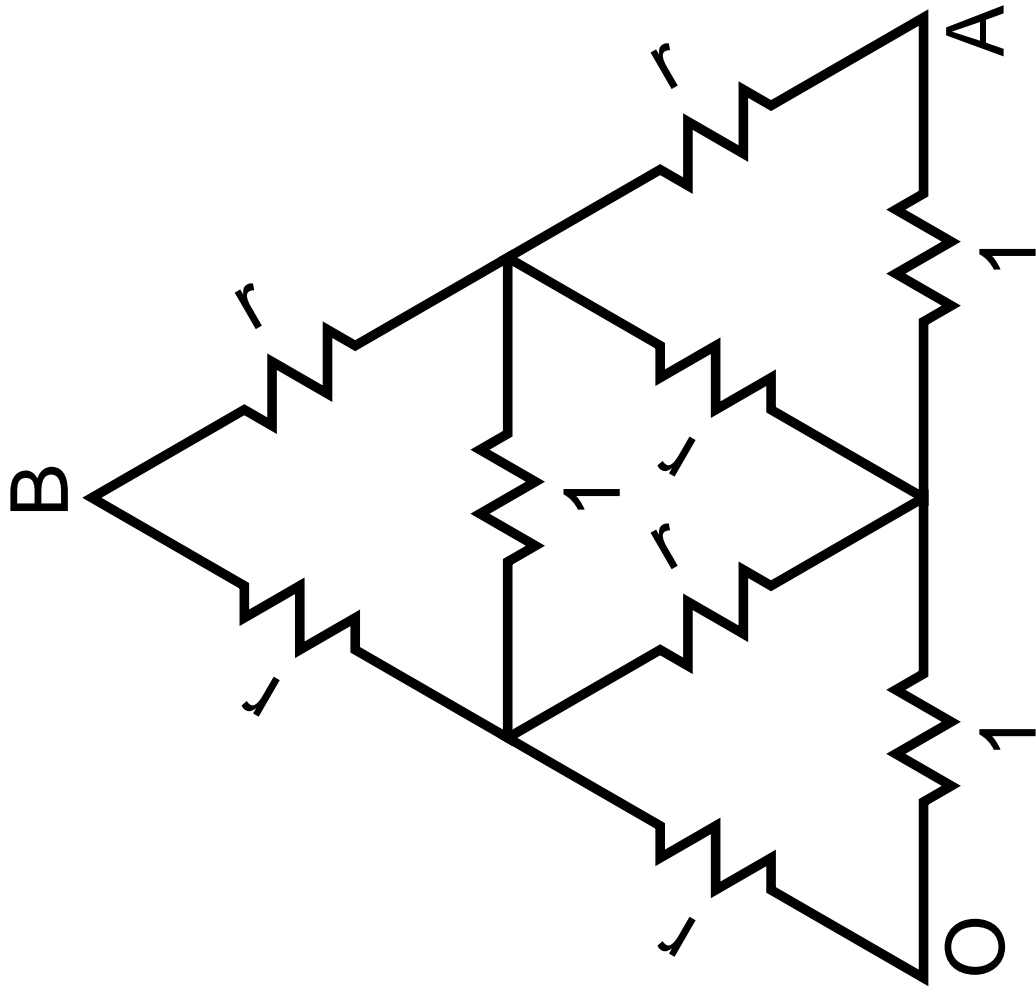
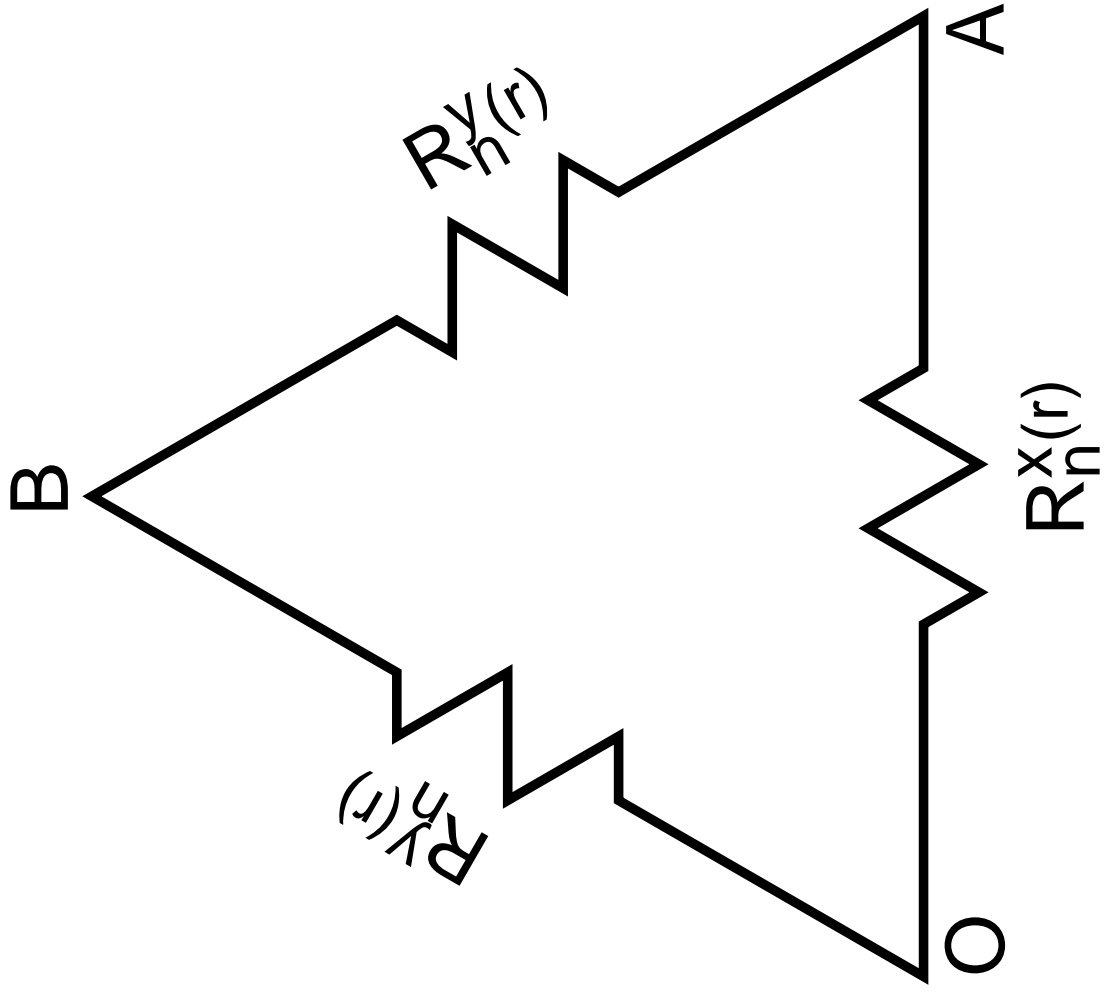
図形の対称性とフラクタルとしての自己相似性の関わりがこの記事のテーマである．

