d 次元ガスケット上の自己回避経路のくりこみ群解析

服 部 哲 弥　（東北大学大学院理学研究科）

0．序．

くりこみ群の数学的可能性ということについてはいろいろな模型で試してきた [34, 29, 30, 31, 32, 42, 37, 43, 6, 7, 17, 26] し，まだこれからも試したいし [20]，この先も新しい題材を求めるつもり [40] だが，ここでは d 次元ガスケット上の自己回避経路 (self-avoiding path) のくりこみ群による解析 [34, 27, 25, 39, 28, 41, 38] という，1 つの問題に絞って話をしたい．

背景にあるテーマは**無限自由度系の数学的解析手段としてのくりこみ群の可能性**である．くりこみ群は 20 世紀後半に理論物理学において分野横断的な大きなテーマとして活発に研究された．とりわけ平衡系統計力学における臨界現象と場の量子論の高エネルギーでの漸近的性質に関しては理論物理学として大きな成功を収めた [63]．前者は分子が多数集まってできた結晶の大きさ（スケール）の現象なのに対して，後者は分子を構成する原子のそのまた内部構造という極微のスケールの現象であることは特記に値する．全く別のスケールに属する，自然現象として無関係な両者が，くりこみ群の理論によって統一的に理解できることは，背後に普遍的な新しい数学があることを期待させ，たとえば連続極限による場の量子論の数学的構成という数理物理学の研究テーマに大きな道を開いた．

無限自由度の系を解析する手段としてのくりこみ群の可能性には数学的に大きな関心が寄せられたと思う．しかし，くりこみ群は，理論物理学的成功とは裏腹に，数学的解析となるとたちまち難しい話になる．たとえば隣接相互作用の Ising 模型や ϕ^4 模型のような，強磁性的な結晶の統計力学模型という，もっとも基礎的とされる模型においてすら，弱結合領域と呼ばれるガウス分布に極めて近い場合しか分かっていない [13, 15, 16, 19, 23]．隣接相互作用ではなく階層型 (hierarchical) と呼ばれる,「くりこみ群に向いた」フラクタル構造的な相互作用を与えたときにもう少し踏み込んだ問題についての知見が得られている [12, 14, 48, 49, 20, 44] が，数学としてのくりこみ群は，その存在自体が未解決のまま 21 世紀に持ち越されたと言うのが正しいだろう．

くりこみ群とは，**精度のスケール変換に対する系の応答を表現する力学系**である（もちろん数学的に存在が分かっていないから，この『定義』はまだ ill-defined である）．そのような数学に今世紀半ばまでに手が届くが，前世紀にはその数学的本質には達していなかった，というのが筆者の信じるところである [34, 35]．この認識の下に，くりこみ群に向いているという意味でできうる限りやさしい，し

かし既存の洗練された数学的手法が使えないという意味で未解決な模型において，くりこみ群の数学的可能性と数学的難しさの由来を探ろうというのが，d 次元ガスケット上の自己回避経路のくりこみ群解析の背景にある目的である.（このようなアプローチが王道であるという主張をするものではない．フラクタル上の確率過程論の研究の主流は既存の数学と調和して大発展を遂げたマルコフ過程の研究である．これに関しては，初期の文献の一部を挙げると [1, 2, 3, 4, 5, 8, 18, 45, 51, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 62] などがあり，その後の発展についてはたとえば [46, 50, 57] の参考文献等を参照いただきたい.）

理論物理学としての成功と数学としての困難が共存する理由を研究の過程で探してきた．たとえばくりこみ群の『定義』の冒頭の「精度のスケール変換」は筆者の造語である．単に「スケール変換」と書かれることが多いと感じるが，そこに系のダイナミクスが非自明に反映されることを強調する必要を感じた．また，この『定義』はパラメータ空間への翻訳がなぜ有効かが見えない．これについては，**適切な不変部分集合上のすなおな力学系によって記述することで，元の系の漸近的性質を調べる**と付け加えたい，と思うようになってきた.

次節で「精度のスケール変換」について，1 次元ランダムウォークの連続極限による 1 次元ブラウン運動の F. Knight による構成方法 [47] に即して説明する．次々節で d 次元ガスケットとその上の自己回避経路を定義し,「くりこみ群の軌道がすなおであれば自己回避経路の漸近的性質が分かる」という定理を述べる．最後の節でこのくりこみ群の流れの「すなおさ」の証明がくりこみ群の本質的な難しさの一つであることを，ある自己回避経路のくりこみ写像を一般化した写像の固定点の唯一存在に関する最近の結果 [38] を紹介することで示唆したい.

この節の最後に応用数学分科会でのこの講演の位置づけについて蛇足を加える.

数学の研究と自然現象の理解や社会活動との関わりを考えると，数学の自立的な発展の成果を人類の活動に応用する方向もあるし，逆に自然現象や社会活動の説明の過程で新しい数学的構造の抽出に成功して数学の深化・発展に寄与するという方向もあるだろう.「数学的解析手段としてのくりこみ群の可能性」は後者に属する．また，ここで扱う問題は論文や本として発表する他に 1998 年以来 10 年近く web でも公開してきた [36]．非力の及ぶ範囲であらゆる媒体を通して世に問うことで，才に秀でた数学者が気づいて完成してくれることを期待していたが，結局自分で研究を続けるしかなかった．くりこみ群は理論物理学という数学に近い分野からの問題発信であり，深い数学的内容があるという多くの数学者や数理物理学者の確信があったと思うが，そのような「数学向き」の題材においても数学と「応用」との研究上の距離は遠いように思える.

