20060530–0602 集中講義（数学特別講義 C）

楠岡　成雄　氏　（東大・数理）

リスク尺度入門

内容：　ファイナンス・アクチュアリーに関連して，リスク管理の重要性が金融機関において認識され，リスクの計量化が行われるようになった．その重要な道具としてリスク尺度という概念が近年あらわれた．リスク尺度とは何か，その基本性質などの初歩的な事項について概説する．リスク尺度は本来，一般的な確率空間で定義されるが，その場合の取り扱いには，関数解析・確率解析のかなりの知識が必要となるので，議論は主に有限集合のなす確率空間で行う．

予備知識：確率論の基礎，凸集合

0　序（背景にあることのお話）

ファイナンスでは盛んにやられているが，数学では東大でしかやってないだろう．最初の 3 日は確率論の初歩の知識があれば十分．

ファイナンスはリスク管理の学問になりつつある．　アメリカでも 1960 年代までは，銀行預金や生命保険が倒産で消えないように，強い規制があった．その後考えが変わって，アメリカでも銀行倒産，日本でも生保会社の数が減るなどした．また，為替が固定相場だった時代には（そのほうが正しいという人もいるが）もう戻らないだろう．

一方，銀行預金がばくちになっても困る．規制緩和ではあるが，条件付き，すなわち監視は行う．（実際は別件逮捕でもして，書類を見ないと難しいが，報告書をどんどん出させるなどの方法で．）

例．国際化で連鎖の影響が大きいので，国際決済する銀行には Basel II という取り決め．（たとえば自己資本率 8% は Basel I）．保険会社には国際アクチュアリー基準．

リスク管理．　・　リスク分類．

- 市場リスク（株を持っているとき，株価が下がって資産が減った場合など）
- 信用リスク
- オペレーショナルリスク（取引の個数や，単価を大きく間違える場合，特に電子的手段によって被害が迅速・多大な場合）

・　リスクの計量化

監督官庁にはうまい基準がない．失敗した場合のリスクを監督官庁が負うことになるので，計量化の指定を諦めて，手法を届けさせる考え方になっている．監視は手法が合理的かどうかだけをチェックする．

ここの考え方を講義していきたい．

1　不確実性下の意思決定

起きうる状態 $S_1, \cdots, S_n$，　$S = \{S_1, \cdots, S_n\}$

取ることのできる行動 $a_1, \cdots, a_m$，　$A = \{a_1, \cdots, a_n\}$

　イメージ：雨が降るかもしれない S_1 から傘を持っていく a_1

利得関数 v： $S \times A \to \mathbb{R}$；

a_k という行動を選んだところ S_i という状態が起きたら $v(S_i, a_k)$ 円もらえる

S のどれが起きるか不確実なときの代表的な考え方：

(i) Laplace の決定基準.

同様に確からしい． $v_L(a) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v(S_i, a)$ を最大にする行動を選ぶ.

(ii) Wald の決定基準.

$v_w(a) = \displaystyle\min_{s \in S} v(s, a)$ を最大にする.

(iii) Hurwitz の決定基準.

$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を一つ決めて，$v_H(a) = \alpha \displaystyle\max_{s \in S} v(s, a) + (1 - \alpha) \min_{s \in S} v(s, a)$ を最大にする.

(iv) Savage の決定基準.

機会損失 $w(s, a) = \displaystyle\max_{a' \in A} v(s, a') - v(s, a)$.

雨が降ると思って少ししか弁当を作らなかったところ，晴れてしまってあっという間に売り切れた．もう少し作っていたらもっと儲かったのに.

$w_S(a) = \max_{s \in S} w(s, a)$ を最小にする.

(v) 期待効用

単調増加関数（効用関数）u：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ を満たす $p_i \geqq 0, i = 1, \cdots, n$ （主観確率）に対して，$\tilde{u}(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i u(v(s, a))$ を最大にする．von-Neumann – Morgastein が本で言い出した．Savage が合理的人の行動に関する公理を立ててそこから u の存在を導いた.

相対基準と絶対基準．

$n = 3$ での例

	S_1	S_2	S_3
a_1	1	2	1
a_2	2	1	1
a_3	3	-2	-2
a_4	-2	3	-2

機会損失基準では，$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ のとき a_2 が選ばれる．$A' = \{a_1, a_2, a_4\}$ のとき a_1 が選ばれる．すなわち，選ばれることのない対案が a_3, a_4 のいずれであるかで，選ばれるものが変わる（相対基準）．これに対して他の決定基準は絶対基準.

人間の嗜好は相対基準の要素があるが，以下では絶対基準を考える.

選好．

$\mathbb{R}^S = \{v：S \to \mathbb{R}\}$ の上に全順序関係（選好）を入れる．以下を満たす関係 $\leqq, \sim$ が決まっているとする.

(i) 任意の $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^S$ に対して $v_1 \leqq v_2$ または $v_2 \leqq v_1$ のいずれかが成り立つ.

(ii) $v_1 \leqq v_2,\ v_2 \leqq v_3$ ならば $v_1 \leqq v_3$

(iii) $v_1 \leqq v_2,\ v_2 \leqq v_1$ ならば $v_1 \sim v_2$，かつ，$\sim$ は同値関係

(iv) $v_1(s) < v_2(s), \forall s \in S$ ならば $v_1 \leqq v_2$ であって $v_2 \leqq v_1$ ではない

(v) $v \sim v$

(vi) $v_1(s) \leqq v_2(s),\ s \in S,$ ならば $v_1 \leqq v_2$

このとき，$v(\cdot, a),\ a \in A$ の中で $\leqq$ について最大のものがある.（順に比べていけばよい.）

$1 \in \mathbb{R}^S$ を $1(s) = 1, \forall s \in S$ で定義.

$v \in \mathbb{R}^S$ を一つ fix し，$I_u = \{x \in \mathbb{R} \mid v - x1 \leqq 01\}$ とおくと

(i) $x_1 \in I_u,\ x_1 \leqq x_2$ ならば $x_2 \in I_u$

(ii) $x = \max_{s\in S} v(s)$ ならば $x \in I_u$ なので I_u は空でない
(iii) $x = \min_{s\in S} v(s) - 1$ ならば $x \notin I_u$ なので $I_u \neq \mathbb{R}$

よって I_u は下に有界な区間.
$I_\ell = \{x \in \mathbb{R} \mid 01 \leqq v - x1\}$ とおくと，同様に,

(i) $x_1 \in I_\ell$, $x_2 \leqq x_1$ ならば $x_2 \in I_\ell$
(ii) I_ℓ は空でない
(iii) $I_\ell \neq \mathbb{R}$

・ $I_\ell \cap I_u$ の元は高々一つ.
なぜなら x_1, x_2 とあって $x_1 < x_2$ とすると $01 \leqq v - x_1 1 \leqq 01 \leqq v - x_2 1 \leqq 01$ となって矛盾する.
・ $I_\ell \cup I_u = \mathbb{R}$
以上から

レポート問題１. $-\infty < \sup I_\ell = \inf I_u < \infty$ を示せ.

$\phi(v) := \sup I_\ell = \inf I_u$
命題 1.1. $\leqq, \sim$ が上に掲げた性質を満たすならば,
$\exists\phi:\ \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$; $(\forall a > 0)\ v - (\phi(v) + a)1 \leqq 01 \leqq v - (\phi(v) - a)1$.
逆にこの性質で $\phi(v)$ は特徴づけられる.

ϕ の性質.

(i) $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^S$, $v_1(s) \leqq v_2(s)$, $s \in S$ ならば $\phi(v_1) \leqq \phi(v_2)$
(ii) $v \in \mathbb{R}^S$, $x \in \mathbb{R}$, $\phi(v + x1) = \phi(v) + x$
(iii) $\phi(01) = 0$

レポート問題２. 以上を示せ.

