L^p 空間の完備性

— 測度論講義の一節から —

測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を固定する．関数 f の μ による積分は $\displaystyle\int_X f\,d\mu$ と書く．

必要な性質を持つ関数を探すことは多い．例えば微分方程式の解を求めるときなど．関数の集合（空間）を上手に取ることがほしい関数を見つける手段になる，という精神がある．

解析の容易な関数の列 f_n をとる．これがコーシー列になっていれば極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n$ が考えている空間の中にある，ということが完備性．つまり，広げた網（考察対象の空間）の中に求める関数があることを保証する．

この節の主な目標は，大ざっぱにいうと，$\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$ がノルム（L^p ノルム）になることを示し，さらに，$\{f\colon X \to \mathbf{C} \mid \|f\|_p < \infty\}$ なる関数の集合が Banach 空間（ノルムが定義する距離で完備な線形空間）であることを証明することである．

大ざっぱと言ったのは，厳格に言えば，関数の集合ではなく，測度ゼロの集合上の違いを無視した関数の同値類を考えなければならないからである．

積分を用いた関数のノルムに基づく関数空間の完備性は，関数解析と呼ばれる広大な分野の出発点である．

1 復習．

測度論の基礎知識（測度空間の定義と基礎性質，可測関数の定義・基礎性質と単関数近似，ルベーグ積分の一般的定義，積分の基礎性質）を仮定する．特に積分の基礎性質としては，以下の性質（線形性，極限との交換）既知とする．

定理 1 (単関数近似による積分の定義の整合性) $E \in \mathcal{B}$（即ち E が可測集合）, f が非負実数値可測関数，$\{f_n\}$ が非負実数値単関数の増加列で，f に各点収束するならば，$\displaystyle\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu.$

定義 1 実数値可測関数 f に対して，$f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$, とおくと， $f = f^+ - f^-$ であって可測関数の基礎性質によってこれらは非負値可測関数. $\displaystyle\int_E f^{\pm}\,d\mu$ が 定理 *1* から定まるので，少なくとも一方が有限のとき，そのときに限り，f は（ E 上で，測度 μ について）**定積分** を持つ，といい，$\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu$ と定義して，この値を定積分という．また，この定積分が実数値（有限値）のとき，f は E 上で **積分可能**（または，**可積分**）という．

複素数値可測関数 f に対しては，実部 $\Re(f)$ と虚部 $\Im(f)$ それぞれについて積分可能のとき積分可能といい，

$$\int_E f\,d\mu = \int_E \Re(f)\,d\mu + \sqrt{-1}\int_E \Im(f)\,d\mu$$

で積分を定義する．

定理 2 (線型性) *(i)* 可測集合 E, A, B が $E = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ を満たし，f が A, B 各々の上で積分可能ならば，f は E 上積分可能で，$\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$

(ii) f, g が可測集合 E 上積分可能ならば，任意の $a, b \in \mathbf{C}$ に対して $a\,f + b\,g$ も E 上積分可能であって，

$$\int_E (a\,f + b\,g)\,d\mu = a\int_E f\,d\mu + b\int_E g\,d\mu\,.$$

---

* kaiseki1.tex 服部哲弥 ver.20000530 の第５章「応用」§17 「L^p 空間の完備性」を切り出したもの．20000614wed 08:50-12:00 確率論（長田先生担当）代講分．20000530–0601;03;05;

定理 3 (零集合) *(i)* 可測集合 E が $\mu(E)=0$ ならば，任意の可測関数 f が積分可能であって $\displaystyle\int_E f\,d\mu = 0.$
(ii) f が E 上積分可能ならば，$\mu(\{x\in\Omega \mid f(x)=\infty\}) = \mu(\{x\in\Omega \mid f(x)=-\infty\}) = 0.$

定理 4 (零関数) 可測集合 E 上可積分な関数 f が $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu = 0$ を満たせば，$\mu(\{x\in\Omega \mid f(x)\neq 0\}) = 0$.