学際分野に研究人生を賭ける者は，両側の分野への貢献の内容について意識を持ち，また，分野の間には広い砂漠が広がることを覚悟する必要があると思う.

１．1**次元ブラウン運動のくりこみ群による構成．**

1次元ブラウン運動（ウィーナー過程）とは，適当な（十分広い）確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$上の確率変数（可測関数）の1パラメータ（時刻変数）の族$B(t):\ \Omega \to \mathbb{R}$, $t \geqq 0$, であって，任意の有限個の時刻列$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$に対して確率変数の組$\{B(t_{k+1}) - B(t_k) \mid k = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$が独立で，任意の$t > s$に対して確率変数$B(t) - B(s)$が平均0分散$t - s$の$t - s$だけで決まる分布に従い，各標本$\omega \in \Omega$について$t$の関数$t \mapsto B(t)(\omega)$として連続関数であるものを言うのであった．(最後の2条件から$B(t) - B(s)$の分布は正規分布$N(0, t-s)$に定まるが，以下では重要ではない．なお，この予稿（講演）を通じて，断らない限り，確率過程または確率連鎖と言うときは出発点を原点 $(B(0) = 0)$ とする．また，確率論の習慣で確率空間の変数（標本を指定する変数）ωは以下省略することがある.）

ブラウン運動$B(\cdot)$が整数点を通る時刻（確率変数）を$T_i^{(0)}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, とおく．ただし，同じ整数点を続けて通った場合は最初の1つのみ残す．つまり，$T_0^{(0)} = 0$とし，$i = 0, 1, 2, \cdots$に対して帰納的に

$$T_{i+1}^{(0)}(\omega) = \inf\{t > T_i^{(0)}(\omega) \mid B(t)(\omega) \in \mathbb{Z} \setminus \{B(T_i^{(0)}(\omega))(\omega)\}\}$$

によって定義する．ブラウン運動が連続なおかげで，時刻$T_i^{(0)}$でブラウン運動の位置をサンプリングしてそれを並べて得られる確率連鎖（確率変数の列）$W_i^{(0)} = B(T_i^{(0)})$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, が1歩ごとに必ず隣に移る$(|W_{i+1}^{(0)} - W_i^{(0)}| = 1)$．1次元ブラウン運動は確率1でいずれ際限なく遠くの点まで達するので，確率連鎖$W^{(0)}$は途中で止まることはなく，対称性から1歩ごとに左右の隣の点に確率1/2ずつで移り，ブラウン運動の増分の独立性から各1歩は過去の履歴によらない（マルコフ性）．つまり，$W^{(0)}$は単純ランダムウォークである．

ところで，整数点の代わりに半整数点$\dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$でサンプリングしても全く同じ議論が成り立ち，歩幅が1/2の単純ランダムウォーク$W^{(1)}$が得られる．しかも，B, $W^{(1)}$, $W^{(0)}$はサンプリングに関して整合的である．つまり，$T_{i+1}^{(0)}$の帰納的定義を

$$T_{i+1}^{(0)}(\omega) = \inf\{j > T_i^{(0)}(\omega) \mid W_j^{(1)}(\omega) \in \mathbb{Z} \setminus \{W^{(1)}_{T_i^{(0)}(\omega)}(\omega)\}\}$$

と書き換えても同値である．同様に，任意の非負整数nに対して歩幅2^{-n}の単純ランダムウォーク$W^{(n)}$とサンプリングの時刻（確率変数）列$\{T_i^{(n)}\}$が同様に得られて，それらの間に整合性がある．

確率測度（確率変数，今は確率連鎖）の列に整合性があると極限測度が構成できる（Kolomogorovの拡張定理）．この数学的呪文を紐解くと，歩幅の大きい（粗い）ランダムウォークに細かい構造（「ぎざぎざ」）を逐次加えて最終的に連続関数を標本に持つブラウン運動に至る（関数空間上の確率測度が定義できるように，逐次加える「ぎざぎざ」の確率を整合的に定められる）ということである．具体的に，歩幅2^{-n-1}の$W^{(n+1)}$からサンプリングして歩幅2^{-n}の$W^{(n)}$を得るとき，

切り捨てた構造（「ぎざぎざ」）は次のようになる．1 本の標本経路 $W^{(0)}_{\cdot}(\omega)$ の最初の 1 歩に注目して，対応するブラウン運動の時間幅 $[0, T^{(0)}_1(\omega)]$ の間に 1 段階細かい $W^{(1)}_{\cdot}(\omega)$ がどれだけ動いたかを考える．どちらでも同様なので仮に $W^{(0)}_1 = 1$ とすると，この期間について B は原点 0 以外の整数点を通らないから $W^{(1)}$ は，$\{0, \pm\frac{1}{2}\}$ を 0 回以上行ったり来たりしたのち最後に $0, 1/2, 1$ と 2 歩かけて 1 に達する．つまり，サンプリングの空間的精度を半分に粗くしたとき失われる情報は

$$w = \{0,\ [\pm\frac{1}{2},\ 0, \text{の 0 回以上のくり返し}],\ \frac{1}{2}, 1\}$$

という形の経路である．最初の 1 歩ではなく任意の i 歩目でも同様の結論を得るし，歩幅の細かさの尺度 n （これを**精度のスケール**と呼ぶことにする）を変えても同様の結論を得る．このギザギザは偶数歩になるが，$L = 2k + 2$ 歩の特定の形が生じる確率は 2^{-2k-1} である（ランダムウォークは 1 歩あたり確率 1/2 で左右どちらに行くか決まるので 2^{-2k-2} を得るが，$W^{(0)}_1 = 1$，つまり -1 より先に 1 に至る条件付けをしたので 2 倍する）．この確率に従って親玉のランダムウォークの各 1 歩を歩幅半分の細かいギザギザに置き換える，ということを帰納的に繰り返すと，整合条件から，極限測度を得る．