## 2. プレ-フラクタル型の非等方的な電気抵抗板

人が現象を理解するときの心の動きの一つに，現象に対称性を見いだそうとする傾向がある．現象の基礎法則は美しい対称性を持つに違いないという信仰は，仮説を提案するときの拠り所になりやすい．一方で，パリティ非保存のように，基礎的な法則が時空の対称性を破るという発見もあった．現象の基礎法則が空間の持つ対称性を満たさないことがあるのだ．そこで，前節で導入したプレ-フラクタルについて，図形が持つ対称性を満たさない現象を図形上に定義し，対称性のゆくえを追うことにする．

具体的には，電気抵抗を考える．電気抵抗は Dirichlet form の概念を通して，種々の現象，例えば，酔歩，拡散，自由場，などと数学的に密接な関連があり，以下の話はこれらの現象に対しても対応する結果が得られるが，この方向には深入りしない．

電気抵抗を持つ材質で作られたプレ-フラクタル  $F_n$  を考える．既に注意したように  $F_n$  は対称性を持っているが，材質の電気抵抗がその対称性を持っていない状況を考えよう．図 4, 図 5 の横方向を  $x$  軸方向，縦方向を  $y$  軸方向とし， $x$  方向





の抵抗率が 1,  $y$  方向の抵抗率が  $r$  であって, 抵抗率テンソルの二つの主軸が座標軸に平行な一様非等方な材質を考える. そして,  $F_n$  をこの材質によって作られた板であるとする. 言い換えると,  $r > 0$  を定数とし, 電位分布が  $v(x, y)$  のときに  $F_n$  が発するジュール熱が

$$E_{F_n}(v) = \iint_{F_n} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (1)$$

で与えられるとする (具体的な計算の際は, (1) は座標変換

$$y' = y\sqrt{r} \quad (2)$$

によって等方的な抵抗板に変換できることに注意する. 即ち, 実験的には等方的な材料を用いて長方形に成形すればよく, 理論的には長方形領域における通常の調和関数の理論が使える.)

### 3. 対称性の回復 – Sierpiński gasket の場合

準備ができたので, まず pre-Sierpiński gasket 型の抵抗板の場合について電気抵抗を調べよう. 第  $n$  段階の pre-Sierpiński gasket  $F_n$  (図 4) の 3 頂点を左下, 右下, 上, それぞれ,  $O, A, B$ , とし,  $O, A, B$  を端子として抵抗を測定する<sup>\*1)</sup>. 抵抗は最小発熱の原理によってジュール熱 (1) を用いて書けるが, この話は後に取っておくことにして, ここでは等価な抵抗素子回路網の問題に直してしまう.

小さい三角形一つ一つは外側と 3 点だけで接しているので, 抵抗板は各小三角形の各辺に適当な抵抗素子をおいた回路網と等価になる (図 6). 等価というのは, 頂点  $O, A, B$  を端子として抵抗を測る限り, 抵抗板と抵抗素子回路網で同じ抵

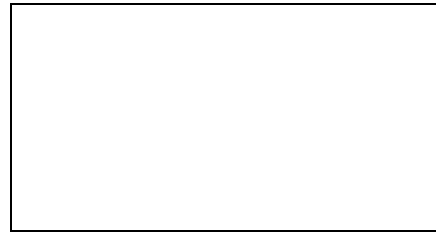


図 6 Pre-Sierpiński gasket の等価抵抗回路網.  $O, A, B$  で測定する限り, 左右の図, および, 図 4 の  $F_2$  は区別できない.

抗値を示して区別できない, ということである<sup>4)</sup>. 図 6 の左側の図のように  $x$  軸方向に並んだ抵抗を大きさ 1 とし, それ以外の  $\pm 120^\circ$  方向に並んだ抵抗は大きさ  $r'$  とする.  $r'$  は (1) の  $r$  の関数で, 抵抗板と回路網が全体の定数倍を除いて等価になる条件で決まるが, その関数形は結論には無関係なので, 以下この節の終わりまで  $r'$  を改めて  $r$  とおく.

対称性から,  $120^\circ$  方向と  $-120^\circ$  方向は等しい (一般化して 3 方向とも異なる値にとっても最後の結論は変わらないことが分かっている.) 同じ理由から, この抵抗回路網はさらに 図 6 の右側の図のように,  $OA, OB, AB$  に適当な抵抗を置いてつないだ回路網と等価になる. この等価回路の,  $OA$  の抵抗値を  $R_n^x(r)$ ,  $OB$  と  $AB$  の抵抗値を  $R_n^y(r)$  とする. この回路網の抵抗の非対称性 (Sierpiński gasket の持つ  $120^\circ$  回転対称性を抵抗値が満たさないこと) をはかる量として, 比

