19980414–1209;
20050128;0206–10;
20080827–0907,09,11,13,16;
服部哲弥
v20080916;

測度論の練習問題（大学院入学試験問題）
5．収束定理 (2)

いくつかの用語の定義は，この問題集の第４章までの各章および各節の冒頭の用語の定義を参照.
いまさらだが，表題・分類や配置は暫定的な目安であって，学習上最適とは限らない.

概収束.

[**1**] (H1 東工大 8). Ω^N を $\Omega=[0,1]$ の N 個の直積空間とする. Ω のボレル集合族を定義域とするルベーグ測度を考え，その N 個の直積測度として得られる Ω^N 上の確率測度を $\mathrm{P}[\ \cdot\ ]$ と書く. そのとき次のことを示せ.

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{P}[\ \{(\omega_1,\cdots,\omega_N)\in\Omega^N \mid \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{\omega_i}^{-1/3}<100\}\ ]=1\,.$$

[**2**] (H9 大阪市大 D3). 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の実確率変数 X_n が $\mathrm{E}[\ |X_n|\ ]\le C$ （ただし C は n に無関係な定数）を満たしているとき,

$$\mathrm{P}[\ \lim_{n\to\infty}2^{-n/k}|X_n|=0\ \ (k=1,2,\cdots)\ ]=1$$

であることを示せ.

[**3**] (H1 名大 3). $\{f_n\}$, $n=1,2,3,\cdots$, は実変数実数値の可測可積分かつ非負な関数列で

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}f_n(x)\,dx=0$$

を満たす. このとき，ほとんど全ての $x\in\mathbf{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ と言えるか？

[**4**] (H1 大阪市大 D1). 実数値確率変数列 X_n, $n=1,2,\cdots$, について，以下の各々の条件の下で，確率 1 で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}X_n=0$ となることを証明せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}[\ |X_n|^2\ ]<\infty\,.$

(2) $\mathrm{E}[\ {X_n}^2\ ]\le\dfrac{1}{n}$ かつ $\mathrm{P}[\ |X_{n+1}-X_n|\le\dfrac{1}{n}\ ]=1$, $n=1,2,\cdots$.

[**5**] (H2 大阪市大 D2). 確率変数列 $\{X_n\}$, $n=1,2,3,\cdots$, に対して $\epsilon>0$ が存在して

$$\sup_{n\ge1}n^{1+\epsilon}\mathrm{E}[\ |X_n|\ ]<\infty$$

ならば,

$$(*)\qquad\qquad \mathrm{P}[\ \lim_{n\to\infty}X_n=0\ ]=1$$

となることを証明せよ．また， $\sup_{n\geq 1} n\mathrm{E}[\,|X_n|\,] < \infty$ を満たす確率変数列 $\{X_n\}$, $n=1,2,3,\cdots$, で (*) が成り立たない例を示せ．

L^p 収束．

[6] (H4 学習院大 6)． f, g, g_n, $n=1,2,3,\cdots$, は区間 $(0,1)$ で定義されたルベーグ可測関数で,

(i) $\int_0^1 |f(x)|^2\,dx < \infty$,
(ii) $|g_n(x)| \leq M$, $x \in (0,1)$, (M は定数),
(iii) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |g_n(x)-g(x)|^2\,dx = 0$,

を満たすものとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |(g_n(x)-g(x))\,f(x)|^2\,dx = 0$$

であることを証明せよ[1]．

[7] (H4 熊本大 1)． $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|^2\,dx = 1$ を満たす $\mathbf{R}$ 上の関数列とする．次の問に答えよ．

(1) $\mathbf{R}$ 上の任意の 2 乗可積分[2] 関数 g に対して $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の適当な部分列 $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ を選べば，極限 $\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f_{n_j}(x)\,g(x)\,dx$ が存在することを示せ．
(2) $\mathbf{R}$ 上の任意の 2 乗可積分関数 g に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,g(x)\,dx = 0$ となる $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例を挙げよ．

[8] (H2 熊本大 1)． $\{f_n\}$ を測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上の 2 乗可積分関数の列とし， $\sup_{n\geq 1}\int_{\Omega} |f_n|^2\,d\mu < \infty$ とする．このとき，任意の可測集合 $E \in \mathcal{F}$ に対して $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$ が存在するならば，Ω 上の任意の 2 乗可積分関数 g に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} f_n\,g\,d\mu$ が存在することを示せ．