極限の標本経路はどうなるか？作り方から空間的には精度のスケール n を変えたときの誤差は n が大きくなると急速に小さくなるので，標本ごとに（ランダムウォークの 1 歩をたとえば線形内挿して時間について連続関数とすることで）連続関数の空間の列として一様収束が言える期待が生じる．もちろん，粗い経路の 1 歩を 2 歩以上の「ギザギザ」で置き換えるので，1 歩の時間を n とともに短くしなければいけない．速すぎると極限は一瞬で無限の彼方に飛び，遅すぎると動き出せないから，意味のある極限を得るための時間のスケールは系のダイナミクスから決まる．1 歩あたり 1 スケールあたり追加すべきギザギザの平均歩数は粗くしたとき失われる平均歩数に等しいから，上で与えた確率から

$$\sum_{k \geqq 0} (2k + 2) 2^k 2^{-2k-1} = 4$$

と決まる（$2k + 2$ 歩のギザギザは $\pm\frac{1}{2}$ の選び方が 2^k あることに注意）．平均よりはるかに長いギザギザもあることが心配だが，独立性から大数の法則のおかげで（詳しく言えば分枝過程の極限定理から）$t \mapsto W^{(n)}_{4^n t}(\omega)$ が（確率 1 で）収束する．

以上の，ブラウン運動のランダムウォークからの構成方法は [47] にさかのぼる．（精度のスケール変換は [47] によれば指導教授の W. Feller および H. Trotter からの伝授となっており，古くから数学で知られていたことが分かる．）

F. Knight 以降半世紀近く，精度のスケール変換によって新しい確率過程を発見・構成しようという発想は無かったようである．ブラウン運動が対称性があまりに良いため，精度のスケール変換の**パラメータ空間への投影**という視点が隠れ

ていたためではないかと疑う．このことを説明するために，上に与えた1スケールあたり1歩あたり追加するギザギザの歩数の母関数

$$\Phi(x) = \sum_{w} x^{L(w)} = \sum_{k \geqq 0} 2^k x^{2k+2} = \frac{x^2}{1-2x^2}$$

を考える．この問題に関しては仰々しすぎるが，Φ はパラメータ空間 $\mathbb{R}_+$ 上の力学系を定める．これが Knight の構成方法に対応する**くりこみ群**である．確率の情報を入れずに $2k+2$ 歩のギザギザが 2^k 本あるという「場合の数」の情報だけを用いたが，Φ の正の固定点 x_f $(\Phi(x_f) = x_f > 0)$ はただ一つ定まり $x_f = \dfrac{1}{2}$ となるので，パラメータ x をその周りで reparametrize することで，

$$\frac{\Phi(x_f e^t)}{\Phi(x_f)} = \sum_{k \geqq 0} 2^{-k-1} e^{(2k+2)t} = \mathrm{E}[\, e^{Lt} \,]$$

となって，単純ランダムウォークの確率に基づく歩数の分布の母関数になる．こうしてくりこみ群が対応する確率過程の全情報を持つことが分かる．

さて，$u \geqq 0$ に対して $\Phi_u(x) = \dfrac{x^2}{1-2u^2x^2}$ とおくと，単純ランダムウォークのくりこみ群は $u=1$ の場合であるが，一般の $u>0$ に対応して，全く同様の方法で連続極限をとることができて，極限確率過程はブラウン運動と同様にいくらでも細かいギザギザを持った連続確率過程になることが証明できる [17]「ギザギザ」の平均歩数（精度のスケールを1変えるときに要する平均歩数増大度）は，ブラウン運動のときの議論と見比べると，くりこみ群の固定点での微分 $\lambda_u = \Phi_u'(x_f)$ で与えられるので，$W^{(u,n)}_{\lambda_u^n t}$ の極限が存在することが分かる．極限確率過程のギザギザの度合いは時間スケールの取り方から自動的に決まる．極限 $B^{(u)}$ が存在するので $2B^{(u)}(t)$ と $B^{(u)}(\lambda t)$ の分布が等しいから，$\nu_u = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ とおくとき，t 時間後の典型的な変位が $x \approx t^{\nu_u}$ のように振る舞うことが予想できる．変位の指数 ν_u が u に関して連続になることに注意．ブラウン運動の $\nu_1 = 1/2$ はよく知られている．

この確率過程の族は $u=0$ のとき等速度直線運動，大げさに言うと1次元の自己回避過程に対応する．$0 \leqq u \leqq 1$ の族は，1次元自己回避過程と1次元ブラウン運動を指数の意味で連続に内挿する自己抑制過程 (self-repelling process) になる．そのような確率過程の族は [9, 10, 61] などによって研究されていたが，ν_u を連続的に内挿するものは見つかっていなかった．確率過程ではなく対応するくりこみ群を第一原理としたことが成功の本質である．実際，得られた確率連鎖の確率をあらわに計算すると複雑になる [17].（それゆえ未発見だったのかもしれない.）

くりこみ群による確率過程の構成については，Φ は事実上自由に選べる．

定理 [17, 34]. Path 長の（非負重み付き）母関数 $\Phi(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k$ が以下を満たすとする：収束半径が正，$c_2 > 0$，少なくとも1つの $k \geqq 3$ に対して $c_k > 0$．こ

のとき，上述の精度のスケール変換による対応によって，細かいギザギザを持つ連続確率過程が構成できる（存在が証明される）． ◇

また，くりこみ群の固定点での微分 $\lambda = \Phi'(x_f)$ から得られる指数 $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ が，確率過程のギザギザの度合いや確率過程および確率連鎖の漸近的な振る舞いを表すことを上では直感的に説明したが，たとえば重複対数の法則の一般化の意味でこのことを数学的に正当化・精密化できる [17, 34].