ϕ とは何か. $v - \phi(v)1$ は**概ね**01 に近い.
ϕ の意味．会社が資産や負債を持っていて，経営して 1 年後の総資産価値（その実際の定義は議論の余地があるが）の現時点での判断を，状態 $s \in S$ ごとに値の決まる関数 $v \in \mathbb{R}^S$ と考える.（商品がヒットしたら価値は上がるし，ぽしゃったら下がる，その全体像が現時点での予想.）
バランスシート（貸借対照表，BS）

資産	負債
	資本

雑談： 会計学の原則では，資本から来る利益と営業から来る利益を混同してはいけない．ホリエモンのが粉飾かどうか問われるのは，自分の株を売ったお金を利益に計上した点.

会社が儲ければ資本が増える．縮んで資産が負債より小さくなると**債務超過**．本来は債務超過になると一瞬でアウト（倒産）.（日本では浪花節で待ってくれるが，アメリカでは GM ほど大きくても倒産．しかし，単に管財人が入ってくるだけで，債務が薄ければ立て直せる．もっとも，債務が大きいとゼネコンの例のように長谷工１社しか生き残れなかった.）防ぐには資本注入（誰かに資本家になってもらう＝借金ではない，借金では負債が増えるので債務超過のまま）．一方，リスクはあるが薄い可能性を怖がっていても経営はできない.
$01 \in \mathbb{R}^S$ は何もない状態（会社がない状態）

v は会社の状態．それをキャンセルして 01 に近い状態にする $-\phi(v)1$ は，まず一つの数値（要するにお金）$\phi(v)$ であって，それでほぼ何もない状態にするもの．つまり積むべき資本であって，それを**リスク**と呼ぶ.

以上を念頭にして，上記 ϕ の性質を満たす関数に対して $-\phi$ を一般に**リスク**と定義し，その逆 ϕ を MUF と呼ぶ（次節定義 2.1 参照）.（逆にするのはリスクの理論で符号を間違えやすいから.）

2 Monetary utility function (MUF)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$

Ω: シナリオの集合（先ほどの S に対応，これからは一般的に）

$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, $1 \leqq p \leqq \infty$

$X(\omega) = Y(\omega)$, a.s. のとき X と Y は区別できないとする．

定義 2.1. $\phi :\ L^\infty \to \mathbb{R}$ が MUF であるとは

(i) $X, Y \in L^\infty$, $X \leqq Y$, a.s. ならば $\phi(X) \leqq \phi(Y)$

(ii) $\phi(X + a) = \phi(X) + a$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $X \in L^\infty$

(iii) $\phi(0) = 0$

定義 2.2.

(i) MUF $\phi :\ L^\infty \to \mathbb{R}$ が concave とは，$\phi(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geqq \lambda\phi(X) + (1-\lambda)\phi(Y)$, $X, Y \in L^\infty$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$

(ii) MUF $\phi :\ L^\infty \to \mathbb{R}$ が positive homogeneous とは，$\phi(aX) = a\phi(X)$, $a > 0$, $X \in L^\infty$

(iii) MUF $\phi :\ L^\infty \to \mathbb{R}$ が Fatou property を持つとは，X, X_n, $n = 1, 2, \cdots, \in L^\infty$ かつ $X_n \downarrow X$, a.s. ならば $\phi(X_n) \to \phi(X)$ となること

(iv) MUF $\phi :\ L^\infty \to \mathbb{R}$ が law invariant とは，P の下での分布が等しい $X, Y \in L^\infty$ に対して必ず $\phi(X) = \phi(Y)$ となること

(v) MUF $\phi :\ L^\infty \to \mathbb{R}$ が comonotone とは，$(X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega')) \geqq 0$, $P(d\omega) \otimes P(d\omega')$ a.s., を満たす $X, Y \in L^\infty$ に対しては必ず $\phi(X + Y) = \phi(X) + \phi(Y)$ を満たすこと

Concave は technical な仮定と思うべき．Positive homogenious は a が 1 に近いならもっともらしいが，大きいと明らかに不合理．しかし，これもないと扱いづらい．Fatou property は全く technical. Law invariant は使い方による．生命保険で条件の同じ二人はリスクを等しくとるので law invariant.（Finance では事情が違う.）f が増加の時 $Y = f(X)$ ならば X と Y は事実上同じ対象．そのとき $\phi(X + f(X)) = \phi(X) + \phi(f(X))$ を要請するのが comonotone それが成り立つ関数もある．

Concave かつ positive homogeneous のとき coherent と呼ぶ．Artzner – Eber – Delbaen – Heath (1990 頃)．Concave などより早くから出ていた概念．$\phi(X) \geqq 0$ とはリスクが許容できる範囲内ということ．事業部 I, II ごとにリスクを管理する場合，事業部 I が $\phi(X) \geqq 0$，II が $\phi(Y) \geqq 0$ なのに $\phi(X + Y) \leqq 0$ だったら変だ．それが (positive homogeneous の条件下で) concave と同値．推奨者たちは，VaR と呼ばれる基準が coherent でないから，という理由で排斥して回り，日本以外の立派な会社では VaR を用いず CTE, CVaR を使うようになった．

雑談： カナダは若くてしがらみが無く，アクチュアリー会が大学と結託しているので先端的な考えが取り入れられる．一国の基準は村の論理（あいつがどうだから）だが 2 国以上では利害が調整できないので数学的（合理的）に見えるものが勝つ.（もちろん，提案国が有利なのを提案するのだが.）つまり数学で武装する必要がある．

変額保険の責任準備金を積むかどうか．積まなくていいと強く主張した会社があったが，積むことに決まったらあっという間に本国から準備金を積んできた．つまり，分かっていながら，あわよくば，という話はある．しかし，一般には数学の定理はこう，というと，みんなしゅんとしてしまう．

基本定理 (Delbaen, Föllmer, . . .). $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 確率空間，$\phi:\ L^\infty \to \mathbb{R}$ 写像．このとき次の 2 条件は同値

(i) ϕ は MUF, concave かつ Fatou property を持つ．
(ii) $\exists b:\ \mathcal{P} \to (-\infty, \infty]$;
  (a) $\inf\{b(Q) \mid Q \in \mathcal{P}\} = 0$ （$\phi(01) = 0$ のためだけに必要な非本質的条件）
  (b) $\phi(X) = \inf\{\mathrm{E}_Q[\ X\ ] + b(Q) \mid Q \in \mathcal{P}\}$

ここで $\mathcal{P}$ は P に絶対連続な $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度の全体．

証明は（ものすごく難しくはないが）関数解析の知識をかなり使うので省略する．

注意：ϕ_λ, $\lambda \in \Lambda$: MUF の族，が concave で Fatou ならば $\phi = \inf \phi_\lambda$ の MUF, concave, Fatou. 実際，$X \leqq Y$ ならば $\phi_\lambda(X) \leqq \phi_\lambda(Y)$ だから λ について inf をとると $\phi(X) \leqq \phi(Y)$，および，$\phi(X+c) = \inf_\lambda \phi_\lambda(X+c) = \cdots = \phi(X) + c$ だから MUF になる．Concavaty も同様に定義から．$X_n \downarrow X$ のとき $\forall \epsilon > 0\ \exists \lambda \in \Lambda;\ \phi(X) \geqq \phi_\lambda(X) - \epsilon$ から $\varliminf_{n\to\infty} \phi(X_n) \leqq \lim_{n\to\infty} \phi_\lambda(X_n) = \phi_\lambda(X) \leqq \phi(X) + \epsilon$ だから $\varliminf_{n\to\infty} \phi(X_n) \leqq \phi(X)$.