$$H_n(r) = \frac{R_n^y(r)}{R_n^x(r)} \quad (3)$$

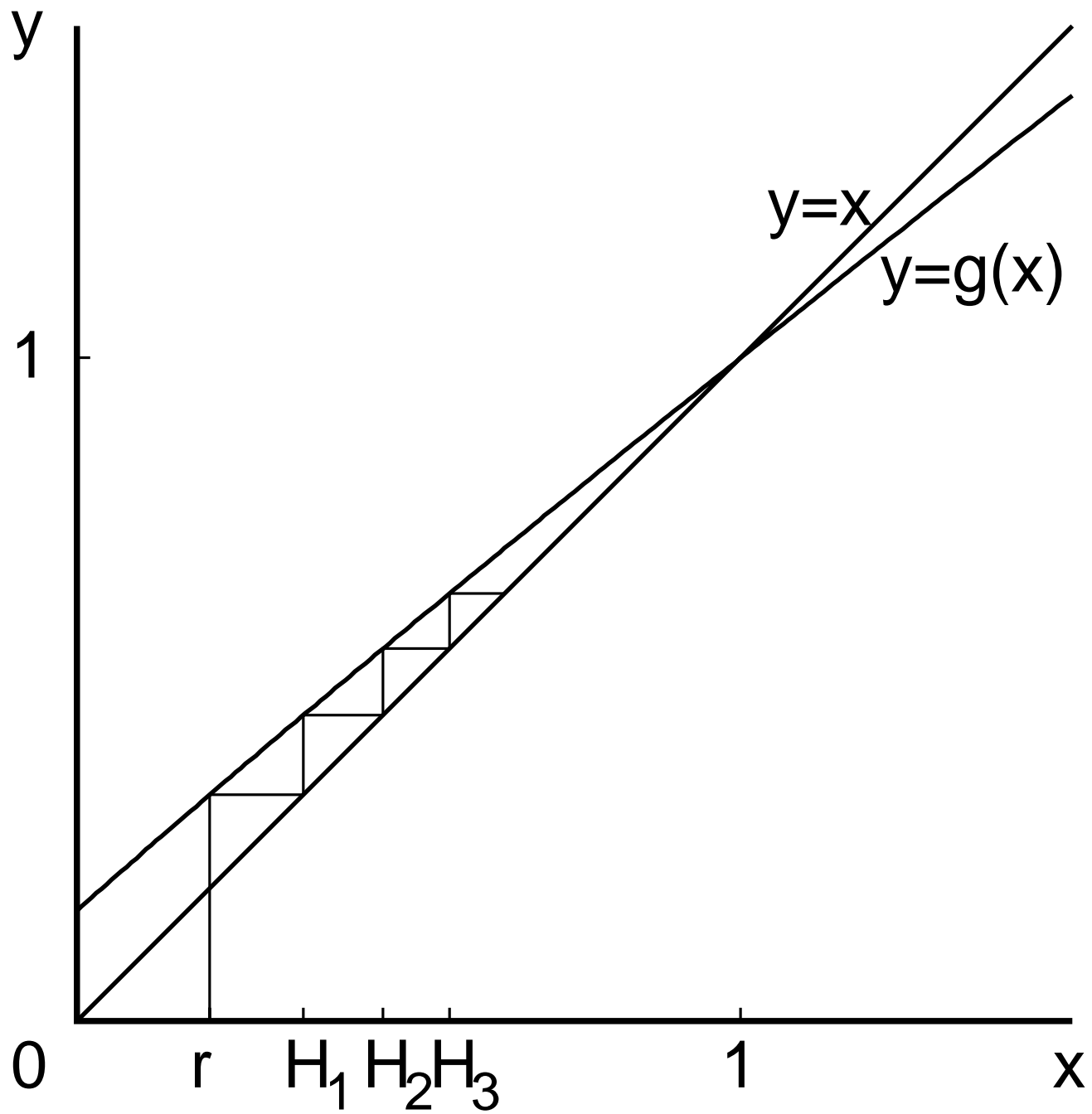
を導入する. 定義から  $R_0^x(r) = 1, R_0^y(r) = r$  なので  $H_0(r) = r$  である.

電気回路の初等的な計算<sup>4)</sup> によって,  $n$  に関する漸化式

$$H_{n+1}(r) = g(H_n(r)), \\ g(x) = \frac{3x^2 + 6x + 1}{4x + 6}, \quad (4)$$

が成り立つことが分かる. この漸化式を図示したのが 図 7 である. 図の中で  $x = 1$  は  $g$  の  $x > 0$  における唯一の固定点 ( $g(1) = 1$ ) である. 図よ

1) ていねいに考えると, 二つの板を一点でつないだ抵抗板は抵抗が無大になる. 言い換えると, 2次元領域における Laplace 方程式の境界値問題で, 有限個の点に Dirichlet 境界条件, 残りに Neumann 境界条件を置くと, 一般には解がない. しかし, 小さい三角形たちを変形して, 三角形どうしを, 点ではなく, 有限の幅で接着し, 材質の抵抗率を調節しながら接着線幅と共にゼロに近づけた極限を考えることで pre-Sierpiński gasket 型の抵抗板を正当化できる. この点はこの記事の目的ではないので詳しい説明は省く.



り,  $r > 0$  がどんな実数であろうと,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(r) = 1 \quad (5)$$

となることが分かる.

非等方的な電気抵抗を持つ素材を用いても,十分に大きな pre-Sierpiński gasket の全体としての電気抵抗は等方的になることがわかった. 言い換えると, 電気抵抗が Sierpiński gasket の対称性を満たさないような材質を選んで pre-Sierpiński gasket を作っても, 細かい構造を入れていくと, 対称性が回復する. この現象が, 本記事の表題「フラクタルにおける対称性の回復」のもっとも簡単な例である.

このような対称性の回復現象は並進対称な図形, 例えば規則格子型回路網ではおきない. そのためか, これまで知られていなかったか, 注目されてこなかったようだ. しかし, 電気的な非等方性を持つ材質は特殊な物質ではないし, 等方的な材質でも (2) に従って一方向に長くした図形を考えればやはり対称性を壊すことができ, 対称性の回復が観測される.

#### 4. 対称性の回復 – Sierpiński carpet の場合

Pre-Sierpiński gasket では漸化式 (4) を陽に求めることができたので, 対称性の回復 (5) を証明できた. 次の問題は, 対称性の回復という現象

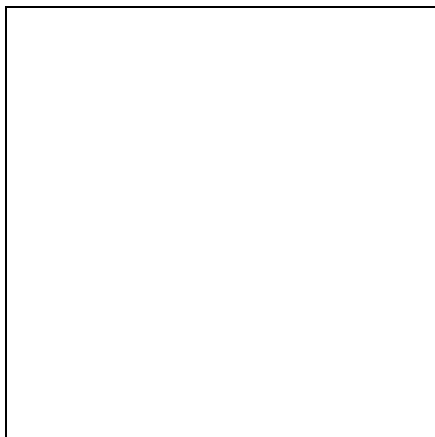


図 7 Pre-Sierpiński gasket における対称性の回復の証明.  $H_{n+1}(r) = g(H_n(r))$ .