[9] (S62 岡山大 B1)． $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を， $\mathbf{R}$ 上のルベーグ積分可能な関数列で $\lim_{n,m\to\infty}\int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = 0$ とすれば[3]， $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0$ を満たす関数 f が存在することを証明せよ．

[10] (S63 学習院大 7)． f, f_n $(n=1,2,3,\cdots)$ は $(0,1)$ 上で定義されたルベーグ可測な実数値関数であるとし，α は $\alpha<1$ を満たす実数とする．

(1) $f(x) \geq \log(x^{\alpha})$, $0<x<1$, ならば $\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx < \infty$ であることを示せ．
(2) $f_n(x) \geq \log(x^{\alpha})$, $0<x<1$, $n=1,2,3,\cdots$, かつ， $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |e^{-f_n(x)} - e^{-f(x)}|\,dx = 0$ であることを証明せよ．

---

[1] 結論の被積分関数が 2 乗ではなく 1 乗ならばシュワルツの不等式の問題だが，そうすると条件 (ii) が不要になるので，題意はシュワルツの不等式ではない．もっとも，仮定も結論も 2 乗ではなく 1 乗で書いても良いと思うので，2 乗で出題した意図は私には分からない．

[2] $\int_{\mathbf{R}} |g(x)|^2\,dx < \infty$ ということ．

[3] $\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geq N}\sup_{m\geq N} |X_{n,m}| = 0$ のことを $\lim_{n,m\to\infty} X_{n,m} = 0$ と書くらしい．

[11] (H5 広島大 6A). E がユークリッド空間 $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ のルベーグ可測集合で有限な測度をもつとき次を示せ.

(1) E に含まれる閉集合 F に対して $g_k(x) = \dfrac{1}{1 + k\,d(x,F)}$, $x \in E$, $k = 1, 2, \cdots$, とおくと

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |g_k(x) - \chi_F(x)|\,dx = 0$$

但し, $d(x,F)$ は x と F との距離.

(2) f が E 上のルベーグ可積分関数ならば $\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0$ を満たす E 上の連続関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する.

測度収束（確率収束）.

[12] (H7 熊本大 8). 確率変数列 X_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, の確率変数 X への 2 種類の収束を定義する：

確率収束： 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,|X_n - X| > \epsilon\,] = 0$.

概収束： $\mathrm{P}[\,\lim_{n\to\infty} |X_n - X| = 0\,] = 1$.

以下の問に答えよ.

(1) 確率変数列 $\{X_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,|X_n - X| > \dfrac{1}{n}\,] = 0$ を満たせば確率収束することを証明せよ.

(2) $\{X_n\}$ が概収束すれば確率収束することを証明せよ.

[13] (S60 山形大 9). $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間, f, f_1, f_2, $\cdots$, g, を, Ω のほとんどいたるところで有限な可測関数とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

のとき, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ と書く. 以下を示せ.

(1) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ かつ $f = g$, a.e., ならば $f_n \xrightarrow{\mu} g$ である.

(2) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ かつ $f_n \xrightarrow{\mu} g$ ならば $f = g$, a.e., である.

(3) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ となるための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\,d\mu(x) = 0$$

が成り立つことである.

(4) $f_n \to f$ $(n \to \infty)$, a.e., ならば $f_n \xrightarrow{\mu} f$ である.

[14] (H2 お茶大 1). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする. $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Ω 上で定義された $\mathcal{F}$–可測な実数値関数の列とする. このとき次の 2 つの条件は同値であることを示せ.

(i) $(\forall\epsilon > 0)\exists n_0;\ n \geq n_0$ なる n について $P(\{\omega \in \Omega \mid |f_n(\omega)| > \epsilon\}) < \epsilon$ が成り立つ.

(ii) $\lim_{n\to\infty}\displaystyle\int_\Omega \frac{|f_n|}{1 + |f_n|}\,dP = 0$.

[15] (H3 熊本大 1). f_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, f をそれぞれ有限測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の実数値可測関数とする. このとき, 次のことを示せ.

(1) 次の 2 つは同値である．

(a) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \, d\mu(x) = 0$.