3 Skorohod representation

$\mathcal{L}$: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度全体

$1 \leqq p < \infty$ に対して $\mathcal{L}_p = \{\mu \in \mathcal{L} \mid \int_{\mathbb{R}} |x|^p \mu(dx) < \infty\}$

$\mathcal{L}_\infty = \{\mu \in \mathcal{L} \mid \exists M > 0; \mu([-M, M]) = 1\}$

$\mu \in \mathcal{L}$ に対して $Z(x;\mu) := \inf\{z \in \mathbb{R} \mid \mu((-\infty, z]) > x\}$, $x \in [0,1)$ とおく．

定理 3.1. $\mu \in \mathcal{L}$ に対して

(i) $Z(\cdot;\mu):\ [0,1) \to [-\infty, \infty)$ は非減少右連続．
(ii) $Z(\cdot;\mu)$ を確率空間 $([0,1), \mathcal{B}([0,1)),$ Lebesgue 測度$)$ の上の確率変数とみなすと，その分布は μ である．

証明． 前半．非減少は明らか．$x_n \downarrow x \in (0,1)$ とする．$Z(x;\mu) \in \mathbb{R}$ に対して $z_m = Z(x;\mu) + 1/m$ とおく．

$\mu((-\infty, z_m]) > x$ だから $\exists m;\ \mu((-\infty, z_m]) > x_n$．よって $\lim_{n\to\infty} Z(x_n;\mu) \leqq Z(x;\mu) + 1/m$ で OK.

後半．$z \in \mathbb{R}$ に対して $A_z = \{x \in (0,1) \mid Z(x;\mu) \leqq z\}$ とおく．このとき $x \in A_z$ ならば $Z(x;\mu) \leqq z$ なので $\mu((-\infty, z+1/m]) \geqq x$ だから $\mu((-\infty, z]) \geqq x$．よって $A_z \subset (0, \mu((-\infty, z])]$.

他方，$x < \mu((-\infty, z)) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, z - 1/n])$．これからある n が存在して $x < \mu((-\infty, z - 1/n])$ だから $Z(x;\mu) \leqq z - 1/n$，従って $x \in A_z$．よって $(0, \mu((-\infty, z))) \subset A_z$.

以上から $\mu((-\infty, z)) \leqq |A_z| \leqq \mu((-\infty, z])$.

$L = \{z \in \mathbb{R} \mid \mu(\{z\}) > 0\}$ とおく．L は高々可算で $z \in \mathbb{R} \setminus L$ ならば $|A_z| = \mu((-\infty, z])$

$z \in \mathbb{R}$ に対して $z_n \in \mathbb{R} \setminus L$, $z_n \downarrow z$ ととると $A_z = \{x \in (0,1] \mid Z(x;\mu) \leqq z\}$ について $A_{z_n} \supset A_z$ で $A_{z_n} \downarrow A_z$．よって，$|A_z| = \lim_{n\to\infty} |A_{z_n}| = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, z_n]) = \mu((-\infty, z])$．$|A_z| = \mathrm{P}[\ Z(\cdot;\mu) \leqq z\ ] = \mu((-\infty, z])$.

以上から $Z(\cdot;\mu)$ のルベーグ測度での分布は μ である． **（証明終わり）**

4 例

例 1 — **VaR.**

$0 < \alpha < 1$.

q_α： 統計学でいうα–**quantile**（100α–percentaile），すなわち，X の分布密度関数の $(-\infty, x]$ での積分が α に等しい x のこと．この素朴な定義は離散確率のとき多少困るので，q_α の数学的定義として $Z(\alpha;\mu)$ または $Z(\alpha-;\mu)$ を採用したい．$Z(\alpha;\mu) \neq Z(\alpha-;\mu)$ のとき q_α をどうするか？悩ましいが，ここでは簡単のため $q_\alpha = Z(\alpha;\mu)$ と決めよう．

レポート問題３． 以下を示せ．

$(\forall\epsilon > 0,\ 0 < \alpha < 1)\ \mu((-\infty, Z(\alpha;\mu)+\epsilon]) > \alpha,\ \mu((-\infty, Z(\alpha-;\mu)-\epsilon]) < \alpha.$

ϕ： $L^\infty \to \mathbb{R}$ を $X \in L^\infty$ に対して X の分布 μ_X とおくとき，$\phi(X) = Z(1-\alpha;\mu_X)$ で定義し，$VaR_\alpha(X) := -\phi(X)$ とおく．

$X \leqq Y$, a.s., ならば $\phi(X) \leqq \phi(Y)$ に注意.

レポート問題４． 以下を示せ．(1) $X, Y \in L^\infty$, $X \leqq Y$, a.s., ならば $Z(x;\mu_X) \leqq Z(x;\mu_Y)$, $x \in [0,1)$.

(2) $Z(x;\mu_{X+a}) = Z(x;\mu_X) + a$, $x \in [0,1)$

以上と $X = 0$ ならば μ_X が 0 に集中することから $Z(x;\mu_X) = 0$ となることと合わせて，ϕ は MUF であることが分かる．

レポート問題５． 以下を示せ．$X \in L^\infty$, f： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が増加右連続のとき

$Z(x;\mu_{X+f(X)}) = Z(x;\mu_X) + Z(x;\mu_{f(X)}) = Z(x;\mu_X) + f(Z(x;\mu_X))$

以上と $a > 0$, $X \in L^\infty$ ならば $Z(x;\mu_{aX}) = aZ(x;\mu_X)$ から，ϕ は MUF, law invarinant, pos. homog., comonotone （Fatou は α か $\alpha-$ のとき成立.）

ただし，concavity は $\phi(X+Y) \geqq \phi(X) + \phi(Y)$ が不成立なので不成立.

例： $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), Lebesgue)$, $\alpha = 95\%$

$X(\omega) = -100$ if $\omega \in [0, 0.04)$, $= 10$ if $\omega \in [0.04, 1)$

$Y(\omega) = -100$ if $\omega \in [0.04, 0.08)$, $= 10$ if otherwise

$(X+Y)(\omega) = -90$ if $\omega \in [0, 0.08)$, $= 20$ if otherwise

$1 - \alpha = 0.05$ で $Z(x;\mu_X)$ などを見ることで $\phi(X) = \phi(Y) = 10$，しかし，$\phi(X+Y) = -90$. すなわち，$VaR_{95\%}(X) = VaR_{95\%}(Y) = -10$，$VaR_{95\%}(X+Y) = 90$．個別にはリスク的に許容されるのに合わせると危険になる．

VaR を使うときは正規分布をイメージすることが多い．そのときは問題が無いかもしれないが，現実には負けると負けが込むところがあって，正規分布ではないかもしれない．

いずれにせよ，concavity がないことは問題になる．

例 2 — **期待効用．**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, u： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 狭義増加，連続

$\rho \in L^1$, $\rho > 0$, a.s., $\mathrm{E}[\,\rho\,] = 1$, $X \in L^\infty$

$g(t) = \mathrm{E}[\,\rho u(X-t)\,]$： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 連続，狭義減少.

このとき $\lim_{-t\to\infty} g(t) = u(\infty)$, $\lim_{t\to\infty} g(t) = u(-\infty)$ なので $\exists! t \in \mathbb{R};\ g(t) = u(0)$．この t を $\phi(X)$ とおく．

特徴付け．$\mathrm{E}[\,\rho u(X - \phi(X))\,] = u(0)$.

$X,Y\in L^\infty$, $X\leqq Y$ と $\mathrm{E}[\,\rho u(X)\,]\leqq\mathrm{E}[\,\rho u(Y)\,]$ が同値，$X\sim Y$ と $\mathrm{E}[\,\rho u(X)\,]=\mathrm{E}[\,\rho u(Y)\,]$ が同値，よって講義最初のほうの議論から ϕ は MUF．このとき $X-\phi(X)\sim 0$.