が Sierpiński gasket に特有なのか, フラクタルに普遍的な現象なのかということである. そこで, 今度は pre-Sierpiński carpet の場合 (図 5) を調べよう.

$F_n$  の 2 辺  $y = 0$  と  $y = 1$  の間に電圧をかけたときに観測される抵抗を  $R_n^y(r)$  とする. 最小発熱の原理によれば,

$$\frac{1}{R_n^y(r)} = \inf \{E_{F_n}(v)\} \quad (6)$$

となる. ここで右辺は, 関数 (電位分布)  $v$  を境界条件

$$v(x, 0) = 1, v(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

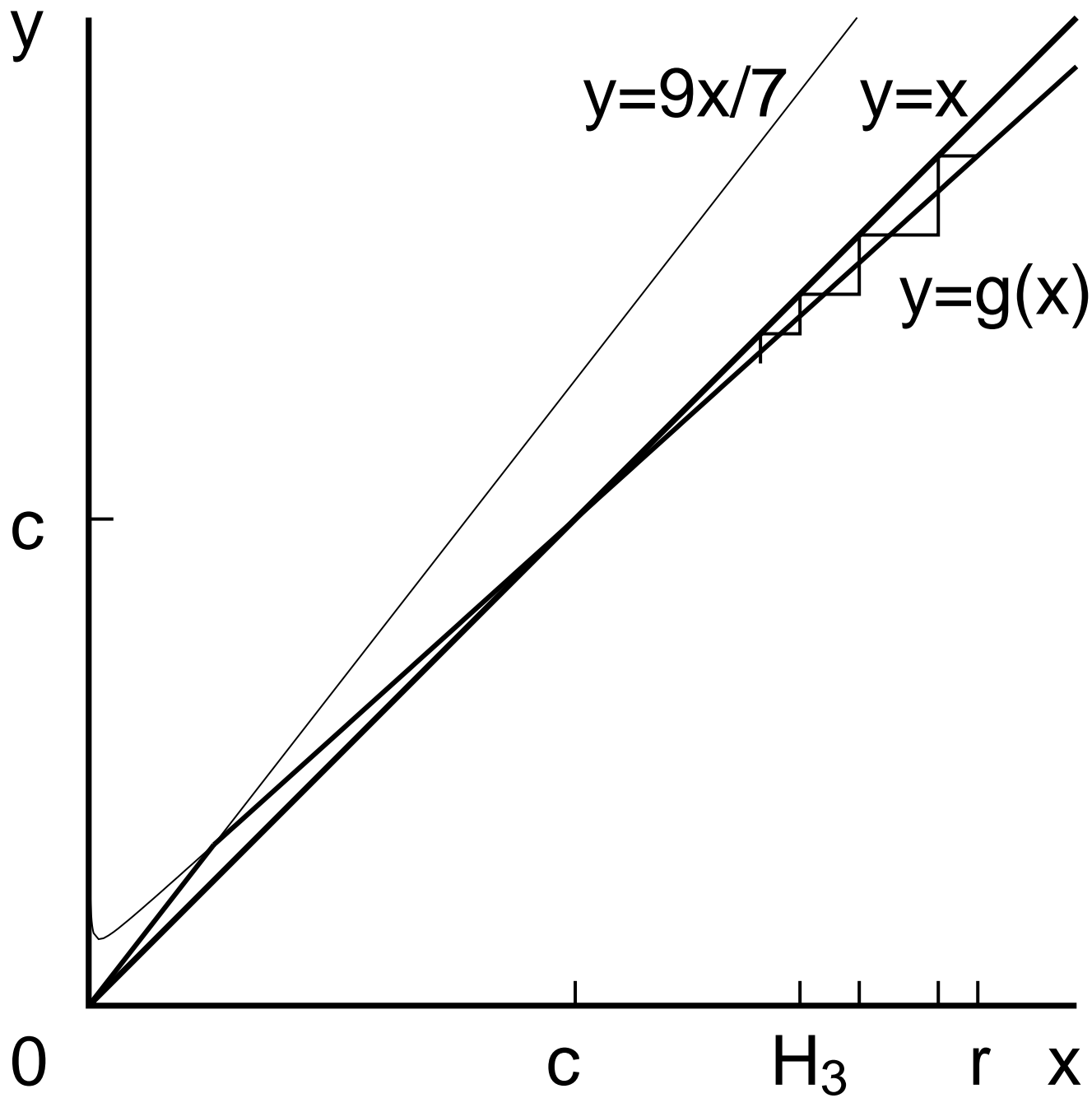
を満たしながら変えるときのジュール熱 (1) の最小値である ( $\inf$  は極小値の意味だが, この問題では  $v$  が調和関数のときに最小値をとることが分かる. また, 関数  $v$  は, 詳しく言うと, 境界条件までこめて連続で, 領域の内部で偏微分可能であって, (1) が有限になる関数の範囲で動かす.) 同様に  $x = 0$  および  $x = 1$  の間に電圧をかけたときに観測される抵抗を  $R_n^x(r)$  として, 非対称性を測る量として (3) の  $H_n(r)$  を考える. 特に,  $R_0^x(r) = 1$  および  $R_0^y(r) = r$ , 従って  $H_0(r) = r$  である.

$n$  が大きいときの  $H_n(r)$  の振る舞いについて次の結果を得た.

定理 1 ある定数  $C$  がとれて,  $r (> 0)$  が何であって,  $n$  が十分大きければ  $1/C < H_n(r) < C$  が成り立つ.

どれくらい大きな  $n$  で定理の不等式が成り立つかは  $r$  によって異なるが,  $C$  は  $r$  によらない. 実際,  $C = 4926$  にとれることが証明できる. 言い換えれば, 材質の電気的非等方性がどんなに大きくても (従って, 正方形の板  $F_0$  の場合の大局的な電気抵抗の非対称性がどんなに大きくても), フラクタルの細かい構造を入れていけば, やがて電気抵抗の非対称性は  $1/C$  と  $C$  の間の値になってしまう. その意味で (5) より弱いながら, 対称性の回復の傾向が言えたことになる.