(2) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, μ–a.e., ならば上の条件を満たす.

[16] (H7 岡山大 B1)．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を $\mu(\Omega) < \infty$ なる測度空間，$\{f_n\}_{n\geq 1}$ を Ω のほとんどいたるところで収束する関数列とする．このとき次の 3 つが同値であることを示せ.

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, μ–a.e..

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} \, d\mu(x) = 0$.

(iii) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x)| > \epsilon\}) = 0$.

[17] (H7 千葉大 8)．$\mathcal{X}$ を $[0, 1]$ 上有限値をとるルベーグ可測関数の集合とし， $f \in \mathcal{X}$ に対して $\|f\| = \int_0^1 \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|} \, dx$ とおく.

(1) $f_n \in \mathcal{X}$, $n = 1, 2, \cdots$, $f \in \mathcal{X}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, a.e., ならば $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ を示せ.

(2) 次の 2 つは同値であることを示せ.

(a) ルベーグ測度を μ と書くとき，どんな正数 δ に対しても $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in [0, 1] \mid |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

[18] (H6 広島大 6B)．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$\mu(\Omega) < \infty$ とする．関数 f, f_1, f_2, $\cdots$, は全て Ω 上の実数値可測関数とする．$\rho(f_n, f) = \int_\Omega \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \, d\mu(x)$ とおく．次を示せ.

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$ となるための必要十分条件は $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$ となることである.

(2) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, a.e., ならば，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$ が成り立つ.

[19] (H4 九大 6)．閉区間 $[0, 1]$ 上の非負ルベーグ可測関数の全体を $\mathcal{B}^+$ で表す．写像 $T : \mathcal{B}^+ \to \mathbf{R}$ を次式で定める： $T\,f = \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + f(x)} \, dx$. 以下の問に答えよ.

(1) μ で $[0, 1]$ 上のルベーグ測度を表す．任意の $f \in \mathcal{B}^+$ と $\epsilon > 0$ に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\mu(\{x \in [0, 1] \mid f(x) > \epsilon\}) \leq \frac{1 + \epsilon}{\epsilon} T\,f\,.$$

(2) $\{f_n\} \subset \mathcal{B}^+$ は次の 2 条件を満たすとする.

(a) $\lim_{n\to\infty} T\,f_n = 0$,

(b) 可積分関数 $\psi \in \mathcal{B}^+$ が存在し，全ての n について $f_n \leq \psi$ が成り立つ.

任意に $\epsilon > 0$ を固定し， $E(n) = \{x \in [0, 1] \mid f_n(x) > \epsilon\}$ とおく．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E(n)} f_n(x) \, dx = 0$$

となることを示せ.

(3) 上の 2 条件を満たす $\{f_n\} \subset \mathcal{B}^+$ をとる．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ となることを示せ.

[20] (H2 山形大 8)．$\mathcal{X}$ を閉区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数の全体とし，μ を $[0,1]$ 上のルベーグ測度とする．各 $f \in \mathcal{X}$ に対し，$\displaystyle\|f\| = \int_0^1 \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}\,d\mu(x)$ とおく．このとき，次のことを示せ.

(1) $\phi(x) = \dfrac{x}{1+x}$ は $x \geq 0$ で単調増加関数である.

(2) $f, g \in \mathcal{X}$ に対し $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ が成立する.

(3) $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$ かつ $f \in \mathcal{X}$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ となる必要十分条件は，任意の正数 ϵ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$ である.

(4) 実数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ が α に収束し，さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ ($\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$, $f \in \mathcal{X}$) ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|\alpha_n f_n - \alpha f\| = 0$ である.

[21] (H3 広島大 6)．$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $[0,1]$ 上の可測関数列で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, a.e., とする．任意の正数 α と自然数 n に対して $A_{\alpha,n} = \{x \in [0,1] \mid |f_n(x)| \geq \alpha\}$ とおく．次を示せ.