２．d 次元ガスケット上の自己回避経路．

前節で精度のスケール変換のパラメータ空間への投影としてのくりこみ群の例を紹介したが，そこでは力学系としてのくりこみ群軌道としては固定点直上だけを（正確にはくりこみ写像の微分が効くという意味で固定点の近傍を）見ていた．本節ではくりこみ群の軌道の「大局的にすなおな振る舞い」が重要になる例として，プレ d 次元ガスケット（以後 dSG と略記）上の自己回避連鎖（self-avoiding path, 以後 SAP と略記）の話に転じる．

上向き単位正三角形 3 個を頂点で輪っか状につないで 1 辺 2 の上向き正三角形（に，単位正三角形 3 個の内部構造を入れたもの）F_1 を作る．この操作を帰納的に繰り返してできる無限図形を 2SG (pre-Sierpiński gasket) と言う．式で書けば，$O = (0, 0)$, $a = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $b = (1, 0)$, とおき，三角形 Oab の辺と頂点上の点の集合を F_0 とおく．$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ を帰納的に，

$$F_{n+1} = F_n \cup (F_n + 2^n a) \cup (F_n + 2^n b), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

で定義する． F_n たちを有限 pre-Sierpiński gasket と呼び，$F = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ を (無限)pre-Sierpiński gasket と呼ぶ．ここではネットワークとしてのプレガスケット，つまり，各単位三角形の頂点と辺たち，に注目する．平面内の正三角形 3 個で大きい正三角形を作る代わりに空間内の正 4 面体 4 個で大きい正 4 面体を再帰的に作れば 3SG を得る．同様に $\mathbb{R}^d$ 内の正 $d+1$ 面体に基づいて作られるネットワークとして dSG を得る．

dSG 上の歩数 k の経路は dSG の各単位単体の頂点を集めた集合からとった点列 $w_0 = O, w_1, w_2, \cdots, w_k$ であって，各「i 歩目」(w_{i-1}, w_i) がどれかの単位単体のどれかの辺になっているものを言い，自己回避経路 (SAP) は，経路であって $i \neq j$ ならば $w_i \neq w_j$ となるもの，つまり一度通った点は二度と通らない経路を言う．SAP は（フラクタル上に限らず d 次元格子 $\mathbb{Z}^d$ 上でも）random walk や Brown 運動に比べて難しい．過去に通った点は通らないという制約条件がそれまでの経路全体に依存するためである.（確率過程の言葉で言えばマルコフ性を欠くからである.）また dSG は $\mathbb{Z}^d$ のような空間的な一様性もないので，dSG 上の SAP の問題は，既存の強力な解析的手法がことごとく使えない．既存の数学と相性の悪い問題によってくりこみ群解析の可能性を調べることがこの問題を考える動機である．

さて，無数に細かいギザギザを持つ連続極限確率過程の構成（存在証明）ならば前節のようにくりこみ群の固定点近傍の情報だけで可能であり [25]，その詳細な性質も分かる部分がある [24]．ここでは，力学系としてのくりこみ群の大局的な軌道解析を要する問題として，dSG 上の（原点を出発点とする）k 歩の SAP の上の一様分布（k 歩の SAP が N_k 本あるとき，形状に無関係に 1 本あたり確率 $1/N_k$ とおいて得られる確率測度）P_k の列 $(k=1,2,\cdots)$ に基づく変位の指数を取り上げる．ここで各 k に対して k 歩の経路の集合上の確率測度 P_k が定義されているとき $\{P_k\}$ の変位の指数が ν であるとは，P_k に関する期待値を E_k と書くとき（つまり経路に関する単純平均の意味で）

$$\lim_{k\to\infty}(\log k)^{-1}\log \mathrm{E}_k[\,|w_k|^s\,]=s\nu,\quad s>0,$$

が成り立つことを言うことにする．$|\cdot|$ は経路が埋め込まれている空間 $\mathbb{R}^d$ における始点 $w_0=O$ と終点 w_k のユークリッド距離にとる．直感的には k 歩で $O(k^\nu)$ 程度の範囲にばらつく，ということである.（その意味で前節で直感的に書いた指数 ν と同じ意味であり，また，一般化した重複対数の法則の指数 ν にも等しい.）

この節の議論は上で定義した dSG 上の SAP について同様に成り立つが，以下では説明を短くするために，制限された SAP（dSG 上の rSAP）を導入して結果を rSAP に即して書く．原点を出発する dSG 上の SAP のうちで，各単位単体との共通部分はその単体の辺の和だが，そのどの 2 つの辺も共有点を持たないもの，言い換えると，ある単体の辺を通ったら 1 歩で必ずその単体から外に出る，という条件を満たすものを rSAP と呼ぶ．一度外に出てから再びその単体を通ることは SAP の条件を満たす限り制限しない．dSG では $n=[\frac{d+1}{2}]$（$[\cdot]$ はガウスの記号）回 1 つの単位単体を通りうる．くりこみ群の描像から rSAP と SAP の変位の指数は等しいと予想されていて，$d=2,3$ では実際にそのことを証明して SAP の指数を rSAP の指数に帰着して変位の指数 ν の存在と値の決定を解決した [27, 28].