電気抵抗と密接な関連のある random walk (酔



歩)に精通している諸氏を意識して, 対称性の回復を random walk を用いて直感的に説明してみる. フラクタルは一様な空間に比べると障害物があるとみなせる. 垂直方向に比べて水平方向に動きやすいような random walk をする粒子を考えよう. 粒子はすばやく水平方向に動き回るが, フラクタル中にはたくさんの障害物があるので遠くまで達することはできない. 粒子は, 二つの障害物の間にとらわれて, 水平方向にほぼ一次的な random walk をすることになる. とはいえ, 垂直方向にもゆっくりではあるが random walk しているので, やがて障害物を迂回するだろう. その結果, 水平方向にもより遠くまで達することができる. 障害物は水平方向と垂直方向に同じ大きさであり, それが, その大きさと同じ程度の距離をおいて配置されているので, 水平方向に見て遠くまで random walk が達する頃には同じ程度の距離垂直方向にも動いているはずである. 即ち, 対称性の回復が起きる.

#### 5. 再帰不等式

定理 1 の証明は, Sierpiński carpet の持つ自己相似性を自然に反映した再帰不等式を求めることに帰着される. 大雑把に言うと, 非対称性が強い ( $H_n(r) \gg 1$ ) とき  $R_{n+1}^x(r) \approx (3/2)R_n^x(r)$  と  $R_{n+1}^y(r) \approx (7/6)R_n^y(r)$  が成り立つ. 従って,  $H_n(r) \approx (7/9)^n r$  のように減少するので, 対称性の指数関数的回復傾向が分かる. 具体的には次の再帰不等式が証明できる.

命題 2  $r > 0$  かつ  $n \geq 0$  に対して

$$\frac{1}{R_n^x(r)} \leq \frac{3}{2} \frac{1}{R_{n+1}^x(r)} \leq \frac{a_1}{R_n^x(r)} + \frac{B_1}{R_{n-4}^y(r)},$$

$$R_n^y(r) \leq \frac{6}{7} R_{n+1}^y(r) \leq a_2 R_n^y(r) + B_2 R_{n-4}^x(r).$$

ここで,  $a_1 = 13/12$ ,  $B_1 = 108$ ,  $a_2 = 15/14$ ,  $B_2 = 324/7$ . これらの式で  $x$  と  $y$  を入れ換えた式も成立する. 但し,  $n < 0$  のときは  $R_n^x = R_0^x$ ,  $R_n^y = R_0^y$ , の意味とする.

命題 2 から 定理 1 が得られることを確認しよう. 命題 2 の 1 行目左側の不等式で  $x$  と  $y$  を入

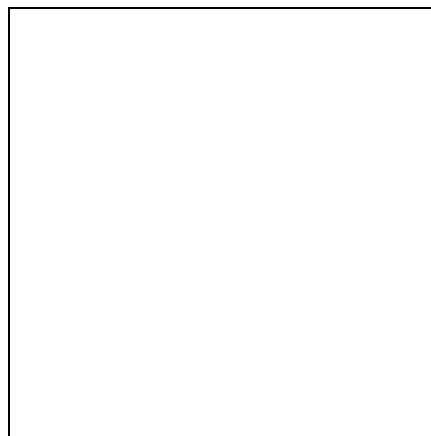


図 8 Pre-Sierpiński carpet における対称性の回復傾向の証明.  $H_{n+1} \leq \min\{g(H_n), 9H_n/7\}$ .

れ換えたものから

$$\frac{1}{R_{n-4}^y(r)} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{1}{R_n^y(r)}$$

を得る. これを 1 行目右側の不等式に代入すると

$$\frac{3}{2} \frac{1}{R_{n+1}^x(r)} \leq \frac{1}{R_n^y(r)} (a_1 H_n(r) + A_1)$$

を得る. ここで  $A_1 = B_1(3/2)^4$ . 2 行目についても同様の処理をすると,

$$\frac{6}{7} R_{n+1}^y(r) \leq R_n^x(r) (a_2 H_n(r) + A_2).$$

ここで  $A_2 = B_2(6/7)^4$ . 二つの不等式を辺々掛け合わせると,

$$H_{n+1}(r) \leq g(H_n(r)),$$

$$g(x) = \frac{7}{9x} (a_1 x + A_1)(a_2 x + A_2), \quad (7)$$

が成り立つ. また, 命題 2 の左側の不等式で  $x$  と  $y$  を入れ換えたものを辺々掛け合わせると,

$$H_{n+1}(r) \leq \frac{9}{7} H_n(r), \quad (8)$$

も得る. (7) と (8) から

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} H_n(r) \leq c$$

を得る.  $c$  は  $g$  の唯一の正の固定点 ( $g(c) = c > 0$ ). 以上の様子を 図 8 に示す.  $c < 4926$  はすぐ分かるので, 定理 1 の右側の不等式を得る.  $x$  軸と  $y$  軸の入れ替えを考えれば  $H_n(r) = 1/H_n(1/r)$  が分かるので, 定理 1 の左側の不等式も得る.

かくして、命題 2 から 定理 1 が証明できることが分かった。問題は 命題 2 をどうやって思いつくかである。その着想を整理すると、くりこみ群の思想が見えてくる。

## 6. くりこみ群 (1) – スケール変換に対する系の応答

個々の具体例については、くりこみ群が何を計算できるかについて大きな見解の差はないかも知れないが、位置づけや特徴づけといった思想的な部分は人によって大いに異なる（しかし、どう違うのかと問われると説明は難しい。さらに、時間とともに意見も変わる。）筆者は 21 世紀の数学の中の一つの大きな枠組みの可能性として、くりこみ群に期待する。

くりこみ群は物理の指導原理や近似計算の手段として発達したが、数学的に厳密な議論にくりこみ群の思想を適用した例も、スピン系の統計力学の分野を中心に、少なからずある（本特集の原氏の記事を参照していただきたい。）