定理 5 (優収束定理) 可測集合 E 上で f_n たちが可測関数であって各点収束するとする．E 上で積分可能な（非負実数値）関数 ϕ が存在して，$|f_n(x)|\leq\phi(x)$, $x\in E$, $n\in\mathbf{N}$, ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E (\lim_{n\to\infty} f_n)\,d\mu.$ [1]

系 6 (項別積分定理, [伊藤清三, §13 定理 13.7]) 可測集合 E 上で f_n たちが可測関数であって，かつ，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n(x)|\,d\mu < \infty$ ならば，$\displaystyle\mu(\{x\in E \mid \neg\exists\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\}) = 0$, 即ち，殆ど全ての $x\in E$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が存在して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\,d\mu.$

2 準備．

2.1 「ほとんどいたるところ」．

$x\in X$ で真偽が定まる命題（X の関数） $P(x)$ が成り立たない $x\in X$ の集合 $\{x\in X \mid \neg P(x)\}$ が可測集合であってその測度が 0，つまり，

$$\mu(\{x\in X \mid \neg P(x)\}) = 0$$

であるときに，**ほとんどいたるところ** P が成り立つ，といい，$P(x)$, a.e., $P(x)$, μ–a.e., $P(x)$, a.e.–x, などと書く．

> 「ほとんどいたるところ成り立つ」とは，測度ゼロの集合を除いた残りで成り立つ性質のこと．

ほとんどいたるところ成り立つ性質は積分で使える．$\mu(E)=0$ ならば任意の可測関数に対して $\int_E |f| d\mu = 0$ が定義から出るので，例えば可積分関数 f, g に対して，$f\leq g$, a.e., 即ち，ほとんどいたるところ $f\leq g$ が成り立てば，$E=\{f>g\}$ とおくと，今定義したことによって $\mu(E)=0$ なので，定理 3 より

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\setminus E} f\,d\mu \leq \int_{X\setminus E} g\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$$

つまり，ほとんどいたるところ不等号が成り立っていれば積分でも不等号が保存する．

2.2 同値類．

定義 2 ある関係 $\sim$ が同値関係であるとは，

反射律： $(\forall x) x\sim x,$

対称律： $x\sim y$ ならば $y\sim x,$

推移律： $x\sim y$, $y\sim z$ ならば $x\sim z,$

[1] [伊藤清三, §13 定理 13.6] では Lebesgue の収束定理と呼んでいる．

が成立することである．

ある集合 A に同値関係 $\sim$ があるとき，$\sim$ で A を同値類に類別できる．即ち，各 $x \in A$ に対して $c_x = \{y \in A \mid x \sim y\}$ とおくと，$c_x \cap c_y \neq \emptyset$ と $c_x = c_y$ が同値になるので，$\Lambda \subset A$ を $x, x' \in \Lambda$, $x \neq x'$ ならば $c_x \neq c_{x'}$ かつ，$\bigcup_{x\in\Lambda} c_x = A$ となるようにとる．Λ の要素を代表元という.（Λ が常に取れることは選択公理.）$A/\sim = \{c_x \mid x \in \Lambda\}$ と書く．

厳密に言うと集合からなる集合（集合族）である．他方で，$x \sim y$ とは x と y は区別するに値しない（同じものとみなす）という気持ちなので，c_x の元は全て x に近いと思えば，A の中で違うものだけ選んで残したものを $A/\sim$ と思っている，という気持ちとも思える．以下ではそのような気持ちで同値類の概念を使う．この意味で $x \sim y$ のとき，x と y を同一視する，あるいは，同一視して同値類を考える，などという．

X 上の関数 f, g に対して $f = g$, a.e., 即ち，

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

であることを $f \sim g$ と書く．

命題 7 $\sim$ は同値関係である．

証明. 明らかなので練習問題とする． □

以下では，関数とは，$\sim$ で同一視したものを指すことにする．即ち，ある条件を満たす関数の集合を X と書くというときには，その条件を満たす（本来の意味の）関数の集合 Y に対して，同値類 $X = Y/\sim$ を X とし，その要素のことを関数という．従って，以下では如何なる条件もこの同一視と矛盾のない条件である（このことを「代表元の取り方によらない」という）ことを確認する必要があるし，実際確認されている．