(1) $\displaystyle\mu(A_{\alpha,n}) \leq \frac{1+\alpha}{\alpha}\int_0^1 \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\,dx$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu(A_{\alpha,n}) = 0$．但し，$\mu$ はルベーグ測度を表す.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して

$$E \subset [0,1],\ \text{可測},\ \mu(E) < \delta,\ \Longrightarrow\ \sup_{n\geq 1}\int_E |f_n(x)|\,dx < \epsilon$$

が成り立つとする．このとき，ある $n_0 = n_0(\alpha)$ が存在して，$\displaystyle\sup_{n\geq n_0}\int_{A_{\alpha,n}} |f_n(x)|\,dx \leq \alpha$ かつ $\displaystyle\sup_{n\geq n_0}\int_{{A_{\alpha,n}}^c} |f_n(x)|\,dx \leq \alpha$ となる．但し，${A_{\alpha,n}}^c$ は $A_{\alpha,n}$ の補集合を表す.

[22] (S61 広島 9)．確率変数 X_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が平均 θ_n，分散 ${\sigma_n}^2$ を持つとき，次を示せ.

(1) 任意の $\epsilon > 0$ と実数 a に対して $\mathrm{P}[\,|X_n - a| \geq \epsilon\,] \leq \dfrac{1}{\epsilon^2}\mathrm{E}[\,(X_n - a)^2\,]$.

(2) θ_n, ${\sigma_n}^2$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n = \theta$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$, を満たすとき，$X_n$ は θ に確率収束する．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}[\,|X_n - \theta| \geq \epsilon\,] = 0$,.

(3) h が $x = \theta$ で連続な関数であるとき，(2) の仮定の下で $h(X_n)$ は $h(\theta)$ に確率収束する.

弱収束.

[23] (S63 都立大 6)．μ, μ_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, は，位相空間 Ω のボレル集合族 $\mathcal{B}$ 上の有限測度で，$\mu(\partial B) = 0$ (∂B は B の境界) となる全ての $B \in \mathcal{B}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu_n(B) = \mu(B)$ を満たしている．このとき，次のことを示せ.

(1) f を Ω 上の実数値連続関数とし，$A = \{t \in \mathbf{R} \mid \mu(f^{-1}(\{t\})) > 0\}$ とすると，

 (a) A は可算集合である.

 (b) $s, t \notin A$ ならば $\mu(\partial f^{-1}([s,t))) = 0$.

(2) f を Ω 上の実数値有界連続関数とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f\,d\mu_n = \int_\Omega f\,d\mu$.

[24] (H1 阪大 10). ϕ_n, $n = 1, 2, \cdots$, は $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分関数で $\phi_n(x) \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$, かつ $\int_{\mathbf{R}} \phi_n(x)\,dx = 1$ を満たすものとし， $\mathbf{R}$ 上の非負な可積分関数 ϕ が存在して，任意の $f \in C_0(\mathbf{R})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi_n(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi(x)\,dx$$

が成り立っているとする．但し， $C_0(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上の連続関数で有界な台を持つもの全てを要素とする集合を表す.

(1) $t > 0$ に対して $\sigma_n(t) = \int_{-t}^{t} \phi_n(x)\,dx$, $\sigma(t) = \int_{-t}^{t} \phi(x)\,dx$ とおくとき， $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(t) = \sigma(t)$, $t > 0$, を示せ.

(2) $\int_{\mathbf{R}} \phi(x)\,dx \leq 1$ を示し，さらに $\int_{\mathbf{R}} \phi(x)\,dx < 1$ となる ϕ_n, $n = 1, 2, \cdots$, の例を挙げよ.

(3) $\mu(t) = \inf_{n\geq 1} \sigma_n(t)$, $t > 0$, とおく．次の 2 つが同値であることを示せ：

(a) $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = 1$.

(b) $\int_{\mathbf{R}} \phi(x)\,dx = 1$.

[25] (H1 九大 5). $\{\mu_n\}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, を $\mathbf{R}$ 上の確率測度の列で，ある $p > 0$ で

$$\sup_{n\geq 1} \int_{\mathbf{R}} |x|^p\,d\mu_n(x) < \infty$$

を満たすものとする．p' を $0 < p' < p$ を満たす実数とする.

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\sup_{n\geq 1} \int_{\{x\in\mathbf{R}||x|\geq K\}} |x|^{p'}\,d\mu_n(x) < \epsilon$ を満たす正数 K が存在することを示せ.