これらの例は個々の難しい問題を非凡な洞察力と驚異的な計算力で撃破する。これでよしとする立場もあろう。問題を解くことが重要であり、方法論は重視しないのが健全な態度である。しかし、ここでは、くりこみ群という方法論に注目しよう。思想や近似計算にとどまらず厳密に定義された数学として、また、個々の問題ではなく普遍的に有効な強力な解析手段として、のくりこみ群である。微積分学という方法論が個々の問題を越えて数学の全分野に及び巨大な一般論となったように、いうまでもなく、この意味でのくりこみ群の数学は未解決である。

くりこみ群は無限自由度系を解析する一手段であって、スケール変換に対する系の応答をパラメータ空間上の力学系として表現する。くりこみ群を特徴づけるのは次の性質であろうと考える。

(i) くりこみ写像が距離空間上の関数空間（または距離空間に値を取る関数空間） $\mathcal{O}$  の上の測度または汎関数の集合  $\mathcal{M}$  の上で、解析的性質の良い写像  $g$  として定義されること。

- (ii) 距離空間のスケール変換  $S$  を反映していること。
- (iii) パラメータ空間上の力学系としてのくりこみ群の、固定点への収束または固定点近傍の線型化によって解ける問題であること。
- (iv) もとの問題から決まる初期条件の集合に対応する力学系の軌道が、固定点への収束を除いて大局的に正則なこと。<sup>\*2)</sup>

以下では、対称性の回復という問題をくりこみ群の立場から整理してみる。そのような試みが有効であると思うのは次の理由による。 $n$  を増やすと  $F_n$  は複雑になるので (6) の右辺の極小値を実現する関数  $v$  も複雑になる。そのような関数列を逐次求めてその積分として抵抗を求め、その  $n$  依存性を導くのはたいへんだらう。その代わりにスケール変換に対する応答としての写像を求めて、

2) 蛇足ながらここに提案した性質はそれぞれ以下の視点を念頭に置いている。

- i) 例えば、本特集の田崎氏の記事では第 3 節の例において閉曲線の集合を考察するが、閉曲線は平面（距離空間）に値を取る単位円周上の関数として表現できる。この例では自明な汎関数を選んだとみなせる。筆者が考察対象を汎関数や測度としたのは、直接的な別解がない本格的問題において、くりこみ群が有効な解析手段となることを期待するという意味である。
  - ii) 基礎法則の局所性と自然現象の大局性をつなぐのがスケール変換である。ここに無限自由度が現れる。この一点を数学の視点から説明した初等的な例として渡辺浩氏の別の特集の記事<sup>5)</sup>の後半部を参照して頂きたい。
  - iii) くりこみ群が主に臨界現象と普遍性を解析するという主張。普遍性については本特集の巻頭の示唆的な記事及び田崎氏のたいへん分かりやすい記事を参照して頂きたい。筆者は数学的解析手段としてのくりこみ群の可能性に関心があるので、普遍性という言葉を限定的に、数学的に証明できる範囲に限って用いたい。「固定点への収束または固定点近傍の線型化」はその主旨を含む。数学的に厳密なくりこみ群に関しては本特集の原氏の記事も参照して頂きたい。
- 固定点だけではなく周期点等の安定多様体への収束、を考える研究もある。筆者はパラメータ空間を取り替えて、例えば周期解が一つの固定点となるようにするべきであると考えているが、問題が与えられたときパラメータ空間をどう取るかは難しい。
- iv) 「初期条件の集合」はくりこみ群では canonical surface と呼ばれる。「正則」とは、例えばカオスや limit cycle の不在、canonical surface に関する軌道の連続性などが念頭にある。くりこみ群では canonical surface 上でパラメータを動かしたとき軌道が相転移点を通ると特異点が発生する、という点に注目するが、逆に、相転移点を通らなければ正則であるという主張もないと、数学的主張としてはくりこみ群の価値はない。しかも、カオスの例で知られるように正則性は自明ではない。

その性質を見ることで  $n \rightarrow \infty$  の情報を得よう。例えば, (4) で定義される漸化式から  $H_n$  を逐次求める代わりに,  $g$  を 図 7 のようにながめることによって, (5) という結論を得るほうが見通しがよいかもしいという考えである。実際, くりこみ群の描像によって 命題 2 の証明の特徴は以下のように整理される。

$K$  を, 単位正方形  $[0, 1]^2$  の 4 辺のうちのいくつかの辺 (各辺毎に両端を除いて开区間とする) の和集合とすると,  $K$  で定義された実解析関数の全体を  $\mathcal{O}_K$  とし,  $K$  の選びかたに関する和集合を  $\mathcal{O} = \bigcup_K \mathcal{O}_K$  とおく。領域  $D \subset (0, 1)^2$  に対してその境界を  $\partial D$  と書くことにする。

くりこみ群はスケール変換に対する系 (現象) の応答を見る。

$$I = \{(i, j) \mid i, j = 0, 1, 2, (i, j) \neq (1, 1)\}$$

とし, 各  $(i, j) \in I$  に対して,  $\mathbf{R}^2$  上のスケール変換 (拡大)  $S_{ij}$  を, 図 3 を眺みながら,

$$S_{ij}(x, y) = \left(\frac{1}{3}(i+x), \frac{1}{3}(j+y)\right) \quad (9)$$

で定義する。

問題にしている抵抗という現象は  $\mathcal{O}$  上の汎関数である。 $\partial D$  が単位正方形の 4 辺を含むような領域  $D \subset (0, 1)^2$  に対して汎関数  $R_D: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\frac{1}{R_D(u)} = \inf E_D(v), \quad u \in \mathcal{O}, \quad (10)$$

で定義する。ここで,  $E_D(v)$  は (1) で積分範囲を  $D$  としたもので, また,  $u \in \mathcal{O}_K$  のとき,  $\inf$  は関数  $v: D \rightarrow \mathbf{R}$  を  $v|_K = u$  を満たしながら動かすときの極小値である (正確に言うと, (6) と同様に,  $v$  は  $D$  の閉包で連続な関数で,  $D$  で偏微分可能であって, (1) が有限になるものを考える。) (10) で与えられる汎関数  $R_D$  の,  $D$  の選びかた全てにわたる集合を  $\mathcal{M}$  とおく。