2.3 L^p.

$L^p = L^p(X)$ はある関数空間[2]．これを定義するのに必要な記号をここで用意する．

定義 3 *(i)* $p \geq 1$ を固定する．X 上 *a.e.* で定義された可測関数 $f\colon X \to \mathbf{C}$ で，$\displaystyle\int |f|^p\,d\mu < \infty$ を満たすものの集合を L^p $(L^p(X))$ と書く（正しく言えば関数の同値類の集合）．

(ii) $f \in L^p$ に対して，$\|f\|_p = \left\{\displaystyle\int |f|^p\,d\mu\right\}^{1/p}$ を f の L^p–**ノルム**という．

(iii) $f_n \in L^p$, $n \in \mathbf{N}$, が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ を満たすとき，f_n は f に p **次平均収束**するという．

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, x-*a.e.*, を満たすとき，f_n は f に**概収束**するという．

注. a.e. で一致する関数の同一視を行っていることに注意．実際，$f = g$, a.e., ならば $\displaystyle\int |f|^p\,d\mu = \int |g|^p\,d\mu$ なので，積分の値だけを問題にする以上の定義では同値類の代表元の取り方によらない．

[2] 位相特に距離の定義された集合を空間と言い習わす．とりあえず，関数の集合ということ．ただし，既に注意したように，ここでは関数とはほとんどいたるところ等しい関数を同一視する同値類のことを指す．

2.4 Hölder 不等式．

命題 8 Schwarz の不等式 $f, g \in L^2$ ならば

$$\int |fg| d\mu \leq \sqrt{\int |f|^2 \, d\mu \int |g|^2 \, d\mu}.$$

Hölder の不等式 $p > 1, \ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, とする．$f \in L^p$, $g \in L^q$, ならば

$$\int_X |fg| \mu(dx) \leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

注. (i) $f \in L^p$, $g \in L^q$ なので $|f| < \infty$, a.e., $|g| < \infty$, a.e., だから左辺の被積分関数は実数値と思って良い．積分の確定はこの証明で右辺によって（絶対値の積分が）押さえられることから．

(ii) もちろん Schwarz の不等式は Hölder の不等式の特別な場合である．特別扱いするのは $p = 2$ のときのみ Hilbert 空間としての構造が問題になるから．

(iii) [伊藤清三, §17] では Schwarz の不等式の証明を済ませてから節末補足的に Hölder の不等式を証明する．その上，後者は直接的な短い証明なのに前者は support と高さを切断した近似関数の存在を補題とする．Schwarz の不等式に関するこれらの記述は無駄と思われるが，なぜそこにあるのか不明である．

証明.

補題 9 $a\,b \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ $(a \geq 0, \ b \geq 0)$.

補題 *9* **の証明**. $ab > 0$ だけやればよい．増減表から $f(x) = x^p/p + 1/q - x \geq 0$ $(x \geq 0)$ だから $x = a\,b^{-q/p}$ を代入して両辺に b^q をかける． □

Hölder の不等式の証明に戻る．$f \in L^p$ だから $\|f\|_p < \infty$ なので $|f| < \infty$, a.e., 従って最初から $|f|, |g| < \infty$ (即ち実数値関数) とする．$\|f\|_p = 0$ ならば $f = 0$, a.e., なので左辺は 0 となって，主張は無条件で成立する．よって $0 < \|f\|_p \|g\|_q < \infty$ としてよい．

補題 9 で $a = |f(x)| / \|f\|_p$, $b = |g(x)| / \|g\|_q$ とおいて積分する．

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int |f|^p \, d\mu + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int |g|^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

より主張を得る．

□

次の定理は Hölder の不等式の帰結であり，$\|\cdot\|$ が三角不等式を満たすこと（ノルムになること）を意味する．

補題 10 (Minkowski の不等式．) $p \geq 1, \ f, g \in L^p$ ならば $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