前節と同様に，1 辺の長さ 2 の単体 F_1 の最も外側の $d+1$ 個の頂点の通り方を指定（前節の粗い経路の 1 歩に対応）したとき，1 スケール細かい構造（F_1 を構成する $d+1$ 個の単位単体）の通り方（「ギザギザ」）を調べる（**精度のスケール変換**）．単純ランダムウォークとは異なって，dSG 上の rSAP のくりこみ群は一般には 1 変数では recursion が閉じないので**パラメータ空間の取り方**が問題になる．rSAP の場合は経路（または経路の組）w が j 個の辺を通る単位単体の個数（$d+1$ 個中の）を $s_j(w)$ と書くとき，$(s_1(w),\cdots,s_n(w))$ $(n=[\frac{d+1}{2}])$ の結合母関数

$$\Phi_i(\vec{x})=\sum_{w\in W_{r,i}}\prod_{j=1}^{n}x_j^{s_j(w)},\quad i=1,\cdots,n,\quad \vec{x}=(x_1,\cdots,x_n),$$

の組 $\vec{\Phi}=(\Phi_1,\cdots\Phi_n)$： $\mathbb{R_+}^n\to\mathbb{R_+}^n$ の定める力学系がくりこみ群となる．ここで各 i に対して $W_{r,i}$ は，F_1 の外側の頂点を両端点とする互いに共有点を持たない

i 本の rSAP たちの組の集合である．(これが一段粗いスケールの単位単体の通り方を指定することになって，$\vec{\Phi}$ による recursion が定義できる．)

前節の議論を拡張すると，くりこみ群のパラメータを適当に選んで考察の対象としている確率測度に基づく歩数の母関数を得ることで，くりこみ群の結果が経路の漸近的性質という元の問題に翻訳される．前節ではくりこみ群の固定点の周りで考えることが自然に単純ランダムウォークに対応する確率測度を考えることになったが，変位の指数は経路の長さを固定したときの一様分布 P_k を考えるので，一般には固定点には対応しない．経路の長さ $L = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$ の母関数を考える必要があるが，それはくりこみ群において変数 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ を

$$\vec{x} = \vec{x}(\beta) = (e^{\beta}, \cdots, e^{n\beta}), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

とおくことを意味する．言い換えると，この式でパラメータ表示された ${\mathbb{R}_+}^n$ 内の曲線を出発点にとることが rSAP 上の一様分布 P_k の情報を与える．この，くりこみ群の出発点の集合（曲線）を理論物理学では**canonical surface** と呼ぶ．Canonical surface 上の点を初期値とする**くりこみ群の軌道**$\vec{\Phi}^m(\vec{x}(\beta)), m = 1, 2, \cdots,$ **の漸近的振る舞い**が大きいスケールの（したがって長い経路の）漸近的性質を定める．この軌道がある**不変部分集合**に含まれることは重要である．

命題 [28, 41, 34]． くりこみ群のパラメータ空間 ${\mathbb{R}_+}^n$ の部分集合

$$\Xi_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in {\mathbb{R}_+}^n \mid x_{i+j} \leqq x_i x_j,\ 1 \leqq i, j,\ i + j \leqq n\}$$

は canonical surface を境界に含むくりこみ写像 $\vec{\Phi}$ の不変部分集合である． ◇

さて，もし，canonical surface 上の点 $\beta = \beta_c$（理論物理学でいうところの**臨界点，critical point**）があって，そこを出発点とするくりこみ群の軌道が $\vec{\Phi}$ の全成分正の固定点 $\vec{x}_f$ に収束する ($\lim_{m\to\infty} \vec{\Phi}^m(\vec{x}(\beta_c)) = \vec{x}_f$) ならば，前節と同様にこの軌道の周りにパラメータを取り直してそれを歩数分布の母関数として調べることで，rSAP 上の一様分布 P_k に関する期待値 E_k に基づく経路の漸近的性質を得る．

定理 [41, 34]． (1) $\vec{x}_f \in \Xi_n \setminus \{\vec{0}\}$ なる $\vec{\Phi}$ の固定点 $\vec{x}_f$ が存在する．(rSAP の場合，このとき $\vec{x}_f$ の全成分が正になる．)

(2) さらに次の (i)(ii) が成り立つことを仮定する．

(i) $\vec{x}_f$ での $\vec{\Phi}$ のヤコビ行列は対角化可能で絶対値最大の固有値 λ 以外の固有値は絶対値 1 未満である．(rSAP の場合ペロン行列になるので λ はただ 1 つ決まり，$\lambda > 2$ も分かる．)

(ii) (i) を満たす $\vec{x}_f$ をくりこみ群の軌道の極限点とする臨界点 $\vec{x}(\beta_c)$ が canonical surface 上に存在する：$\lim_{m\to\infty} \vec{\Phi}^m(\vec{x}(\beta_c)) = \vec{x}_f$.