この問題に対応するくりこみ群はスケール変換 (9) に対する系  $\mathcal{M}$  の応答を表す写像  $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  が定める力学系であって, 次式で定義される。 $R \in \mathcal{M}$  と  $u \in \mathcal{O}$  に対して,

$$\frac{1}{g(R)(u)}$$

$$= \inf \left\{ \sum_{(i,j) \in I} \frac{1}{R((u \oplus w) \circ S_{ij})} \mid w \in \mathcal{P} \right\}. \quad (11)$$

ここで,

$$K_{\frac{1}{3}} = \{(x, y) \mid x = \frac{1}{3} \text{ or } \frac{2}{3}, y \in (0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1)\} \\ \cup \{(x, y) \mid x \in (0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1), y = \frac{1}{3} \text{ or } \frac{2}{3}\}$$

とおくとき,  $\mathcal{P}$  は  $K_{\frac{1}{3}}$  を定義域とする実解析関数の全体であり,  $u \in \mathcal{O}_K$  と  $w \in \mathcal{P}$  に対して,

$$(u \oplus w)(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & (x, y) \in K, \\ w(x, y), & (x, y) \in K_{\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

と書いた。 $(u \oplus w) \circ S_{ij}$  は (9) の  $S_{ij}$  との合成関数

$$((u \oplus w) \circ S_{ij})(x, y) = (u \oplus w)(S_{ij}(x, y))$$

を表す。

定義から, 次が成り立つことはすぐ分かる。

命題 3  $n \geq 0$  に対して  $R_{F_{n+1}} = g(R_{F_n})$ 。

Sierpiński gasket の場合も全く同様にくりこみ群  $g$  を定義できるが, Sierpiński gasket の境界点は 3 点なので (等価回路の理論からわかるように),  $\mathcal{M}$  は  $\mathbf{R}^3$  とみなせる。即ち,  $g$  は実 3 変数関数である。 $g$  を,  $OB$  と  $AB$  が対称な空間, 即ち  $\mathbf{R}^2$  に制限し, さらに, 比をとることで  $\mathbf{R}$  上の写像としたのが (4) である。この意味で (4) は厳密なくりこみ群の例になっている。写像 (4) は,  $[0, \infty]$  で唯一の安定固定点  $x = 1$  と不安定固定点  $x = \infty$  を持ち,  $[0, \infty)$  から出発した任意のくりこみ群による軌道が安定固定点  $x = 1$  に収束する。これが, くりこみ群の言葉で説明したときの, pre-Sierpiński gasket 型抵抗板の対称性の回復現象である。

## 7. くりこみ群 (2) - パラメータ空間と軌道の追跡

Sierpiński carpet は 図 3 の縮小写像で写した結果の図形と, 残りの部分との境界が線分 (の和集合) であることを反映して,  $\mathcal{M}$  が無限次元空間になる。このことを Sierpiński carpet は

infinitely ramified fractal であるということがある．Sierpiński gasket のときはくりこみ群の解析は容易であったが，現在の技術では Sierpiński carpet のときのくりこみ群の完全な解析は難しい．そこで，考察対象の境界条件を有限個に制限して有限次元空間上の写像を得ることを目標とする．(11) の定義が  $w$  について極小値を求める形で書かれているので， $\mathcal{O}$  や  $\mathcal{P}$  を制限すれば等式の代わりに不等式を得る．

最も簡単な制限の仕方は， $u$  や  $w$  が定義されている各辺毎に定数関数に限ることである． $K_y = \{(x, y) \mid y = 0 \text{ or } y = 1\}$  上の関数  $u_y^{(a,b)}$  を  $u_y(x, 0) = a$ ,  $u_y(x, 1) = b$ , ( $0 < x < 1$ )，で定義すると，(6) の  $R_n^y$  は

$$R_n^y = R_{F_n}(u_y^{(1,0)}) \quad (12)$$

と表される．記号を見やすくするため  $u_y = u_y^{(1,0)}$  と書く．さらに，(10) と (1) において  $v$  を線型変換することにより，公式

$$R_{F_n}(u_y^{(a,b)}) = (a - b)^{-2} R_n^y \quad (13)$$

を得る．

$w \in \mathcal{P}$  としては，定数  $\alpha, \beta$  が存在して  $w(x, 1/3) = \alpha$ ,  $w(x, 2/3) = \beta$ , ( $0 < x < 1/3$ ,  $2/3 < x < 1$ )，となるもののみを考える． $F_n$  の持つ上下および左右の対称性と，最小発熱の原理(6)の右辺の極小値が調和関数によって実現すること，を利用すると，(11)の右辺を上から評価することができる．順に，(12)，命題3，(11)を上から評価したものを，(13)，を用いると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{n+1}^y} &= \frac{1}{R_{F_{n+1}}(u_y)} = \frac{1}{g(R_{F_n})(u_y)} \\ &\leq \frac{3}{R_{F_n}(u_y^{(1,\alpha)})} + \frac{2}{R_{F_n}(u_y^{(\alpha,\beta)})} + \frac{3}{R_{F_n}(u_y^{(\beta,0)})} \\ &= (3(1-\alpha)^2 + 2(\alpha-\beta)^2 + 3(\beta-0)^2) \frac{1}{R_n^y}, \end{aligned}$$

と変形できる．最後の式を平方完成すれば

$$R_{n+1}^y \geq (5(\beta - \frac{2}{5}\alpha)^2 + \frac{21}{5}(\alpha - \frac{5}{7})^2 + \frac{6}{7})^{-1} R_n^y$$

が任意の  $\alpha, \beta$  に対して成り立つから， $\beta = 2\alpha/5$ ,  $\alpha = 5/7$ ，に選べば，命題2の2行目の左側の不等式を得る．

$R_n^x$  と  $R_n^y$  を混ぜる技巧を用いると命題2の1行目の右側の不等式を得る．残り二組の不等式を得るには今まで説明してきた(6)，即ち，電圧に関する最小発熱の原理，の代わりに電流に関する最小発熱の原理を考える．これは(6)の  $\inf$  を達成する関数が調和関数になることから，電流  $j = \text{grad } v$  でも変分原理が書けることを用いる．これらの技巧が利用できることを発見したことが研究としてはセールスポイントかも知れないが，くりこみ群の説明という観点からは調和関数特有の技巧なので，詳細は省略する<sup>3)</sup>．以上で命題2の証明をくりこみ群の言葉を用いて整理したことになる．

