19980414–1209;1212;
20080817–19;22;24–28;0914;
服部哲弥
v20080914;

測度論の練習問題（大学院入学試験問題）
４．不定積分と密度

教科書に載っていない，この冊子固有の用語については，この問題集の第３分冊までの冒頭または各節冒頭の注を参照.

問題の収録範囲についての注． この問題集は，日本数学教育学会編「大学院修士課程入学試験問題集」に収録された S60(1985) 年度から H9(1997) 年度の問題のうち測度論に関する問題を抜き出して分類整理したものである.（別冊解答集は服部が勝手に作成したものである.）個々の問題文は原則として収録された問題文に従ったので表記は完全には統一していないが，極端にバラバラにならないようにするためにある程度記号や用語，文体を統一した．原文を残して脚注をつけた場合もある．変更か注釈かは原文を残すことの教育的効果に基づくが,（「教育的効果」は数学用語ではないので,）その判断は曖昧である.

収録範囲は，原則として出題意図が測度論にあるものに限り，意図が測度論以外の分野への応用にあるように思われるものは割愛した.

絶対連続性と不定積分.

[**1**] (H7 山形大 IX)．関数 f を $[0,\infty)$ 上の非負値ルベーグ可積分関数とし，$[0,\infty)$ 内のルベーグ可測集合 A に対して

$$m(A)=\int_A f(x)\,d\mu(x)$$

と定義する (μ はルベーグ測度)．この時，次の各問に答えよ.

(1) m は $[0,\infty)$ 上の測度となることを示せ.
(2) $F(x)=m([0,x])$ とするとき F は $[0,\infty)$ 上の連続関数であることを示せ.
(3) (2) で定義された関数 F は一様連続でもあることを示せ.

[**2**] (H2 山形大 7)．$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間，f を Ω 上で定義された積分可能な関数とする．このとき，任意の正数 ϵ に対して正数 δ を定めて，$\mu(E)<\delta,\,E\in\mathcal{F}$ のとき必ず $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu<\epsilon$ が成り立つようにできることを示せ.

[**3**] (H3 奈良女大 VIII)．$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間で $\mu(\Omega)=1$ とする．f を Ω 上で定義された実数値 $\mathcal{F}$–可測関数とする.

(1) $\mathcal{B}$ を１次元ボレル集合族とする．$E\in\mathcal{B}$ に対して $\nu(E)=\mu(f^{-1}(E))$ とおくと ν は $\mathcal{B}$ 上の測度であることを示せ．また，$F(x)=\nu((-\infty,x]),\,x\in\mathbf{R},$ とおくと F は $\mathbf{R}$ 上の単調非減少右連続関数であり，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}F(x)=1,$ を満たすことを示せ.
(2) $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|\,\mu(dx)<\infty$ とする．$A\in\mathcal{F}$ に対して $\displaystyle\Phi(A)=\int_A f(x)\,\mu(dx)$ とおく．このとき任意の $\epsilon>0$ に対して

$$A\in\mathcal{F},\ \mu(A)<\delta \implies |\Phi(A)|<\epsilon,$$

を満たす $\delta>0$ が存在することを示せ.

[4] (H1 金沢大 6). $x \in \mathbf{R}$ に集中した $\mathbf{R}$ 上のディラック測度を δ_x で表す．即ち $A \subset \mathbf{R}$ に対して $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$ 2つの測度 μ, ν に対して μ が ν に関し絶対連続であるとき $\mu \ll \nu$ と表すことにする．

(1) 全ての $x \in \mathbf{R}$ に対して $\delta_x \ll \nu$ となるような $\mathbf{R}$ 上の σ–有限ボレル測度 ν は存在しないことを示せ．
(2) (1) で ν の条件「σ–有限」を落とした場合はどうか．

[5] (S61 新潟大 2). m を，区間 $[0,1]$ 上の必ずしも正でない有限測度[1] とし，m に対して関数 μ を $\mu(x) = m([0,x])$ と定める．次の問に答えよ．

(1) μ は右連続であることを示せ．また，左連続とならない例を挙げよ．
(2) μ を $[0,1]$ 上連続とする．このとき，$[0,1]$ 上の連続関数 f について，不定積分 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)\,dm(y)$ は連続であることを示せ．

[6] (H5 北大 12). $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ を開区間 $(0,1)$ の可算部分集合として，

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{-n}|x - a_n|^{-1/2}, & x \neq a_n, \\ n, & x = a_n\,, \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

とおく．ここで a_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, は互いに異なる点である．

(1) f は $[0,1]$ でルベーグ積分可能であることを示せ．
(2) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$ とおく．ここで，dy はルベーグ測度を表す．各 $x = a_k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ で $F'(x)$ が存在しないことを示せ．

変動.