このとき，dSG 上の rSAP の変位の指数が存在して $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ で与えられる． ◇

Self-avoiding path の漸近的性質という確率連鎖の問題をくりこみ群の大局的軌道解析という力学系の問題に帰着したことになる．さらに，漸近的性質（ギザギザの度合い）を決める指数 ν が，くりこみ群の固定点におけるヤコビ行列の最大固有値 λ として自然にとらえられる．

３．非負係数多項式が定義する写像の固定点の唯一性問題．

前節最後の定理は標語的には**『大局的な軌道がすなおならばくりこみ群解析は成功する』**と書ける．理論物理学におけるくりこみ群の「成功」は多くの場合固定点近傍の解析の成功に過ぎず，大局的な収束軌道の存在は「物理的直感」にゆだねているようにみえる．たとえば 4 次元 Ising 模型を canonical surface とするくりこみ群が正規分布に対応する固定点に収束する臨界軌道を持つかという問題は「強結合 ϕ^4 理論の自明性」と伝統的に呼ばれてきた場の量子論の数学の基礎的な大問題（のくりこみ群による一つの表現）だが，くりこみ群に向いた hierarchical 型相互作用の場合ですらその厳密証明にはいまのところ計算機支援の多重精度厳密計算を要する [20]．それゆえくりこみ群の大局的軌道解析の一般論の可能性を追求することや，その困難のありかを調べることは意味がある．

dSG 上の rSAP に話を戻すと，前節最後の定理の仮定 (i)(ii)，特に大局的な軌道のすなおさは，dSG 上の rSAP について $d=2$ [27, 39]，$d=3$ [28]，および $d=4$ [41] で成り立つことが証明されている．2SG と 3SG では元の SAP でも正しいことが同じ文献で証明されている．これらの文献における証明はくりこみ写像 $\vec{\Phi}$ の具体形（係数の値）を用いるので，一般の d への証明の拡張ができない．

くりこみ群の構造の d に関する一般論という点から，基本となる固定点の個数について現時点で次の結果を得ている．まず，くりこみ写像 $\vec{\Phi}$ の不変部分集合 Ξ_n の条件のうち $x_i \leqq x_1 x_{i-1}$, $i=2,\cdots,n,$ に注目して $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\Xi_n$ に対して $x=x_1$ と $z_i=\dfrac{x_i}{x_1x_{i-1}}$, $i=2,\cdots,n,$ によって，座標系 $(x,\vec{z})=(x,z_2,\cdots,z_n)$ $(\in [0,\infty)\times[0,1]^{n-1})$ をとり，この座標変換を $\vec{x}(x,\vec{z})$ と書く．この変数で表現したくりこみ写像を $G(x,\vec{z})=\dfrac{1}{x}\Phi_1(\vec{x}(x,\vec{z}))$ および $F_i(x,\vec{z})=z_i\dfrac{\Phi_1\Phi_{i-1}}{\Phi_i}(\vec{x}(x,\vec{z}))$, $i=2,\cdots,n,$ とおき，くりこみ写像 $(x,\vec{z})\mapsto(G,F_2,\cdots,F_n)(x,\vec{z})$ のヤコビ行列を J とおく．

命題． Ξ_n の中で $F_2=F_3=\cdots=F_n=1$（固定点条件のうち $n-1$ 個の条件）を満たす点の集合を C とおく．もし，「$(x,\vec{z})\in C$ ならば $\det J(x,\vec{z})\neq 0$」が成り立てば $\vec{\Phi}$ の固定点 $\vec{x}_f$ が Ξ_n の内部にただ 1 つ存在する． ◇

こうして，Ξ_n 内部の固定点の唯一性をくりこみ写像の（ある等高線集合上での）ヤコビ行列の非退化条件という局所的な条件に帰着することができた．Ξ_n 全体の大局的な流れの構造の問題を境界条件などの大局的な問題とヤコビ行列の非退化性という局所的な問題に分けたとき，前者がうまく行くという意味である．

境界条件がうまく行くことは Ξ_n のとりかたが自然だからである．Ξ_n の定義に

おいて $x_{i+j} \leqq x_i x_j$ は，パラメータを確率の重みと解釈しなおすと，経路の中の 2 歩が近く（同じ単位単体）にいるよりも遠く（異なる単位単体）にいるほうが確率が高いことを意味する．つまり，自己反発が働いている．くりこみ群は細かい構造を加えて場合の数（エントロピー）を増すので，エントロピー斥力が働いて自己反発は強化される．これが Ξ_n が $\vec{\Phi}$ の不変部分集合になることの証明の骨子である．

$d \geqq 3$ のとき $\vec{\Phi}$ は ${\mathbb{R}_+}^n$ の中に複数の固定点があり，その個数は $n = [\frac{d+1}{2}]$ とともに増えることが予想されるので，簡単な Lyapnov 関数を見つけるなどの容易な解決は望めない．特に，ヤコビ行列は Ξ_n の外部で必ず退化する点を持ち，上記命題は Ξ_n の外には拡張できない．(元の問題が非マルコフ的であるという難しさがそのような形でくりこみ群の難しさに反映すると考えている．)

上記命題によって固定点の Ξ_n 内部での唯一性問題はヤコビ行列が退化しないことに帰着した．多項式 $\vec{\Phi}$ の係数はしかるべき条件を満たす rSAP の組の数である．一般の d で固定点の唯一性の証明を完成するにはこれをあらわに数えない証明が必要になる．現時点でそれが成功しているのは $n = 2$ だけ（$n = 1$ は自明）である．

定理 [38]**.** 以下を仮定する．(i) $W(x, y)$ は 3 次以上 6 次以下の項からなる正係数多項式で，x^3 という項があり，y を因子に含む項は 5 次以上で $x^n y$ という形の項があるが xy^4 と x^2y^3 という項は含まない．
(ii) $\vec{\Phi} = (X, Y) := \mathrm{grad}\ W$ とおくとき $\Xi_2 = \{(x, y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \mid 0 < y \leqq x^2\}$ は $\vec{\Phi}$ の不変部分集合で，$R(x, z) = X^2(x, x^2 z) - Y(x, x^2 z)$ は $x, z, 1 - z$ の正係数多項式で $x \to 0$ のとき $0 \leqq z \leqq 1$ について一様に $R(x, z)/Y(x, x^2 z) = O(x)$．さらに $y = x^2 > 0$ 上に $\vec{\Phi}$ の固定点はない．
このとき上記命題の仮定は成立し，したがって，$\vec{\Phi}$ の Ξ_2 内部における固定点はただ一つ存在する． ◇

仮定 (i)(ii) は dSG（$n = 2$ に対応するのは $d = 3, 4$）上の rSAP に対して，本数を数え上げなくても分かる性質である．この結果の不満足な点は仮定が長いことよりも，今のところ証明が（SAP の本数こそ使わないものの）膨大な計算を要する点である．

参考文献

[1] M. T. Barlow, *Random walks, electrical resistance, and nested fractals,* in K. D. Elworthy, N. Ikeda (eds.), *Asymptotic Problems in Probability Theory: stochastic models and diffusions on fractals,* Pitman (1993) 131–157.