特に $\rho=1$ のとき $\mathrm{E}[\,u(X-t)\,]=\displaystyle\int u(x-t)\mu_X(dx)$ は law-invariant.

u が concave ならば，$\mathrm{E}[\,\rho u(\lambda X+(1-\lambda)Y-(\lambda\phi(X)+(1-\lambda)\phi(Y))\,]=u(0)$ よって ϕ は concave.

$\rho\in L^1$, $\rho>0$, $\mathrm{E}[\,\rho\,]=1$

特に，$u(x)=-e^{-\lambda x}$ のとき論文が一杯書けた（都合の良い性質がたくさんある）.

このとき $g(t)=-e^{\lambda t}\mathrm{E}[\,\rho\exp(-\lambda X)\,]$ なので $\phi(X)=-\dfrac{1}{\lambda}\log\mathrm{E}[\,\rho\exp(-\lambda X)\,]$

さらに $\rho=1$ のとき，よく文献に現れる.

アクチュアリー関係の論文でも使う人がいるが，$X,Y\in L^\infty$ が p の下で独立のとき $\phi(X+Y)=\phi(X)+\phi(Y)$ なので，独立な契約を一杯持ってきても全然安全性が良くならないことになり，保険に適用するのは不自然.

λ について展開することにより $\phi(X)=\mathrm{E}[\,X\,]-\dfrac{\lambda}{2}\mathrm{V}[\,X\,]+O(\lambda^2)$

例 3 — **TCE, CVaR, (Conditional short fall).**

Tail conditional expectation

$\alpha\in(0,1]$, $\mu\in\mathcal{L}_1$, $\eta_\alpha(\mu):=\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^\alpha Z(x;\mu)\,dx$.

$\mu\in\mathcal{L}$ に対しては $\eta_0(\mu):=Z(0;\mu)$.

$\alpha\in[0,1]$ に対して $\eta_\alpha:\ \mathcal{L}_\infty\to\mathbb{R}$ であって，$\mu\in\mathcal{L}_\infty$ に対して $\eta_\cdot(\mu):\ [0,1]\to\mathbb{R}$ は連続非減少

$(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$, $X\in L^\infty$ に対して $TCE_\alpha(X)=-\eta_{1-\alpha}(\mu_X)$.

$\phi(X)=\eta_\alpha(\mu_X):\ L^\infty\to\mathbb{R}$ とおくと，concave law invariant MUF である.

意味：　$\eta_\alpha(\mu_X)=\mathrm{E}[\,X\mid X\leqq q_\alpha\,]$ 特に，これは q_α 以下なので $VaR_\alpha(X)\leqq CVaR_\alpha(X)$.

ところで，何年か先の状況を見てこれらの指標を計算したとき，逐次情報が入って，途中でリスクが許容できなくなるとき，その可能性は VaR や CVaR のような単純な計算と変わってくる. →多期間指標が必要になる.

5　η_α の性質.

命題 5.1.　$(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 確率空間，$X:\ \Omega\to\mathbb{R}$ r.v.; $\mathrm{E}[\,|X|\,]<\infty$，$\alpha\in(0,1]$，とする．このとき

$\inf\{\mathrm{E}[\,\rho X\,]\mid\rho:\ \Omega\to\mathbb{R},\ r.v.,\ 0\leqq\rho\leqq 1,\mathrm{E}[\,\rho\,]=\alpha\}$

$=\inf\{\displaystyle\int_{\mathbb{R}}xf(x)\mu_X(dx)\mid f$ は Borel measurable, $0\leqq f\leqq 1,\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)\mu_X(dx)=\alpha\}$.

ここで μ_X は X の分布.

証明.

主張の左辺の中にある条件を満たす ρ をとる．$\sigma[X]$ 可測関数は X と Borel 可測関数の合成で書ける（難しくはないが Dynkin 族など議論を要する）ので，$h(X)=\mathrm{E}[\,\rho\mid\sigma[X]\,]$ となる Borel 可測な $h:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ をとる．$0\leqq h(X)\leqq 1$, a.s..

$f(x)=(0\vee h(x))\wedge 1$ とおくと，$0\leqq f(x)\leqq 1$ および $f(X)=h(X)$, a.s.

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)\mu_x(dx)=\mathrm{E}[\,f(X)\,]=\mathrm{E}[\,\mathrm{E}[\,\rho\mid\sigma[X]\,]\,]=\mathrm{E}[\,\rho\,]=\alpha$ および

$\mathrm{E}[\,X\rho\,]=\mathrm{E}[\,X\mathrm{E}[\,\rho\mid\sigma[X]\,]\,]=\mathrm{E}[\,Xf(X)\,]=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}xf(x)\mu_X(dx)$ から，主張の左辺≧右辺.

逆に主張の右辺の中にある条件を満たす f をとり，$\rho=f(X)$ とおくと，

$0\leqq\rho\leqq 1$, $\mathrm{E}[\,\rho\,]=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)\mu_X(dx)=\alpha$ および $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}xf(x)\mu_X(dx)=\mathrm{E}[\,Xf(X)\,]=\mathrm{E}[\,\rho X\,]$ から，主張の左辺≦右辺. **（証明終わり）**

定理 5.2. $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 確率空間，$X\in L^\infty$, $0\leqq\alpha\leqq 1$, ならば
$\eta_\alpha(\mu_X)=\inf\{\mathrm{E}[\,\rho X\,]\mid 0\leqq\rho\leqq\alpha^{-1},\ \mathrm{E}[\,\rho\,]=1\}$.

証明.

命題 5.1 と比べると右辺は
$\inf\{\int_{\mathbb{R}} xf(x)\mu_X(dx)\mid f$ は Borel measurable, $0\leqq f\leqq 1/\alpha,\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_X(dx)=1\}$ に等しい．一方 $Z(x;\mu_X)$, $x\in[0,1]$, の分布は μ_X なので再び命題 4.1 から右辺は
$\inf\{\int_{[0,1)}\rho(x)Z(x;\mu_X)dx\mid 0\leqq\rho\leqq 1/\alpha,\ \int_{[0,1)}\rho(x)dx=1\}$ にも等しい．積分範囲を α で分割することで

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1)}\rho(x)Z(x;\mu_X)dx\\
&=\int_0^\alpha\rho(x)Z(x;\mu_X)dx+\int_\alpha^1\rho(x)dxZ(\alpha;\mu_X)+\int_\alpha^1\rho(x)(Z(X;\mu_X)-Z(\alpha;\mu_X))dx\\
&\geqq\int_0^\alpha\rho(x)Z(x;\mu_X)dx+\int_\alpha^1\rho(x)dxZ(\alpha;\mu_X)\\
&=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha Z(x;\mu_X)dx-\int_0^\alpha(\alpha^{-1}-\rho(x))Z(x;\mu_X)dx\int_\alpha^1\rho(x)dxZ(\alpha;\mu_X).
\end{aligned}$$

ここで $\int_0^\alpha(\alpha^{-1}-\rho(x))dx=1-\int_0^\alpha\rho(x)dx=\int_\alpha^1\rho(x)dx$ を用いると

$$=\eta_\alpha(\mu_X)+\int_0^\alpha(\alpha^{-1}-\rho(x))(Z(\alpha;\mu_X)-Z(x;\mu_X))dx\geqq\eta_\alpha(\mu_X).$$

しかも $\rho(x)=\alpha^{-1}1_{[0,\alpha)}(x)$ を選べば，等号が実現することも分かる（枚数を指定されたら大きいお札から選ぶ論法）．**（証明終わり）**

$\phi(X):=\eta_\alpha(\mu_X)$ は，定理 5.2 の形から，concave, pos. homogenious, (choherent), MUF, Fatou を全て満たす (comonotone は，和の inf が inf の和でないので不成立）．さらに定理 5.2 で得られた形では見えないが，定義 $\eta_\alpha(\mu_X)=\dfrac{1}{\alpha}\int_0^\alpha Z(x;\mu_X)dx$ から law invariant.（歴史的に定理 5.2 で得られた形で定義されたが，それでは law invariance がわかりにくいので，楠岡がこの講義の $\eta_\alpha(\mu_X)$ の定義を見いだした.）

$([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ 上の prob. measure 全体を $\mathcal{M}_{[0,1]}$ とおく．

定理 5.3（基本定理の law invariant 版）. $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ non-atomic standard probability space ($\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])$, P はルベーグ測度と思って良い.）

写像 $\phi\colon\ L^\infty\to\mathbb{R}$ に対して次は同値.