[7] (H4 阪大 8). 有限閉区間 $[a,b]$ でルベーグ積分可能な関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$[a,b]$ でルベーグ積分可能な正値関数 f が存在して

$$|f_n(x)| \leq f(x), \quad x \in [a,b], \ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

が成り立つとする．$x \in [a,b]$ に対して $F_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,dt$ とおく．$[a,b]$ 上の関数 F が存在して，各 $x \in [a,b]$ に対して $n \to \infty$ のとき $F_n(x)$ は $F(x)$ に収束するとする．以下を示せ．

(1) F_n は F に $[a,b]$ で一様に収束する．
(2) F は $[a,b]$ で絶対連続である．

[8] (H5 東工大 2). α を正の実数とし，区間 $[0,1]$ 上の関数 f_α を

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}\,, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

で定義する．

[1] 有界な加法的集合関数のこと．

(1) 区間 $[0,1]$ の分割 $\triangle$: $0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1$ に対して $V_\alpha[\triangle]=\sum_{\nu=1}^{n}|f_\alpha(a_\nu)-f_\alpha(a_{\nu-1})|$ とおき，また， $V_\alpha=\sup_{\triangle} V_\alpha[\triangle]$ とする．$V_\alpha<\infty$ であるとき $V_\alpha=\int_0^1|f'_\alpha(x)|\,dx$ を示せ．

(2) $V_\alpha<\infty$ となるような α の下限を求めよ．

距離空間としての可測集合族，符号付き測度の集合.

[9] (H3 東工大 8). $\mathcal{B}_{[0,1]}$ は区間 $[0,1]$ のボレル集合族とし，μ はその上のルベーグ測度とする．さらに，集合 A, B に対して $A\triangle B$ は対称差 $(A-B)\cup(B-A)$ を表すものとする[2] .

(1) $A,B\in\mathcal{B}_{[0,1]}$ に対し $\mu(A\triangle B)=0$ のとき $A\sim B$ と書くことにすれば '$\sim$' は同値関係であり，商 $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{[0,1]}/\sim$ には $d([A],[B])=\mu(A\triangle B)$ で定義される距離 d が入ることを示せ．但し，$[A]$ はボレル集合 A の同値類を表すものとする．

(2) 距離空間 $(\mathcal{B},d)$ は完備[3] であることを示せ．

(3) 距離空間 $(\mathcal{B},d)$ は可分であることを示せ．

[10] (H1 都立大 6). $\mathcal{B}$ を $\mathbf{R}$ のボレル集合族とし，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{B}$ 上で定義された加法的集合関数（符号付き測度） μ でその全変動 $\|\mu\|$ が有限なものの全体とする[4] .

(1) $\mu,\nu\in\mathcal{M}$ に対して $(\mu*\nu)(E)=\iint_{\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x+y\in E\}}d\mu(x)\,d\nu(y)$ $(E\in\mathcal{B})$ と定義する．このとき，$\mu*\nu\in\mathcal{M}$ を示せ．

(2) $\mu_n\in\mathcal{M}$, $n=1,2,\cdots$, が $\|\cdot\|$ で定義される距離に関してコーシー列をなすならば，ある $\mu\in\mathcal{M}$ が存在して $\lim_{n\to\infty}\|\mu_n-\mu\|=0$ となることを示せ．

(3) $\mu\in\mathcal{M}$ に対して $f(x)=\int e^{\sqrt{-1}\xi x}\,d\mu(\xi)$ とおくと， f は $\mathbf{R}$ 上一様連続かつ有界であることを示せ．

部分積分.

[11] (H5 岡山大 B1). 実数上の非負値可測関数 f は任意の有限区間 $[a,b]$ 上でルベーグ積分可能[5] ならば,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to\infty}x\int_x^\infty\frac{f(t)}{t^2}\,dt$$

が成り立つことを証明せよ．但し，両辺のうち少なくとも一方は存在するものとする．

積分変数の変換.