[2] M. T. Barlow, R. F. Bass, *Construction of Brownian motion on the Sierpiński carpet,* Ann. Inst. Henri Poincaré **25** (1989) 225–257.

[3] M. T. Barlow, R. F. Bass, *On the resistance of the Sierpiński carpet,* Proceeding of Royal Society of London A **431** (1990) 345–360.

[4] M. T. Barlow, R. F. Bass, *Coupling and Harnack inequalities for Sierpiński carpets,* Bulltein of American Mathematical Society **29** (1993) 208–212.

[5] M. T. Barlow, R. F. Bass, J. D. Sherwood, *Resistance and spectral dimension of Sierpiński carpets,* Journal of Physics A, **23** (1990) L253–L258.

[6] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Restoration of isotropy on fractals,* Physical Review Letters **75** (1995) 3042–3045.

[7] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Weak homogenization of anisotropic diffusion on pre-Sierpiński carpet,* Communications in Mathematical Physics **188** (1997) 1–28.

[8] M. T. Barlow, E. A. Perkins, *Brownian Motion on the Sierpinski Gasket,* Probability Theory and Related Fields **79** (1988) 543–623.

[9] E. Bolthausen, *On self-repellent one dimensional random walks,* Probability Theory and Related Fields **86** (1990) 423–441.

[10] D. C. Bryges, G. Slade, *The diffusive phase of a model of self-interacting walks,* Probability Theory and Related Fields **103** (1995) 285–315.

[11] D. Dhar, *Self-avoiding random walks: Some exactly soluble cases,* Journal of Mathematical Physics **19** (1978) 5–11.

[12] F. J. Dyson, *Exisitence of a phase–transision in a one–dimensional Ising ferromagnet,* Communications in Mathematical Physics **12** (1969) 91–107.

[13] K. Gawedzki, A. Kupiainen, *A rigorous block spin approach to massless lattice theories,* Communications in Mathematical Physics **77** (1980) 31–64.

[14] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Triviality of ϕ^4_4 and all that in a hierarchical model approximation,* Journal of Statistical Physics **29** (1982) 683–699.

[15] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Massless lattice ϕ^4_4 Theory: Rigorous control of a remormalizable asymptotically free model,* Communications in Mathematical Physics **99** (1985) 199–252.

[16] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Asymptotic freedom beyond perturbation theory,* in K. Osterwalder and R. Stora eds., *Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories,* Les Houches 1984, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[17] B. Hambly, K. Hattori, T. Hattori, *Self-repelling Walk on the Sierpiński Gasket,* Probability Theory and Related Fields **124** (2002) 1–25.

[18] B. M. Hambly, T. Kumagai, *Heat kernel estimates and homogenization for asymptotically lower dimensional processes on some nested fractals,* Potential Analysis **8** (1998) 359–397.

[19] Takashi Hara, *A rigorous control of logarithmic corrections in four dimensional ϕ^4 spin systems I: Trajectory of effective Hamiltonians,* Journal of Statistical Physics, **47** (1987) 57–98.

[20] T. Hara, T. Hattori, H. Watanabe, *Triviality of hierarchical Ising model in four dimensions,* Communications in Mathematical Physics **220** (2001) 13–40.

[21] T. Hara, G. Slade, *Self-avoiding walk in five or more dimensions, I, the critical behaviour,* Communications in Mathematical Physics **147** (1992) 101–136.

[22] T. Hara, G. Slade, *The self-avoiding-walk and percolation critical points in high dimensions,* Combinatrics, Probability and Computing **4** (1995) 197–215.

[23] T. Hara, H. Tasaki, *A rigorous control of logarithmic correction in four dimensional ϕ^4 spin systems II: Critical behavior of susceptibility and correlation length,* Journal of Statistical Physics, **47** (1987) 99–121.

[24] K. Hattori, *Exact Hausdorff dimension of self-avoiding processes on the multi-dimensional Sierpiński gasket,* Journal of Mathematical Sciences University of Tokyo **7** (2000) 57–98.

[25] K. Hattori, T. Hattori, *Self-avoiding process on the Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **88** (1991) 405–428.

[26] K. Hattori, T. Hattori, *Displacement exponents of self-repelling walks and self-attracting walks on the pre-Sierpiński gasket,* Journal of Mathematical Science University of Tokyo **12** (2005) 417–443.

[27] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the pre-Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **84** (1990) 1–26.

[28] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpiński gasket,* Publications of RIMS **29** (1993) 455–509.

[29] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Reasoning out the empirical rule $\tilde{d} < 2$,* Physics Letters A **115** (1986) 207–212.

[30] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Gaussian field theories on general networks and the spectral dimensions,* Progress of Theoretical Physics Supplement **92** (1987) 108–143.

[31] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Block spin approach to the singularity properties of the continued fractions,* Communications in Mathematical Physics **115** (1988) 31–48.