Sierpiński gasket では，等方性の回復が(5)という，強い意味で成り立つ．定理1は，この等方性の回復が弱い意味ながら Sierpiński carpet でも成立する，ということであるが，定理1の  $C = 4926$  は本質ではない．等方性の回復機構は Sierpiński gasket の特殊性によるものではなく，普遍的な内容を持つことを定理1が示唆していると理解して，(5)が Sierpiński carpet の場合も成り立つと予想する．第6節最後に Sierpiński gasket の場合について言及したように，この予想はくりこみ群の軌道が固定点に収束するという主張である．定理1は Sierpiński carpet の場合にも，予想される固定点を含むある有界領域に軌道が必ず落ち込むことを見届けたことを示す．

くりこみ群の立場から考えると，Sierpiński carpet の場合に(5)を得るためには，(11)の右辺の評価において，より多くの境界条件を参加させる必要がある． $\mathcal{O}$  の適切な完全系  $\{u_j\}$  を選び，一般化された有効抵抗  $R_{F_n}(u_j)$  を考えて，それらの間の  $n$  についての recursion を考えることになる．これは， $R_{F_n}$  という汎関数を  $R_{F_n}(u_j)$  という実数の無限個 ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) の組，即ち無

3) 証明に関心のある方は原典<sup>2)</sup>を参照していただきたい．(遠い)将来，くりこみ群の研究が進んで(11)を直接扱うことができるようになった暁には，もっとすっきりした証明に置き換わることを期待したい．また，命題2の  $a_1, B_1, a_2, B_2$  の値，および，添字  $n-4$  の4も，現在の証明の技術的制約によるもので，本質的な意味はない．



限次元パラメータ空間，で表現することを意味する．しかし，これは現在の筆者の想像力を越える．

Sierpiński carpet における対称性の回復という問題によって，自明でない解析が必要な問題におけるくりこみ群の迫力を示すことをめざした．本特集の田崎氏の記事が初等的な例題によってくりこみ群の本質を極めて明快に説明して，読みやすい記事となっていることと相補的な関係になれば嬉しい．他方，この問題は，数学的厳密性を犠牲にせずくりこみ群の定式化が可能で，本特集の範囲内でその証明を（少し無理をしながらも）与える程度には簡単な例である．この意味で本特集の原氏の記事が取り上げたような難しい問題とも相補的な役割を果たすことを期待する．

### 8. くりこみ群 (3) – 2041 年

Pre-Sierpiński carpet 上の電気抵抗の対称性の回復の証明をくりこみ群の言葉で説明した．しかし，試みに，第 6 節以降の「くりこみ群」という単語を「 $n$  についての漸化式」という語句に置き換えて読み直して頂きたい．この置き換えで読みづらくなるのは，第 6 節の前半と第 7 節の後半だけであろう．

命題 2 の証明を思いつくためには，少なくとも暗黙のうちにくりこみ群の描像を必要とするが，証明を理解するだけならばくりこみ群を具体的に意識する必要はないし，くりこみ群の枠組みを書き下しても今のところ具体的な進歩はない（記事を書いているうちに定理 1 の  $C$  の値を原典より多少改善できることに気づいたが，本質的な進歩ではない）．

既に触れたように，これは本記事に限ったことではないと考える．20 世紀現在「くりこみ群」という単語は，数理科学または数学において，個々の問題を越えた普遍的に有効な一般論の形では厳密には定義されていない．数学的には「 $n$  についての漸化式」というだけでは尽くせない（予想や期待はあっても）成果を確立したとは言えない．

では，くりこみ群は数学の中で大きな枠組みとなることなく終わった描像だろうか．答えに代え

て次の文章を引用させて頂く<sup>6)</sup>．

私は，今の解析学および理論物理学は 1900 年を中心にした革命期の後の洗練期に入っていると思っています．次の革命期は今から 50 年後，仮に 2041 年としましょう，を中心にした時期だと思っています．．．私の思う 2041 年の解析学および理論物理学の革命とは，20 世紀の言葉で近似的に言えば無限自由度系の解析であり，さらに 20 世紀で言うくりこみ群の 21 世紀における姿が今の微積分学のような基礎技術になるということです．

くりこみ群の枠組みが有益であることをいま示せてなくても悲観しない．

まだ 40 年もある．

### 参考文献

- 1) フラクタルを広めたマンデルブローの著作，B. T. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Freeman, San Francisco, 1982, は有名であろう．
- 2) M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Restoration of isotropy on fractals*, *Physical Review Letters* **75** (1995) 3042–3045, 及び，M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Weak homogenization of anisotropic diffusion on pre-Sierpiński carpet*, *Communications in Mathematical Physics*, to appear.  
本記事の主要部分の内容は Martin T. Barlow (University of British Columbia), 服部久美子 (信州大学), 渡辺浩 (日本医科大学) との共同研究である．第 6 節以降のくりこみ群による定式化の試みは渡辺氏との共同研究 (未発表) を含む．氏に感謝する．また，田崎晴明氏 (学習院大学) にはこの研究及び本記事の両方にわたって議論及び助言を頂いた．改めて感謝したい．なお，特に第 8 節において表現上の暴走がもしあれば，それは筆者一人の責任である．
- 3) フラクタルに関する数学の基礎教科書としては例えば，K. Falconer, *Fractal geometry*, Wiley, Chichester, 1990. 縮小写像の話は同書第 9 章．
- 4) 電気抵抗の計算は教科書を参照していただきたい．例えば，高橋秀俊「電磁気学」裳華房 (物理学選書 3) .
- 5) 渡辺浩，「0 と  $\infty$ 」数理科学 **358** 特集「0 と  $\infty$ 」(1993.4) 5–9.
- 6) 服部哲弥，「2041 年くりこみ群の研究」統計数理研究所レポート **48** (1993.10) 139–147.

(はっとり・てつや，立教大学理学部)

hattori@rkmath.rikkyo.ac.jp

<http://150.93.96.124/math/hattori/hattori.htm>