(2) $\{\mu_n\}$ がある確率測度 μ に弱収束するとき， $\dfrac{f(x)}{1+|x|^{p'}}$ が有界となるような $\mathbf{R}$ 上の連続関数 f に対して

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f\,d\mu_n = \int_{\mathbf{R}} f\,d\mu$$

が成り立つことを示せ．但し， $\{\mu_n\}$ が μ に弱収束するとは，全ての有界連続関数 f に対して (*) が成立することである.

法則収束.

[26] (H9 東工大 7). 区間 $[0, 1]$ 上の実数値ボレル可測関数列 f_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, と実数値ボレル可測関数 f に関する条件

(*) $\mathbf{R}$ 上の全ての有界連続関数 F に対して $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 F(f_n(x))\,d\mu(x) = \int_0^1 F(f(x))\,d\mu(x)$,

を考える．ここで μ は $[0, 1]$ 上のルベーグ測度を表す.

(1) $f_n \to f$, $n \to \infty$, μ–a.e., ならば (*) が成り立つことを示せ.

(2) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,d\mu(x) = 0$ ならば (*) が成り立つことを示せ.

[27] (H8 神戸大 5). $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を確率空間， X_n, $n \geq 1$, X をそれぞれ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の実数値確率変数で， X_n は X に確率収束するものとする．このとき以下の問に答えよ.

(1) f を $\mathbf{R}$ 上の有界かつ一様連続な関数とするとき，

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, f(X_n)\,] = \mathrm{E}[\, f(X)\,]$$

を示せ．

(2) f が $\mathbf{R}$ 上の有界連続関数というだけでも (*) が成り立つことを示せ．

一様可積分性．

[28] (H3 新潟大 13)．確率変数列 X_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義され，ある定数 $\alpha > 1$ と $K > 0$ に対して $\mathrm{E}[\,|X_n|^\alpha\,] \le K$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, を満たすならば，X_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, は一様可積分であることを示せ．但し，X_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, が一様可積分であるとは

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\ge 1} \mathrm{E}[\,|X_n|\chi_{|X_n|\ge a}\,] = 0$$

が成り立つことである．

[29] (H9 千葉大 9)．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を確率空間，X, X_1, $X_2, \cdots$, をその上の確率変数，$\mathrm{E}[\,\cdot\,]$ を P に対する期待値とする．

(1) 定数 $p > 1$ に対して次を示せ．

$$\mathrm{P}[\,|X| \ge x\,] \le \frac{\mathrm{E}[\,|X|^p\,]}{x^p}, \quad (x > 0).$$

(2) 定数 $p > 1$ に対し，$\mathrm{E}[\,|X_n|^p\,] \le 1$, $(n = 1, 2, \cdots)$, ならば

$$(*) \qquad \lim_{a\to\infty} \sup_{n} \mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n| \ge a\,] = 0$$

を示せ．ただし，$\mathrm{E}[\,|X|;\ A\,] = \int_A |X(\omega)|\,\mathrm{P}(d\omega)$, $\quad A \in \mathcal{F}$, とする．

(3) (*) ならば $\sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|\,] < \infty$ を示せ．

[30] (S63 神戸大 5)．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．

(1) X, Y が非負かつ可積分な確率変数のとき $Z = \max\{X, Y\}$ とおく．このとき，任意の $a > 0$ に対して

$$\int_{\{Z>a\}} Z\,dP \le \int_{\{X>a\}} X\,dP + \int_{\{Y>a\}} Y\,dP$$

が成り立つことを示せ．また，$X_1, \cdots, X_n$ が非負かつ可積分のとき $Z = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ とおくとき[4]，上の式はどのように拡張されるか．

(2) $X_1, X_2, \cdots$, が可積分な確率変数で，条件

$$(A) \qquad \lim_{a\to\infty} \sup_{n\ge 1} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n|\,dP = 0$$

を満たすならば，$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{n} \max_{1\le m\le n} |X_m|\,dP = 0$ が成り立つことを証明せよ．

[4] 原文は min となっているが，max の誤植と判断した．

[31] (H4 奈良女大 V). $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Ω 上で定義された $\mathcal{F}$–可測関数の列とし, $E_n(a) = \{x \in \Omega \mid |f_n(x)| \geq a\}$ とおく. $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{E_n(a)} |f_n|\, d\mu = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, a.e.–$x \in \Omega$, ならば $\displaystyle\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$ であることを示せ.