(i) ϕ が MUF, concave, law invariant (Fatou はいらない)

(ii) $\emptyset\neq\exists\mathcal{A}\subset\mathcal{M}_{[0,1]}\times\mathbb{R}$;

(a) $\inf\{b\mid(m,b)\in\mathcal{A}\}=0$

(b) $\phi(X)=\inf\{\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_X)m(d\alpha)+b\mid(m,b)\in\mathcal{A}\}$, $X\in L^\infty$

最後の $\phi(X)$ の右辺が coherent MUF で concave であることは，η_α が coherent な MUF のとき $\int\eta_\alpha m(d\alpha)$ も coherent な MUF になることと convex combination で concavaty が保存することから問題ない．要点は全てがこれで書けること，つまり，law invariant なものがこの形に尽きるという点.

証明は少し長いが，やっておく．まず有限集合 $N\geqq 2$, $\Omega_N=\{1,2,\cdots,N\}$, の場合.

定理 5.4. 2^{Ω_N}: Ω_N の部分集合全体， P_N: $(\Omega_N,2^\Omega)$ 上の確率測度，$\mathrm{P}_N[\,A\,]=\sharp(A)/N$, のとき，写像 $\phi\colon\ L(\Omega_N)^\infty\to\mathbb{R}$ に対して次は同値.

(i) ϕ が MUF, concave, law invariant (Fatou はいらない)

(ii) $\emptyset \neq \exists \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{[0,1]} \times \mathbb{R}$;

(a) $\inf\{b \mid (m,b) \in \mathcal{A}\} = 0$

(b) $\phi(X) = \inf\{\int_{[0,1]} \eta_\alpha(\mu_X) m(d\alpha) + b \mid (m,b) \in \mathcal{A}\}$, $X \in L^\infty$

証明. 後者から前者を得ることは（上に注意したように）OK. 前者から後者を導く. ϕ が問題の条件を満たしているとする.

$\mathcal{A} = \{(m,b) \in \mathcal{M}_{[0,1]} \times \mathbb{R} \mid \phi(X) \leqq \int_{[0,1]} \eta_\alpha(\mu_X) m(d\alpha) + b,\ \forall X \in L^\infty\}$.

$\phi(X) \leqq \inf \int \cdots$ は当然なので逆の不等号を言う.

$\tilde{\mathcal{A}} = \{(a,b) \in L^\infty \times \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^N a(i)X(i) + b \geqq \phi(X),\ \forall X \in L^\infty\}$.

有限次元の凸解析で知られるように, $\phi\colon\ L^\infty \to \mathbb{R}$ concave のとき

$\phi(X) = \inf\{\sum_{i=1}^N a(i)X(i) + b \mid (a,b) \in \tilde{\mathcal{A}}\}$.

$(a,b) \in \tilde{\mathcal{A}}$ ということと $\phi(X) \leqq \sum_{i=1}^N a(i)X(i) + b$, $\forall X \in L^\infty$, が同値だが, ここで, Ω_N 上の permutation $\sigma\colon\ \{1, \cdots, N\} \to \{1, \cdots, N\}$ をとると, 分布は変わらないので,

$\phi(X \circ \sigma) = \phi(X) \leqq \sum_{i=1}^N a(i)X(\sigma(i)) + b = \sum_{i=1}^N a \circ \sigma^{-1}(i) X(i) + b$.

よって $(a,b) \in \tilde{\mathcal{A}}$ ならば $(a \circ \sigma, b) \in \tilde{\mathcal{A}}$. これが第 1 点.

次に $(a,b) \in \tilde{\mathcal{A}}$ に対して

$\phi(X)\phi(X+c) - c \leqq \sum_{i=1}^N a(i)(X(i)+c) + b - c = \sum_{i=1}^N a(i)X(i) + b + c(\sum_{i=1}^N a(i) - 1)$ となるので, $\sum_{i=1}^N a(i) = 1$ でなければならない.

次に, $i \in \Omega_N$ に対して $Y_i(\omega) = 1$ if $\omega = i$, $= 0$ otherwise とし, $\lambda > 0$ をとると,

$0 = \phi(0) \leqq \phi(\lambda Y_i) \leqq \sum_{j=1}^N a(j)\lambda Y_i(j) + b = \lambda a(i) + b$.

$a(i) < 0$ ならば λ を大きくしたとき不合理だから $a(i) \geqq 0$, $i = 1, \cdots, N$, でないといけない. つまり $\{a\}$ は確率である.

まとめ. $(a,b) \in \tilde{\mathcal{A}}$ ならば $a(i) \geqq 0$, $i = 1, \cdots, N$, $\sum_{i=1}^N a(i) = 1$, $(a \circ \sigma, b) \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\forall \sigma \in S_N$.

今, $(a,b) \in \tilde{\mathcal{A}}$, $X \in L^\infty$ を固定する. $\exists \sigma, \tau \in S_N$ を用いて $0 \leqq a(\sigma(N)) \leqq a(\sigma(N-1)) \leqq \cdots \leqq a(\sigma(1))$, および $X(\tau(1)) \leqq X(\tau(2)) \leqq \cdots \leqq X(\tau(N))$ と並べ替えることができる.

$Z(x;\mu_X) = \sum_{k=1}^N X(\tau(k)) 1_{[(k-1)/N, k/N)}(x)$, $X(\tau(k)) = N \int_{(k-1)/N}^{k/N} Z(x;\mu_X)\,dx$ に注意.

以下 $\tilde{a}(i) = a(\sigma(i))$ と書く.

$$\sum_{i=1}^N a(i)X(i) = \sum_{i=1}^N \tilde{a}(i)X(\sigma(i)) = \sum_{i=1}^N (\tilde{a}(N) + \tilde{a}(i) - \tilde{a}(N))X(\sigma(i))$$

$$= \tilde{a}(N) \sum_{i=1}^N X(\sigma(i)) + \sum_{i=1}^N (\sum_{j=i+1}^N (\tilde{a}(j-1) - \tilde{a}(j)))X(\sigma(i))$$

$$= \tilde{a}(N) \sum_{i=1}^N X(\tau(i)) + \sum_{j=2}^N (\sum_{i=1}^{j-1} X(\sigma(i)))(\tilde{a}(j-1) - \tilde{a}(j))$$

$$\geqq \tilde{a}(N)\sum_{i=1}^{N}X(\tau(i))+\sum_{j=2}^{N}(\sum_{i=1}^{j-1}X(\tau(i)))(\tilde{a}(j-1)-\tilde{a}(j))$$
（同じ個数加えるなら，小さい方から加えた方が小さい）
$$= a(\sigma(N))N\int_0^1 Z(x;\mu_X)dx+\sum_{j=2}^{N}N\int_0^{(j-1)/N}Z(x;\mu_X)dx(a(\sigma(j-1))-a(\sigma(j)))$$
$$= a(\sigma(N))N\eta_1(\mu_X)+\sum_{j=2}^{N}(a(\sigma(j-1))-a(\sigma(j)))(j-1)\eta_{(j-1)/N}(\mu_X)$$
$$= \int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_X)m_a(d\alpha);$$
$m_a(\{\frac{j-1}{N}\})=(a(\sigma(j-1))-a(\sigma(j)))(j-1)$, $m_a(\{1\})=a(\sigma(N))$.