証明. $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ より，$p > 1, \ f \geq 0, \ g \geq 0$ の場合をやれば十分である．さらに，$\|f+g\|_p > 0$ としてよい．$\|f+g\|_p{}^p = \int |f+g|^{p-1} f \, d\mu + \int |f+g|^{p-1} g \, d\mu$ の右辺各項に Hölder の不等式を適用すると，

$$\int |f+g|^{p-1} |f| \, d\mu \leq \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q} \|f\|_p = \|f+g\|_p^{p-1} \|f\|_p$$

などから

$$\|f+g\|_p^p \le \|f+g\|_p^{p-1}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right).$$

$\|f+g\| > 0$ を仮定したので，主張を得る． □

3　L^p 空間の完備性．

3.1　Banach 空間．

定義 4　*(i)* スカラー倍と和について閉じている空間（集合）を**線型空間**（ベクトル空間）という．

(ii) 線型空間 X に実数値関数 $\|\cdot\|:\ X \to \mathbf{R}$ が定義されていて，

非負： $\|f\| \ge 0$,

一意： $\|f\| = 0$ ならば $f = 0$,

一次： $\|af\| = |a|\,\|f\|$,

三角不等式： $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$,

が成り立つとき，この空間 $(X, \|\cdot\|)$ を線型ノルム空間，$\|\cdot\|$ を**ノルム**という．

(iii) **非負：** $\rho(f,g) \ge 0$,

一意： $\rho(f,g) = 0$ ならば $f = g$,

対称： $\rho(f,g) = \rho(g,f)$,

三角不等式： $\rho(f,h) \le \rho(f,g) + \rho(g,h)$,

が成り立つ 2 変数関数を**距離**という．$\|\cdot\|$ がノルムのとき，$\rho(f,g) = \|f-g\|$ は距離である．これをノルムが定義する距離という．

(iv) 線型ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ が，ノルムが定義する距離に関して完備なとき，$X = (X, \|\cdot\|)$ を**Banach 空間**という．

$\mathbf{R}^d$, $\mathbf{C}^d$ は（それぞれ $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ を係数体とする通常の和と積に関するベクトル空間として）Banach 空間になる．ノルムは $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p}$ をとることができる．$p \ge 1$ は任意．本当は，ノルムが違えば Banach 空間として違う空間と言うべきだが，有限次元線形空間の場合は p が何であっても $\|\cdot\|_p$ が定義する距離は同値になる．

Lebesgue 積分の Riemann 積分に対する最大の利点の一つが，L^p の完備性である．L^p ノルム有限関数の L^p ノルムによる極限が L^p ノルム有限になる，ということ．Riemann 積分では極限と積分の順序交換が無条件では許されない[3]．

[3] 極限と積分の順序交換については，Lebesgue の収束定理 定理 5 によって，積分可能関数で押さえられていれば積分可能関数の極限が必ず積分可能になることは既に述べた．Riemann 積分ではこれは保証されない． 系 6 のあとの注の中の例：$m, n \in \mathbf{N}$ に対して，$\cos^{2n}(\pi m! x)$ は $[0,1]$ の連続関数だから，(Riemann の意味でも Lebesgue の意味でも）積分可能．しかし，極限 $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(\pi m! x))$ は x が有理数のとき 1，無理数のとき 0 となり，0 と 1 どちらの値をとる点も稠密に存在するから Riemann 積分不能である．

　但し，この例は各点収束極限の例だから L^p 収束が問題になっているここでの例としては不適切．たしか，連続関数の L^p 極限は不連続点の集合の閉包は測度 0 ではなかったか？