[32] (H7 千葉大 9). 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数列 X_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, が次の条件 (*) を満たすときこの確率変数列は一様可積分であるという：

$$(*) \qquad \lim_{a\to\infty} \sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n| \geq a\,] = 0\,.$$

ただし, $\mathrm{E}[\,|X|;\ A\,] = \displaystyle\int_A |X(\omega)|\, P(d\omega)$, $A \in \mathcal{F}$, とする. (*) は, 次の条件 (**) と必要十分であることを示せ：

$$(**) \qquad \begin{cases} \sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|\,] < \infty, \\ (\forall\epsilon > 0)\ \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0;\ (\forall\Lambda \in \mathcal{F})\ P(\Lambda) < \delta \ \Rightarrow\ \mathrm{E}[\,|X_n|;\ \Lambda\,] < \epsilon,\ n = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

[33] (S62 阪大 8). $[0, \infty)$ 上の非負値連続関数 ϕ が $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\phi(t) = \infty$ を満たすとする.

(1) $[0, 1]$ 上の非負ルベーグ可測関数列 $\{f_n\}_{n=1,2,3,\cdots}$ が $\displaystyle\sup_{n\geq 1} \int_0^1 \phi(f_n(x))\, dx < \infty$ を満たすとする. このとき, $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \sup_{n\geq 1} \int_{\{f_n > a\}} f_n(x)\, dx = 0$ が成り立つことを示せ. 但し, $\{f_n > a\} = \{x \in [0, 1] \mid f_n(x) > a\}$ である.

(2) さらに $\{f_n\}$ が $n \to \infty$ のとき $[0, 1]$ 上はほとんどいたるところ 0 に収束するとする. このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$ が成り立つことを示せ.

[34] (S62 名大 5). μ を $\mathbf{R}$ 上の有界測度[5] とし, f_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, および f は $\mathbf{R}$ 上で定義された実数値のボレル可測関数であって, 各点 $x \in \mathbf{R}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ とする. ある $\alpha > 1$ に対して $\displaystyle\sup_{n\geq 1} \int_{\mathbf{R}} |f_n|^\alpha\, d\mu < \infty$ とするとき, 次のことを示せ.

(1) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |f|^\alpha\, d\mu < \infty\,.$

(2) $\displaystyle\lim_{c\to\infty} \sup_{n\geq 1} \int_{\{x\in\mathbf{R} \mid |f_n(x)| > c\}} |f_n|\, d\mu = 0\,.$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n - f|\, d\mu = 0\,.$

[35] (H2 東工大 7). 区間 $[0, 1]$ 上の可測関数列 f_n, $n = 1, 2, \cdots$, と可積分関数 f に関して次の条件 (*) と $(**)$ を考える.

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0\,,$$

$$(**) \qquad \lim_{a\uparrow\infty} \sup_{n\geq 1} \int_{\{y\in[0,1] \mid |f_n(y)| \geq a\}} |f_n(x)|\, dx = 0\,.$$

(1) $f_n \to f$, a.e., $(n \to \infty)$ かつ (**) が成り立つならば (*) が成り立つことを示せ.

[5] 有限測度と同じ意味

(2) (*) から (**) が従うことを示せ.

[36] (H5 東工大 5). $L^1(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分関数全てを集めた集合とし, $\|f\| = \int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx$ と定義する. また, 可測集合 A に対して $|A| = \int_A dx$ と書く. f_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, f を $L^1(\mathbf{R})$ の元で $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ となるものとするとき, 以下を示せ.

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $|A_\epsilon| < \infty$ なる可測集合 A_ϵ があって, 全ての n に対して

$$\int_{A_\epsilon{}^c} |f_n|(x)\, dx < \epsilon$$

となる.

(2) n に関して一様に $\lim_{|E|\to 0} \int_E |f_n|(x)\, dx = 0$.

特性関数.

[37] (S60 九大 VII). $\mathcal{B}$ を 1 次元ボレル集合族とする. μ を $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率測度とするとき, 関数 $\phi(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}tx}\, d\mu(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の一様連続関数であることを示せ.