[32] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Asymptotically one-dimensional diffusions on the Sierpiński gasket and the abc-gaskets,* Probability Theory and Related Fields **100** (1994) 85–116.

[33] 服部 哲弥，フラクタル上の確率過程におけるくりこみ群の視点，日本数学会統計数学分科会特別講演予稿，2001.10，九州大学.（「服部哲弥」の web から／日本語／解説記事／一覧／ 参照.）

[34] 服部 哲弥，ランダムウォークとくりこみ群 — 確率論から数理物理学へ —，共立出版，2004.8.

[35] 服部 哲弥，*2041* 年くりこみ群の研究，統計数理研究所リポート **48** (1993.10) 139–147.

[36] `http://www.math.tohoku.ac.jp/$\tilde{\mbox{ }}hattori/` （Google キーワード「服部哲弥」）の下の/解説記事/求む「正しくて良い定理」!，または，/英語/Fixed point of gradient flow for polynomials with positive coefficients

[37] T. Hattori, *Asymptotically one-dimensional diffusions on scale-irregular gaskets,* Journal of Mathematical Science University of Tokyo **4** (1997) 229–278.

[38] T. Hattori, *The fixed point of a generalization of the renormalization group maps for self-avoiding paths on gaskets,* Journal of Statistical Physics **127** (2007) 609–627.

[39] T. Hattori, S. Kusuoka, *The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **93** (1992) 273–284.

[40] T. Hattori, H. Ochiai, *Scaling limit of successive approximations for* $w' = -w^2$*,* Funkcialaj Ekvacioj **49** (2006) 291–319.

[41] T. Hattori, T. Tsuda, *Renormalization group analysis of the self-avoiding paths on the* d*-dimensional Sierpiński gaskets,* Journal of Statistical Physics **109** (2002) 39–66; MP-ARC preprint archive (2002) **02–225**, `http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/`.

[42] T. Hattori, H. Watanabe, *On a limit theorem for non-stationary branching processes,* in E. Çinlar et al. (eds.), *Seminar on Stochastic Processes, 1992,* Birkhäuser, Boston, 1993, 173–187.

[43] T. Hattori, H. Watanabe, *Anisotropic random walks and the asymptotically one-dimensional diffusions on the* abc*-gaskets,* Journal of Statistical Physics **88** (1997) 105–128.

[44] K. Hosaka, *Triviality of hierarchical models with small negative* ϕ^4 *coupling in four dimensions,* Journal of Statistical Physics **122** (2006) 237–253.

[45] J. Kigami, *A harmonic calculus on the Sierpiński space,* Japanese Journal of Applied Mathematics **6** (1989) 259–290.

[46] J. Kigami, *Analysis on fractals,* Cambridge University Press, 2001.

[47] F. B. Knight, *On the random walk and Brownian motion,* Transactions of the American Mathematical Society **103** (1962) 218–228.

[48] H. Koch, P. Wittwer, *A nontrivial renormalization group fixed point for the Dyson–Baker hierarchical model,* Communications in Mathematical Physics **164** (1994) 627–647.

[49] H. Koch, P. Wittwer, *Bounds on the zeros of a renormalization group fixed point,* Mathematical Physics Electronic Journal **1** (1995) No. 6, 24pp..

[50] 熊谷 隆，フラクタル上の解析学の展開，数学 **56**–4 (2004) 337–350，岩波書店.

[51] T. Kumagai, *Construction and some properties of a class of non-symmetric diffusion processes on the Sierpinski gasket,* in Elworthy, K.D. and Ikeda, N. (eds.), *Asymptotic problems in probability theory: stochastic models and diffusions on fractals,* Pitman, 1993, 219–247.

[52] S. Kumar, Y. Singh, Y. P. Joshi, *Critical exponents of self-avoiding walks on a family of truncated n-simplex lattices,* Journal of Physics A **23** (1990) 2987–3002.

[53] S. Kusuoka, *A diffusion process on a fractal,* in K. Ito, N. Ikeda (eds.), *Probabilistic methods on mathematical physics,* Proceeding of Taniguchi Symposium, Kinokuniya, Tokyo (1987) 251–274.

[54] T. Lindstrøm, *Brownian motion on nested fractals,* Memoir of American Mathematical Society **420** (1990) 1–128.

[55] V. Metz, *Hilbert's projective metric on cones of Dirichlet forms,* Journal of Functional Analysis **127** (1995) 438–455.

[56] H. Osada, *Isoperimetric dimension and estimates of heat kernels of pre-Sierpiński carpets,* Probability Theory and Related Fields **86** (1990) 469–490.

[57] 長田 博文，熊谷隆氏の業績 — フラクタル上の拡散過程の研究 —，数学 **56**–4 (2004) 419–426，岩波書店.

[58] R. Rammal, G. Toulouse, J. Vannimenus, *Self-avoiding walks on fractal spaces: Exact results and Flory approximation,* Journal de Physique **45** (1984) 389–394.

[59] C. Sabot, C. R. Acad. Sci. Paris, Series I (1995) 715–720.

[60] Ya. G. Sinai, *Theory of phase transition: rigorous results,* Pergamon Press, 1982.

[61] B. Tóth, *The 'true' self-avoiding walk with bond repulsion on $\mathbb{Z}$: Limit theorems,* Annals of Probability **23** (1995) 1523–1556.

[62] H. Watanabe, *Spectral dimension of a wire network,* Journal of Physics A **18** (1985) 2807–2823.

[63] K. G. Wilson, J. Kogut, *The renormalization group and the ϵ expansion,* Physics Reports **12** (1974) 75–200.