3.2 L^p 空間が Banach 空間であること．

定理 11 $(L^p, \|\cdot\|_p)$ は *Banach* 空間である．

証明. 三角不等式は 補題 10．完備性だけが自明でない．

$\{f_n\}$ を L^p の中の Cauchy 列とする，即ち，$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$．$n(k)$, $k = 1,2,3,\cdots$, を単調増加で $\left\|f_n - f_{n(k)}\right\|_p < 2^{-k}$, $n > n(k)$, となるようにとれるので，特に，$\left\|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\right\|_p < 2^{-k}$, $k = 1,2,3,\cdots$．$\tilde f_k = f_{n(k)}$, $k = 1,2,3,\cdots$, とおく．$g_n = |\tilde f_1| + \sum_{j=1}^{n-1} |\tilde f_{j+1} - \tilde f_j| \ \in L^p$ とおくと，各点で非負値単調増加で，各点での複素数の三角不等式と $\tilde f_n$ の取り方から $\|g_n\|_p \le \left\|\tilde f_1\right\|_p + 1$．単調収束定理から

$$\left\|\lim_{n\to\infty} g_n\right\|_p = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_p \le \left\|\tilde f_1\right\|_p + 1 < \infty$$

が存在．即ち，$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ が a.e.-x で存在（各点で増加だから）して有限，しかも，$g \in L^p$．$|g(x)| < \infty$ から $\tilde f_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (\tilde f_{j+1} - \tilde f_j) = \lim_{n\to\infty} \tilde f_n = f$ は a.e.-x で絶対収束して $|f| \le g$, a.e.，即ち $f \in L^p$．$|f(x) - \tilde f_n(x)| \le g(x)$ なので，優収束定理 (定理 5) が使えて，$\lim_{n\to\infty} \left\|f - \tilde f_n\right\|_p = 0$ を得る．

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f_n - f\|_p \le \lim_{n,k\to\infty} \left\|f_n - f_{n(k)}\right\|_p + \lim_{k\to\infty} \left\|f_{n(k)} - f\right\|_p$ となるから，主張を得る．[4] □

系 12 $f_n \in L^p$, $n \in \mathbf{N}$, かつ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ ならば，適当な部分列をとって $\lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(x) = f(x)$, *a.e.-$x$*, とできる．

即ち L^p 収束していれば，概収束する部分列が取れる．

証明. 定理 11 の証明で次の性質を持つ部分列 $n(k)$, $k = 1,2,3,\cdots$, の存在が言えている：

(i) $\exists \tilde f$; $\lim_{k\to\infty} f_{n(k)} = \tilde f$, a.e.,

(ii) $\lim_{k\to\infty} \left\|\tilde f - f_{n(k)}\right\|_p = 0$．

$$\left\|\tilde f - f\right\|_p \le \left\|\tilde f - f_{n(k)}\right\|_p + \left\|f_{n(k)} - f\right\|_p \to 0 \ (k\to\infty),$$

だから $\lim_{k\to\infty} f_{n(k)} = f$, a.e.. □

4 練習問題 ([伊藤清三, §22 問 1,2])．

(i) $\mu(X) < \infty$ ならば $1 < p < p'$ のとき $L^{p'} \subset L^p$ を証明せよ．

（ヒント．$\|f\|_p \le \|f\|_{p'}$ を証明することと同値．$f \mapsto f^p$ と $g = 1$ から $f^{p'}$ が出てくるように Hölder の不等式を使う.）

(ii)(a) $\mathcal{E} = \{\chi_A \mid \mu(A) < \infty\} \subset L^p$ は L^p ノルムに関して閉集合であることを証明せよ．

（略解．L^p ノルムで $\phi \in L^p$ に収束する $\mathcal{E}$ の列 χ_{E_n}, $n \in \mathbf{N}$, があると，系 12 より ϕ に概収束する部分列 $\chi_{E_{n(k)}}$ がある．概収束で χ_A の値域は $\{0,1\}$ だから，$\phi \in \{0,1\}$, a.e.. 即ち，$E = \{\phi = 1\}$ とおけば，$\lim_{k\to\infty} \chi_{E_{n(k)}} = \chi_E$, a.e.. $\phi \in L^p$ なので $\mu(E) < \infty$ だから $\phi = \chi_E \in \mathcal{E}$.）