[38] (H2 東工大 13). 1 変数 x の関数 $f(x)$ と $x\,f(x)$ が共に $\mathbf{R}$ 上ルベーグ可積分で $\int_{\mathbf{R}} f(x)\, dx = 1$, $\int_{\mathbf{R}} x\,f(x)\, dx = 0$ とする. このとき $\hat{f}(y) = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}yx} f(x)\, dx$ とおくと $\lim_{n\to\infty} \hat{f}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1$ であることを示せ.

[39] (H5 阪大 8). f は $\mathbf{R}$ 上の非負値可測関数で

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)\, dx = 1, \quad \int_{\mathbf{R}} x f(x)\, dx = 0,$$

を満たすものとする. $t \in \mathbf{R}$ に対して $\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}tx} f(x)\, dx$ とおく.

(1) $\hat{f}(t)$ は t の関数として C^2 級であることを示し, $\epsilon(0) = 0$ を満たす連続関数 ϵ が存在して $\hat{f}(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \epsilon(t)\, t^2$ と表せることを証明せよ.

(2) 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \hat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-t^2/2}$ となることを示せ.

[40] (S60 熊本大 1). 次のことを示せ.

(1) ϕ を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ積分可能な非負値関数とする. $\mathbf{R^2}$ 上の関数 $f(x, y)$ が x に関してルベーグ積分可能かつ y に関して微分可能であり, $\mathbf{R^2}$ 上で f の y 偏導関数 f_y が $|f_y(x, y)| \le \phi(x)$ を満たすならば, $\int_{\mathbf{R}} f(x, y)\, dx$ は y に関して微分可能である.

(2) $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可測関数 g が自然数 n に対して

$$\int_{\mathbf{R}} (1 + |x|^n)|g(x)|\, dx < \infty$$

を満たすならば

$$h(y) = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}xy} g(x)\, dx$$

は $\mathbf{R}$ 上の n 回連続微分可能な関数である.

[41] (S61 神戸大 3).

(1) f が $[0,1]$ でルベーグ可測な非負値関数で $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ ならば，f は $[0,1]$ でほとんどいたるところ 0 に等しいことを証明せよ.

(2) $f \in L^2([0,1])$ に対して[6]，

$$F(\lambda) = \int_0^1 f(x)\sin\lambda x\,dx$$

とおくと，$F(\lambda)$ は λ の関数で $\displaystyle\lim_{|\lambda|\to\infty} F(\lambda) = 0$ が成り立つことを証明せよ.

[42] (S63 名大 7). X を実数値確率変数，$\phi(z) = \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1}zX}\,]$ $(z \in \mathbf{R})$ とするとき，次の 3 つの主張が同値であることを示せ.

(i) $\mathrm{P}[\, X \in \mathbf{Z}\,] = 1$ で 1 でない任意の正の整数 a に対して $\mathrm{P}[\, X \in a\,\mathbf{Z}\,] < 1$.
(ii) $\phi(2\pi) = 1$ で $0 < z < 2\pi$ において $\phi(z) \neq 1$.
(iii) $\phi(2\pi) = 1$ で $0 < z \leq \pi$ において $\phi(z) \neq 1$.

但し，$\mathbf{Z}$ は整数の全体，$a\,\mathbf{Z}$ は a の倍数全体とする.

[43] (H5 筑波大 7).

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{t}\sin t\,dt$ が存在することを示せ.
(2) 上の極限値を α とするとき次を示せ.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin n\,(y-x)}{y-x}\,dy = \begin{cases} \alpha, & x = 0, 1, \\ 0, & x < 0 \text{ または } x > 1, \\ 2\alpha, & 0 < x < 1\,. \end{cases}$

(b) ルベーグ可積分関数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left\{\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\frac{\sin n\,(y-x)}{y-x}\,dx\right\} dy = 2\alpha\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

ディラックのデルタ.

[44] (H8 大阪市大 D1). $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分関数 h が $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(x)\,dx = 1$ を満たすとき，任意の有界連続関数 f に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} n\,h(nx)\,f(x)\,dx = f(0)$ となることを証明せよ.

[45] (H4 金沢大 6). f は可積分関数で $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = 1$ を満たすものとする. $\mathbf{R}$ 上有界かつ一様連続な関数 g に対して

$$g_n(x) = n\int_{\mathbf{R}} g(x-y)\,f(ny)\,dy, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

とおく. このとき以下を示せ.