特に，X が恒等的に 1 に等しいときから $1=\int_{[0,1]}m_a(d\alpha)$ を得るので，$m_a\in\mathcal{M}_{[0,1]}$.

また，$\sum_{i=1}^{N}a(i)X(\tau\circ\sigma^{-1}(i))=\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_X)m_a(d\alpha)$ つまり，特別な場合には上記の下限が実現する．よって

$$\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_X)m_a(d\alpha)=\min_{\xi\in S_N}\sum_{i=1}^{N}a(\xi(i))X(i).$$

よってさらに，$(a,b)\in\tilde{\mathcal{A}}$ ならば

$\phi(X)\leqq\min_{\xi\in S_N}(\sum_{i=1}^{N}a(\xi(i))X(i)+b)=\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_X)m_a(d\alpha)+b$ となるので，$(m_a,b)\in\mathcal{A}$.

以上より，$\forall X\in L^\infty$ $\phi(X)=\inf\{\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_X)m_a(d\alpha)+b\mid(m,a)\in\mathcal{A}\}$.

（定理 5.4 の証明終わり）

定理 5.3 の証明． $\mathcal{H}_n=\sigma\{[2^{-n}(k-1),2^{-n}k)\mid k=1,\cdots,2^n\}$

$\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2\subset\cdots\subset\mathcal{F}=\sigma\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$.

$\mathcal{A}_1\supset\cdots\supset\mathcal{A}$

$\mathcal{M}_{[0,1]}\subset C([0,1];\mathbb{R})^*(weak*topology)$; $\mathcal{M}_{[0,1]}$ は cpt metric space.

$(m,b)\in\mathcal{M}_{[0,1]}\times\mathbb{R}\mapsto\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_X)m(d\alpha)+b$.

各 $X\in L^\infty$ に対して $\mathcal{M}_{[0,1]}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は連続．X について共通部分をとることで，$\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n$ は closed set in $\mathcal{M}_{[0,1]}\times\mathbb{R}$.

Claim.

(i) $\mathcal{A}_\infty=\mathcal{A}$

(ii) $(\forall X\in L^\infty)\exists(m,b)\in\mathcal{A}$; $\phi(X)=\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_X)m(d\alpha)+b$

証明． (i). $X\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$, $Y(\omega)=Z(\omega;\mu_X)$, $\omega\in\Omega=[0,1)$, とおくと $\phi(X)=\phi(Y)$

$Y_n(\omega)=Z(2^{-n}k-;\mu_X)$, $(k-1)2^{-n}\leqq\omega\leqq k2^n$, $k=1,2,\cdots,2^n$, とおくと $Y_n\downarrow Y$,（Ω の各点収束）.

$(m,b)\in\mathcal{A}_\infty$ とすると $(m,b)\in\mathcal{A}_n$ $\forall n$.

$\phi(Y)\leqq\phi(Y_n)\leqq\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_{Y_n})m(d\alpha)+b$.

η_α は Fatou property を持つので $\eta_\alpha(\mu_{Y_n})\downarrow\eta_\alpha(\mu_Y)$

$n\to\infty$ とすれば $\phi(Y)\leqq\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_Y)m(d\alpha)+b$ となるので $(m,b)\in\mathcal{A}$.

(ii). $W\in L^\infty(\Omega_{2^n},2^{\Omega_{2^n}},\mathrm{P}_{2^n})$ に対して $\tilde{W}(\omega)=\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n}W(k)1_{[2^{-n}(k-1),2^{-n}k)}(\omega)$ とおくと，

$\tilde{W}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ で W と同分布.

$\phi_n(W)=\phi(\tilde{W})$ とおく． $\phi_n:\ L^\infty(\Omega_{2^n})\to\mathbb{R}$.

ϕ_n が law inv. concave MUF であることを確かめるのは容易.

$\phi_n(W)=\phi(\tilde{W})\leqq\displaystyle\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_W)m(d\alpha)+b$ と $(m,b)\in\mathcal{A}_n$ が同値.

$\forall W\in L^\infty(\Omega_{2^n})\exists(m,b)\in\mathcal{A}_n;\ \phi_n(W)=\displaystyle\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_W)m(d\alpha)+b.$

$\forall X\in L^\infty(\Omega,\mathcal{H}_n,\mathrm{P})\exists(m,b)\in\mathcal{A}_n;\ \phi(X)=\displaystyle\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_X)m(d\alpha)+b.$

$X\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$, $Y(\omega)=Z(\omega,\mu_X)$, $\omega\in\Omega$, とおく.

今度は次のように離散近似する．$\tilde{Y}_n(\omega)=Z(2^{-n}(k-1),\omega)$, $\omega\in[2^{-n}(k-1),2^{-n}k)$.

このとき，もし ω が Y の連続点ならば $\tilde{Y}_n(\omega)\uparrow Y(\omega)$.

$Z(x;\mu_{\tilde{Y}_n})=\tilde{Y}_n(x)$.

$\alpha\in(0,1)$ のとき $\eta_\alpha(\mu_{\tilde{Y}_n})=\alpha^{-1}\displaystyle\int_0^\alpha\tilde{Y}_n(\omega)d\omega\to\alpha^{-1}\int_0^\alpha Y(\omega)d\omega=\eta_\alpha(\mu_Y)$

$\alpha=0$ については $\eta_0(\tilde{Y}_n)=\eta_0(Y)$.

$\eta_\alpha(\mu_{\tilde{Y}_n})\uparrow\eta_\alpha(\mu_Y)$, $\forall\alpha\in[0,1]$. 有界閉区間で連続関数が連続関数に**単調に**各点収束すれば一様収束なので

$\eta_\alpha(\mu_{\tilde{Y}_n})\to\eta_\alpha(\mu_Y)$ が $\alpha\in[0,1]$ で一様.

$\tilde{Y}_n\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_n,\mathrm{P})$ なので，$\exists(m_n,b_n)\in\mathcal{A}_n;\ \phi(\tilde{Y}_n)=\displaystyle\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_{\tilde{Y}_n})m_n(d\alpha)+b_n$.

$\phi(\tilde{Y}_n+\left\|\tilde{Y}_n\right\|)\geqq 0$ および $\phi(\tilde{Y}_n-\left\|\tilde{Y}_n\right\|)\leqq 0$ だから $-\left\|\tilde{Y}_n\right\|_\infty\leqq\phi(\tilde{Y}_n)\leqq\left\|\tilde{Y}_\infty\right\|$.

他方，$\tilde{Y}$ は Y から作ったから $\left\|\tilde{Y}_n\right\|_\infty\leqq\|Y\|_\infty$.

よって $\left|\displaystyle\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_{\tilde{Y}_n})m(d\alpha)\right|\leqq\left\|\tilde{Y}_n\right\|_\infty\leqq\leqq\|Y_n\|_\infty$. よって $|b_n|\leqq 2\|Y\|_\infty$.

$\{b_n\}_{n=1}^\infty\subset[-2\|Y\|_\infty,2\|Y\|_\infty]$

$m_n\in\mathcal{M}_{[0,1]}$. ゆえに部分列 $\{n_k\}$ が存在して $m_{n_k}\to m\in\mathcal{M}_{[0,1]}$, $b_{n_k}\to b\in\mathbb{R}$.

$\phi(Y)\geqq\phi(\tilde{Y}_{n_k})=\displaystyle\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_{\tilde{Y}_{n_k}})m_{n_k}(d\alpha)+b_{n_k}\to\int_{[0,1]}\eta_\alpha(\mu_Y)m(d\alpha)+b$

$(m_{n_k},b_{n_k})\in\mathcal{A}_{n_k}$, $(m,b)\in\mathcal{A}_m$, $m\geqq 1$.