[4] 以上の証明は級数に書き直して 系 6 に帰着させている．

(b) 完備距離空間の閉集合は（同じ距離に関して）完備であることを証明せよ．
（略解．コーシー列が元の空間で収束するが，閉集合なので極限を含む.）

(c) $f \in L^1$ に対して $F_f:\ E \to \mathbf{R}$ を，$\phi \in E$ に対して $F_f(\phi) = \displaystyle\int_X f(x)\phi(x)\,d\mu(x)$ とおいて定義すると，F_f は E 上の連続関数である．
（略解．$\|\chi_{A'} - \chi_A\|_p = \mu(A' \oplus A)^{1/p}$ なので，$\chi_{A'} \to \chi_A$ (L^p 収束) と $\mu(A' \oplus A) \to 0$ は同値.
また，$\mu(E) \to 0$ のとき $\int_E |f|\,d\mu(x) \to 0$ が積分の絶対連続性から言える．ヒント．近似増大単関数列 $f_n \nearrow |f|$ をとり，X での積分が近くなるよう n を大きく固定. $\int_A |f|\,d\mu$ を $\int_A f_n\,d\mu$ で近似できるが，単関数では $\sup f_n < \infty$ に注意して $\mu(A)$ で評価.
よって，
$$
\begin{aligned}
&|F_f(\chi_{A'}) - F_f(\chi_A)| \le \int_X |f(x)|\,|\chi_{A'}(x) - \chi_A(x)|\,d\mu(x) \\
&\le \int_{A'\oplus A} |f(x)|\,d\mu(x) \to 0,\quad \|\chi_{A'} - \chi_A\|_p \to 0\,.
\end{aligned}
$$
）

Banach 空間の議論の一つの典型は，考察の対象となる関数の空間を考え（例えば，微分方程式が成り立つ関数の集合），その中で性質のよい関数だけからなる部分空間をとり，部分空間で求める性質を証明し，かつ，部分空間が元の空間で稠密であることを証明して，極限移行する，というものである．

5 その他の関連する話題．

5.1 内積と Hilbert 空間．

$f,\,g \in L^2$ のとき $(f,g) = \int f\bar{g}\,d\mu$ と書く. ($\bar{g}$ は g の複素共役.）

念のため，[伊藤清三, §17] の Schwarz の不等式の証明のあらすじを書いておく．補題として，$f \in L^p$ ならば，L^p の列 $\{f_n\}$ であって，各 f_n 毎に有界かつ $\mu(f_n \neq 0) < \infty$，$|f_n|$ が単調増加で（ $|f|$ で上から押さえられ)，f に概収束，かつ，p 次平均収束するものがあることをいう（単に，$1/n \le |f| \le n$ を満たす x の集合に制限するだけ）．この補題から $\mu(f \neq 0) < \infty$ の場合に帰着できるが，すると，$|(f,g)| < \infty$．あとは，有限次元線型空間の Schwartz の不等式と同様.

共役性： $(f,g) = \overline{(g,f)}$,

線形性： $(af + bg, h) = a(f,h) + b(g,h)$,

非負性： $(f,f) \ge 0$,

一意性： $(f,f) = 0$ ならば $f = 0$,

を満たす 2 変数関数 $(\cdot,\cdot)$ を**内積**という．内積から $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ で定義される $\|\cdot\|$ はノルムである．内積が定義された線形空間で内積が定義するノルムに関して Banach 空間になっているものを **Hilbert 空間**という．

L^p の中では L^2 のみが Hilbert 空間である．

Hilbert 空間は元の間の直交性や基底などの概念が可能になる点で Banach 空間の中でも特別に重要である．

5.2 L^∞．

$p = \infty$ に相当する空間も Banach 空間になる[5]

[5] [伊藤清三, §23 (p.167)] で M と書かれている空間．このあと，§24 で $\mathbf{R}^N$ の場合に全く別の空間を L_∞ と呼んでいるが，これから導入する L^∞ とは別のもの.