(1) 各 g_n は $\mathbf{R}$ 上有界かつ一様連続である.

[6] 一般に $p > 0$ に対して $f \in L^p([0,1])$ とは $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^p\,dx < \infty$ ということ. 但し，$L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ であって，この問題の主張は $f \in L^1([0,1])$ でも成り立つので，$f \in L^2([0,1])$ という仮定は本質的でない限定を含んでいる. もしかしたら問 (3) があったのを削除したのかもしれない.

(2) $n \to \infty$ のとき， g_n は $\mathbf{R}$ 上 g に一様収束する．

[46] (H6 阪大 8)．h を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分関数で $h(x) \geq 0,\ x \in \mathbf{R}$, および $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(x)\,dx = 1$ を満たすものとする．$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbf{R}$ 上の実数値ルベーグ可測関数の列で次を満たすものとする：任意の $a > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\{x||g_n(x)|>a\}} h(x)\,dx = 0$．このとき任意の有界連続関数 F に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} F(g_n(x))\,h(x)\,dx = F(0)$ が成り立つことを示せ．

補遺[7]．

[47] (H1 東大 10)．Ω は $\mathbf{R^n}$ 内の有界領域， u, v は Ω 上定義された実数値有界可測関数で次を満たすとする．

$$\int_{\Omega}(u(x))^k\,dx = \int_{\Omega}(v(x))^k\,dx \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

このとき，任意の実数 c に対して

$$\mu(\{x \in \Omega \mid u(x) > c\}) = \mu(\{x \in \Omega \mid v(x) > c\})$$

が成り立つことを示せ．ここで μ は $\mathbf{R^n}$ 上のルベーグ測度を表す．

[48] (H9 山形大 9)．$1 \leq p < \infty$ とする．$\mathbf{R}$ 上のルベーグ可測関数 $f(x)$ に対して，

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dm(x)\right)^{1/p}$$

（m はルベーグ測度）とおき，$L^p(\mathbf{R}) = \{f \mid \|f\|_p < \infty\}$ と定義する．また，$\mathbf{R}$ 上のルベーグ可測関数 f に対して

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\,g(y)\,dm(y)$$

とおく．このとき以下の問に答えよ．

(1) $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ ならば $f * g \in L^1(\mathbf{R})$ となることを示せ．
(2) $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ ならば $f * g = g * f$, $(f * g) * h = f * (g * h)$ となることを示せ．
(3) $f \in L^1(\mathbf{R})$, $g \in L^p(\mathbf{R})$ ならば，$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ となることを示せ．

[49] (S60 富山大 BV)．各 $n = 1, 2, \cdots$ に対し，関数 $f_n[0,1] \to \mathbf{R}$ が可測で $\displaystyle\int_0^1 {f_n}^2\,d\mu \leq 1$ ならば次の (1) と (2) が同値であることを証明せよ．但し μ はルベーグ測度とする．

(1) $\exists \epsilon > 0;\ \displaystyle\inf_{n\geq 1} \mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n|(x) > \epsilon\}) > 0$.
(2) $\displaystyle\inf_{n\geq 1}\int_0^1 |f_n|\,d\mu > 0$.

[50] (H1 奈良女大 I)．$(0,1)$ 上で有界な可測関数 f は，$\phi(0) = \phi(1) = 0$ を満たす $[0,1]$ 上で連続な関数 ϕ に対して常に $\displaystyle\int_0^1 f(x)\phi(x)\,dx = 0$ を満たすならば，ほとんどいたるところ 0 に等しいことを示せ．

[7] 以下は，解答例に取りかかる段になって，以前の分冊のほうが適当かもしれない，と気づいた問題．

[51] (H3 北大 13). 区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数 f で，条件 $\int_0^1 f(x)^2\,dx=1$ および $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ を満たすもの全てを要素とする集合を $\mathcal{X}$ とする．各自然数 $n\geq 1$ に対して $\mathcal{X}$ 上の実数値汎関数 Φ_n を $\Phi_n(f)=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ によって定義する．

(1) $M_n:=\sup_{f\in\mathcal{X}}\Phi_n(f)$ を求めよ．

(2) $M_n=\Phi_n(f_{\max})$ となる $f_{\max}\in\mathcal{X}$ は存在するか．