$(m,b)\in\mathcal{A}_\infty=\mathcal{A}$. **（Claim の証明終わり）**

Point は $\mathcal{M}_{[0,1]}$ が weakly compact という点．Law invariance を仮定すれば，このように凸解析の詳しいことを避けて，離散近似の極限という証明が可能になる．Delbaen たちの基本定理では law invariance を仮定していない．その場合には，一般には measure の集合が compact というのは簡単には言えないから，ここの証明方法はうまくいかない.（近似によらずに凸解析の大定理を使うことになる.）

定理. $\mu\in\mathcal{L}_1$, $0<\alpha\leqq 1$, に対して $f:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ を $f(a)=\displaystyle\int_0^1(Z(x;\mu)\wedge a)dx-(1-\alpha)a$ で定義するとき，$\displaystyle\sup_{a\in[0,1]}f(a)=\int_0^\alpha Z(x;\mu)dx$.

証明. $f(a)=\displaystyle\int_0^\alpha(Z(x;\mu)\wedge a)dx+\int_\alpha^1(Z(x;\mu)\wedge a-a)dx.$

後ろの項は負なので主張の左辺≦右辺であり，$a = Z(\alpha;\mu)$ とおくと $f(a)$ は主張の右辺に等しくなる．**（証明終わり）**

系． $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 確率空間， $X \in L^\infty$，$0 < \alpha \leqq 1$，に対して
$\eta_\alpha(\mu_X) = \sup\{\alpha^{-1}(\mathrm{E}[\ X \wedge a\ ] - (1-\alpha)a) \mid 0 \leqq a \leqq 1\}$.

★ $CVaR_\alpha(X) = -\eta_{1-\alpha}(\mu_X)$.

今の系から，CVaR は X の期待値で書けているので変動に対して比較的安定なのに対して，$VaR_\alpha(X) = q_\alpha$ は分布が q_α の付近で薄くなっているとき，小さな変化で大きく動く（悪い指標になる）可能性がある．

ただし，CVaR に限らず，α が小さい（感応度が 20 倍など）ところで使うので，2 桁の精度を出すのでも 5 桁の計算を要する．

定理． $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x\mu_1(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\mu_2(dx) = 0$ を満たす $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}_\in$ に対して，$0 < \alpha \leqq 1$ のとき

$$\alpha|\eta_\alpha(\mu_1) - \eta_\alpha(\mu_2)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\phi(\xi;\mu_1) - \phi(\xi;\mu_2)|\frac{d\xi}{\xi^2} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} |\phi(\xi;\mu_1) - \phi(\xi;\mu_2)|\frac{d\xi}{\xi^2} + \frac{2}{\pi R},$$
$\forall R > 0$.

ここで， $\phi(\xi;\mu) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\sqrt{-1}\xi x)\mu(dx)$ は μ の特性関数.

注：左側の評価は α が小さいと悪い（どうせ端のほうだから特性関数による評価がわるいのはしかたがない）.

$\phi(X) = \eta_\alpha(\mu_X)$, $0 < \alpha \leqq 1$. （たとえば，$\phi(X) = -\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{E}[\ \exp(-\lambda X)\ ]$.）

$X_1, X_2, \cdots$: 独立同分布； $\mathrm{E}[\ |X_1|^s\ ] < \infty$.

Coherence と positive homogeniety から.

$\phi(\sum_{i=1}^n X_i) = \phi(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathrm{E}[\ X_n\ ]) + n\mathrm{E}[\ X_n\ ]) = n\mathrm{E}[\ X_1\ ] + \sqrt{n}\phi(Y_n)$; $Y_n = n^{-1/2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathrm{E}[\ X_1\ ])$.

$\mathrm{V}[\ Y_n\ ] = \mathrm{V}[\ X_1\ ] = v$ だから，中心極限定理から Y_n の分布は $N(0, v)$ に収束する： $\phi(\xi;\mu_{Y_n}) \to e^{-v\xi^2/2}$.

さらに positive homogeniety を使うと $\phi(\sum_{i=1}^n X_i) = n\mathrm{E}[\ X_1\ ] + \sqrt{nv}\phi(N(0,1)) + R_n$, $R_n = o(\sqrt{n})$.
(剰余はもっと小さくできる：中心極限定理の精密化.)

右辺第 1 項：平均値の分 net premium（純保険料），第 2 項：安全割増.

X_i: 保険支払い，q: premium（保険加入料）に対して $-\phi(\sum_{i=1}^n X_i + nq) = -n(\mathrm{E}[\ X_1\ ] + q) - \sqrt{nv}C_\alpha + o(\sqrt{n})$

（$C_\alpha = \phi(N(0,1)) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-\infty}^{q_\alpha} xe^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} < 0$.）

$\mathrm{E}[\ X_1\ ] + q \geqq 0$ は必要だが $= 0$ ではリスクは消せていない．このリスク基準では保険料は net premium より $(-C_\alpha)\sqrt{v}/\sqrt{n}$ だけ最低限大きくないといけない．安全割増の必要性はアクチュアリーで長く分かっていたが，リスク解析で C_α の由来がわかるようになった.

MUF は定数は外に出せるので，平均 0 で考えるのが普通.

命題． $\alpha \in (0,1]$, $p \in [1,\infty)$ とする.

(i) $|\eta_\alpha(\nu)| \leqq \alpha^{-1/p}(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^p\nu(dx))^{1/p}$

(ii) $\nu \in \mathcal{L}_p$ が $\int_{\mathbb{R}} x\nu(dx) = 0$ ならば $|\eta_\alpha(\nu)| \leqq \dfrac{(1-\alpha)^{1-1/p}}{\alpha}(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^p\nu(dx))^{1/p}$

証明. 最初の主張．ヘルダーの不等式を用いれば

$|\eta_\alpha(\nu)| = \dfrac{1}{\alpha}\left|\int_0^\alpha X(x;\mu)dx\right| \leqq \dfrac{1}{\alpha}(\int_0^\alpha 1dx)^{1-1/p}(\int_0^\alpha |Z(x;\nu)|^p dx)^{1/p} \leqq \alpha^{-1/p}(\int_{\mathbb{R}} |x|^p \nu(dx))^{1/p}$

2 番目の主張. $\int_{\mathbb{R}} x\nu(dx) = \int_0^1 Z(x;\nu)dx = 0$ から，

$|\eta_\alpha(\nu)| = \alpha^{-1}|\int_0^\alpha Z(x;\nu)dx| = \alpha^{-1}|\int_\alpha^1 Z(x;\nu)dx|$

$\leqq (1-\alpha)^{1-1/p}\alpha^{-1}(\int_\alpha^1 |Z(x;\nu)|^p dx)^{1/p}(\int_{\mathbb{R}} |x|^p \nu(dx))^{1/p}$ **（証明終わり）**

α が小さいときは最初の式，1 に近いときは後の式が良い．

6 Hedging との関係．

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 確率空間，$\phi:\ L^\infty \to \mathbb{R}$ NUF, concave, Fatou とする．

$\tilde{\mathcal{A}} = \{(a,b) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R} \mid \phi(X) \leqq \mathrm{E}_Q[\ X\ ] + b,\ \forall X \in L^\infty\}$;

$\mathcal{P} = \{(\Omega, \mathcal{F})$ 上の P に絶対連続な確率測度全体 $\}$

昨日 $a(i)$ が確率といったが，その全体 $\tilde{\mathcal{A}}$ が $\mathcal{P}$.（有限集合では Fatou は当然.）

基本定理で $\phi(X) = \inf\{\mathrm{E}_Q[\ X\ ] + b \mid (Q,b) \in \tilde{\mathcal{A}}\}$, $C \subset L^\infty$ convex (closed) ..., $X \in L^\infty$, に対して，