定義 5 可測関数 f が本質的に有界とは，ある a に対して $|f(x)| \leq a$, *a.e.-*x, が成り立つこと．これが成り立つ a の下限を $ess.\ sup_{x\in X}|f(x)|$ と書いて本質的上限という．

本質的に有界な関数全体を L^∞ と書く．今まで通り，*a.e.* 一致の同値類で関数を考える．

命題 13 $\|f\|_\infty = ess.\ sup_x|f(x)|$ はノルムになり，$(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ は *Banach* 空間になる．

5.3 準ノルム．

ノルムの定義のうちスカラー倍の代わりに $\|-f\| = \|f\|$, かつ，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \|a_n f_n - af\| = 0$，を満たすとき $\|\cdot\|$ を準ノルムという．準ノルムでもノルムと同様の手続きで距離が定義できる．

準ノルムの定義された線型空間 $(X, \|\cdot\|)$ が，準ノルムが定義する距離に関して完備なとき，$X = (X, \|\cdot\|)$ を Frechét 空間という．

$\mu(X) < \infty$ のときは確率空間の議論が可能になる．$\mu(X) = \infty$ のときは，先に support の有界な関数に制限してその稠密性を証明し，$\mu(X) < \infty$ に帰着させる方法が，一つの戦術である．

有限な測度（特に確率測度）で有効なもう一つの収束．

定義 6 *(i)* 可測関数列 f_n, $n \in \mathbf{N}$, が任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| > \epsilon) = 0$ を満たすとき，f_n は f に漸近収束（確率収束）するという．

(ii) $\mu(X) < \infty$ のとき，X 上 *a.e.* に定義された実数値 $\mathcal{B}$-可測関数の全体を $S = S(X)$ と書く．$f \in S$ に対して準ノルム $\|f\|_S = \int \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu$ を定義する（三角不等式は $\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ から）．

定理 14 $(S, \|\cdot\|_S)$ は *Fréchet* 空間である．

証明. 定理 16 (iii) の $n(k)$ をとり，定理 11 の証明と同様に f を構成する． □

定理 15 $\mu(X) < \infty$ のとき，$\{f_n\}$ が f に確率収束することと $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_S = 0$ は同値．

証明. $x/(1+x)$ は $x \geq 0$ で単調増加，1 を越えない．$\|f_n - f\|$ の積分領域を $A_{n\epsilon} = \{|f_n - f| > \epsilon\}$ と補集合に分け，$A_{n\epsilon}$ では $x/(1+x)$ を 1 で，補集合では $x = \epsilon$ で評価．確率収束は $\lim_{n\to\infty} \mu(A_{n\epsilon}) = 0$, $\epsilon > 0$, と同値だから証明が終わる． □

定理 16 *(i)* $\mu(X) < \infty$ ならば，概収束すれば確率収束する．

(ii) L^p 収束すれば確率収束する．

(iii) 確率収束すれば概収束する部分列がとれる．

証明. (i) 有界収束定理（優収束定理定理 5 で ϕ を定数関数としたもの）を使う．

(ii) 定理 15 の S 収束から確率収束の証明と同様．

(iii) 命題 17 を適用すれば，$\mu(E_k) < 2^{-k}$, $E_k = \{|f_{n(k)} - f| > 2^{-k}\}$, なる部分列 $n(k)$ が求めるものである．

□

命題 17 $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ ならば，$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = \mu(X)$.

参考文献

[伊藤清三] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 1963, 裳華房（数学選書 4）．

代講指定内容.

日時： 2000 年 6 月 14 日 (水) 08:50–12:00 1 号館 3F 数理学科 3 年生

範囲： [伊藤清三, pp.159–166(–170), §22 (–§23)] L^p 空間の完備性

(i) 「ほとんどいたるところ」

(ii) ノルム

(iii) Banach 空間

既習： 5/24 時点 Fubini の定理， 5/31(予定) 実数上のルベーグ測度の諸性質

未習： 実数上のルベーグ測度の構成，測度の完備化，は未習

記号： $(X, \mathcal{B}, \mu)$