[12] (H7 東北大 9). $\mathcal{M},\mathcal{B}$ によりそれぞれ $(0,1]$ のルベーグ可測部分集合全体，ボレル可測部分集合全体のなす族を表し，μ を $(0,1]$ 上のルベーグ測度とする．F を $(0,1]$ から $(0,1]$ への写像でルベーグ可測とし，$\mathcal{B}$ 上の集合関数 m_F を

$$m_F(A)=\mu(F^{-1}(A)),\quad A\in\mathcal{B},$$

[2] 距離空間の視点からの基礎事項として，次の [10] (H1 都立大 6) とひとまとめにするのが自然と考えてここにおく．[9][10] とも変動や不定積分の問題ではなく，全分冊にわたって他の問題からやや孤立している感があるが， 本第 4 分冊の問題数が少ないことと，関数解析の教科書の最初にある基礎事項（たとえば，N. Dunford, T. Schwartz, Linear operators, Part I: General theory, Interscience, の III 章 7 節）なので，参考までにここに収録しておく．

[3] 距離空間としての完備性．測度空間の完備性とは無関係であることに注意．

[4] ca 空間（有限全変動な符号付き測度の集合）の基礎事項についての相互に無関係な 3 つの小問からなる問題．

[5] 問題文にルベーグ積分と書かれているので収録したが，ルベーグ積分の演習という点では関係が薄いかもしれない．

と定義する．ただしここで，$F^{-1}(A)=\{x\in(0,1]\mid F(x)\in A\}$ である．

(1) m_F が可測空間 $((0,1],\mathcal{B})$ 上の測度であることを証明せよ．
(2) $0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき $F(x)=\sqrt{x}$ とし，$\dfrac{1}{2}\le x\le 1$ の場合 $F(x)=1$ とする．このとき，$(0,1]$ から $[0,\infty)$ への連続関数 f に対して，

$$\int_{(0,1]} f(t)\,dm_F(t)=\frac{1}{2}f(1)+2\int_{(0,\frac{1}{\sqrt{2}})} f(t)t\,d\mu(t)$$

となることを証明せよ．

[13] (H4 大阪市大 D1)．測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ から $(\Omega',\mathcal{G},\nu)$ への写像 $t:\Omega\to\Omega'$ が次の 2 条件を満たすとする．

(i) 全ての $G\in\mathcal{G}$ に対して $t^{-1}(G)\in\mathcal{F}$，
(ii) 全ての $G\in\mathcal{G}$ に対して $\mu(t^{-1}(G))=\nu(G)$．

このとき Ω' 上の任意の非負実数値可測関数 f に対して $\displaystyle\int_{\Omega'} f(y)\,d\nu(y)=\int_{\Omega} f(t(x))\,d\mu(x)$ が成り立つことを示せ．

Radon-Nikodým の定理と条件付き期待値．

確率論関連の用語についてはこの問題集の第 2 章（可測関数と積分）の確率変数と期待値の節冒頭の用語定義も参照．

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の確率変数 X と $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族 $\mathcal{B}$ に対して条件付き期待値 $\mathrm{E}[\,X\mid\mathcal{B}\,]$ とは $(\Omega,\mathcal{B},P)$ 上の確率変数であって，任意の $B\in\mathcal{B}$ に対して $\mathrm{E}[\,X;B\,]=\mathrm{E}[\,\mathrm{E}[\,X\mid\mathcal{B}\,];B\,]$ を満たすものを言う．ここで，$\mathrm{E}[\,X;B\,]:=\displaystyle\int_B X\,dP$．

[14] (H4 東工大 1)．$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ は有限測度空間とし，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族とする．非負 $\mathcal{F}$–可測関数 f に対して，全ての $A\in\mathcal{A}$ に対して $\displaystyle\int_A f\,d\mu=\int_A g\,d\mu$ を満たす非負値 $\mathcal{A}$–可測関数 $g:\ \Omega\to\mathbf{R}_+$ が存在する[6] ための必要十分条件は $\nu(A)=\displaystyle\int_A f\,d\mu$ で定義される $\mathcal{A}$ 上の測度 ν が σ–有限測度となることであることを示せ．

[15] (H4 東女大 7)．$A_1,\cdots,A_n$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ の確率正の事象列とし，これらの事象列から生成される $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族を $\mathcal{B}$ で表す．この確率空間上の平均値有限な確率変数 X が与えられたとき，X の $\mathcal{B}$ による条件付き期待値 $\mathrm{E}[\,X\mid\mathcal{B}\,]$ は具体的にどのような確率変数となるか．

[6] 元の問題の文面では値として ∞ を許すかどうか明示がないようだが，題意からほとんどいたるところ有限でないといけないので，∞ を許さない文言にしておく．