$\sup_{\xi \in C} \phi(X+\xi) = \sup_{\xi \in C} \inf\{\mathrm{E}_Q[\ X+\xi\ ] + b \mid (Q,b) \in \tilde{\mathcal{A}}\} = \inf\{\sup_{\xi \in C}(\mathrm{E}_Q[\ X+\xi\ ] + b) \mid (Q,b) \in \tilde{\mathcal{A}}\}$

（梅沢）

Hedgeing. 1 期間（たとえば 10 年）モデルで資産が 1 期後に X になるとき $\phi(X) \geqq 0$ ならば健全と判断するということであった．負の時は資本を積みます必要．出資者は？思い入れのある成功者がいれば出すだろうが，うまい話がないとき．

無資産から市場を通じて構成できるポートフォリオの 1 期後の姿全体をベクトル空間 V （空売りなどをやることになるから，これ自体も理論上の話だが）とするとき，$\xi \in V$ を用いて X を $X + \xi$ とできる．$\phi(X) < 0$ でも $\phi(X+\xi) \geqq 0$ ならいいだろう．

問題は，リスク管理に hedging を許すか？

Case (I):

$(\forall (Q,b) \in \tilde{\mathcal{A}})\ \exists \xi \in V;\ \mathrm{E}_Q[\ \xi\ ] \neq 0$ とする．

V をベクトル空間としたので $\sup_{\xi \in V}(\mathrm{E}_Q[\ X+\xi\ ] + b) = \infty$ だから $\sup_{\xi \in V} \phi(X+\xi) = \infty$.

Case (II):

$\exists (\tilde{Q}, \tilde{b}) \in \tilde{\mathcal{A}}$; $(\forall \xi \in V)\ \mathrm{E}_{\tilde{Q}}[\ \xi\ ] = 0$ ならば，

$\sup_{\xi \in V} \phi(X+\xi) \leqq \sup_{\xi \in V}(\mathrm{E}_{\tilde{Q}}[\ X+\xi\ ] + \tilde{b}) = \mathrm{E}_{\tilde{Q}}[\ X\ ] + \tilde{b} < \infty$

無資産から構成できるポートフォリオの期待値が 0 になる確率 $\tilde{Q}$ をリスク中立確率，equivalent martingale measure (EMM) という．

Case I は変だ．そういうリスク尺度を考えてもよいが，その場合はリスク管理に hedging を考えてはいけないということ．

TCE 変額保険：生保では保険とは思っていない．かつてのとてつもない利回りの養老保険（売りまくってたいへんなことになった）に対して，変額保険は call option をくっつけて売っている．（日経平均がよければ満期返戻金がその分積み増し）．

説明のために単純化して，日経平均を Black–Sholes で書く：

$dS_t = S_t(\sigma dB_t + \mu dt)$

$S_0 = 1$: 現在値．金利 r 一定，$\mu > r$（risk premium）とする．

オプションを K 単位買ったとすると，$\max(-(KS_T \vee K)) + \tilde{K}e^{rT})$. $K = \tilde{K}$ としていいか（差額は手数料等）? 答えは $\mathrm{E}_Q[\ X\ ] = 0$ となる $\tilde{K}$ をとればよい．しかし⋯.

$CVaR_{1-\alpha}$ に対応する $\phi : L^\infty \to \mathbb{R}$ は η_α から決まる．これが

$\phi(X) = \inf\{\mathrm{E}[\ \rho X\ ] \mid 0 \leqq \rho \leqq \alpha^{-1},\ \mathrm{E}[\ \rho\ ] = 1\}$ となるのであった.

$\tilde{\mathcal{A}} = \{(Q, b) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R} \mid b \geqq 0,\ 0 \leqq \dfrac{dQ}{dP} \leqq \alpha^{-1}\}$

カナダはTCEを使って良いが，ヘッジをかけるなら監督官庁と相談しろ，となっている．その理由： EMM Q は一つに決まり，その Radon Nykodim 微分は $\dfrac{dQ}{dP} = \exp((\mu - r)B(T) - \dfrac{T}{2}(\mu - r)^2)$ となる．しかし，$(\tilde{Q}, b) \notin \tilde{\mathcal{A}}$，すなわち，case I になる．つまり，ヘッジをかけると，何でもありになってしまう.（非常に小さい確率で天文学的損失を出す方法で切り抜けることが，リスク基準から許容されてしまう.）

7 多期間リスク尺度.

ヘッジングの問題：途中で手を打って形を変えてしまえるところに問題.

生命保険はあまり売買（証券化）がない（せいぜい再保険）が，株だと途中で再評価の必要が出てくる．後者について law–invariant の仮定は悪い．生命保険でも実際が変わりその情報が入る.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 確率空間，$\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$ filtration（$\mathcal{F}$ の sub-σ-algebra，$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_N$）.

$X \in L^\infty$, $\mathcal{F}_N$–可測.（N:満期）

$N - 1$ 期に条件付き分布（それまでの経過が情報として入っている）が現れ，条件付きリスクが見えるはず．以下帰納的にさかのぼる.

どういう研究があるか？

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sub–σ–algebra

$\phi :\ L^\infty \to L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ が CMUF (conditional MUF) とは：

(i) $X \leqq Y$, a.s., $\phi(X) \leqq \phi(Y)$, a.s.
(ii) $Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mathrm{P})$, $X \in L^\infty$ に対して $\phi(X + Z) = \phi(X) + Z$
(iii) $\phi(0) = 0$

その他の概念も定義される.

Postive homogeniety: $Z \in L^\infty(\mathcal{G})$, $X \in L^\infty$, $Z \geqq 0$, a.s. ならば $\phi(ZX) = Z\phi(X)$.

concavaty: $Z \in L^\infty(\mathcal{G})$, $0 \leqq Z \leqq 1$, $X, Y \in L^\infty$ ならば $\phi(ZX + (1 - Z)Y) \geqq Z\phi(X) + (1 - Z)\phi(Y)$

Law invariance は難しいが，楠岡は少し違うアプローチを唱える．$\eta_m(\mu) := \displaystyle\int_{[0,1]} \eta_\alpha(\mu) m(d\alpha)$, $m \in \mathcal{M}_{[0,1]}$, $\mu \in \mathcal{L}_\infty$)

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ と $X \in L^\infty$ に対して

$\eta_m(X \mid \mathcal{G}) = \eta_m(\mathrm{P}[\ X \in dx \mid \mathcal{G}\ ]) \in L^\infty(\mathcal{G})$

Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$ と $X \in L^\infty$ に対して $\eta_m(X \mid \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N)$ を定義する.

$Z_{N+1} = X$, $Z_n = \eta_m(Z_{n-1} \mid \mathcal{F}_n)$, $n = N, \cdots, 0$,

$\eta_m(X \mid \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N) = Z_0$: $\mathcal{F}_0$–可測.

$\phi(X) = \eta_m(X \mid \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N)$ で $\phi :\ L^\infty \to \mathbb{R}$ を定義すると coherent, MUF, Fatou（Law -invariant なもので逐次作るが law-invariant にはならない．したがって，とくに，CVaR とは無縁のもの．かつて，coherent を宣伝していた人もこのごろ CVaR はまずいということになっているらしいのでどうなるかわからない．楠岡の提唱は hedge には相性がよい.）

抽象的に概念を定義することはここ 1 年くらいで終わるだろう．だいじなのはそれで何ができるか.

その先.

・連続版 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqq 0} \quad \leftarrow \quad \{\mathcal{F}_{2^{-k}kT}\}_{k=0}^{\infty}$ （楠岡ー森本）.

・ $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathrm{P}_1)$: アクチュアリー的，$(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathrm{P}_2)$: ファイナンス的，に対して変額保険などは $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mathrm{P}_1 \otimes \mathrm{P}_2)$ にある.

アクチュアリーはヘッジが効かないから law invariant は良いがファイナンスはそうではない. それらの「テンソル積」? 実務で使いやすいもの.