1次元確率連鎖の拡張された重複対数の法則

とくりこみ群

服部　哲弥　　　東北大学・理

服部　久美子　　　信州大学・理

$L \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ に対して $w: \{0,1,\cdots,L\} \to \mathbb{Z}$ が（原点を出発点とする $\mathbb{Z}$ 上の）L 歩の path であるとは，$w(0) = 0$ および $|w(i) - w(i-1)| = 1$ $(i = 1,2,\cdots,L)$ を満たすときを言うことにする．有限歩の path であって，到達点が 2^n かつ途中で -2^n を通らない path の集合を $\tilde{W}_n$ とおく. $\tilde{W}_1$ における歩数 L の（重み b_1 つきの）母関数 $\Phi_1(z) = \sum_{w\in\tilde{W}_1} b_1(w) z^{L(w)} =: \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ が定める力学系をくりこみ群と呼び，$\Phi_{n+1} = \Phi_1 \circ \Phi_n$, $n = 1,2,3,\cdots$, とおく. $\Phi_n(z) = \sum_{w\in\tilde{W}_n} b_n(w) z^{L(w)}$ の形に書けることは容易に分かる．本講演では，このくりこみ群に対応する確率連鎖の存在定理を述べ，その確率連鎖の漸近的性質（一般化された重複対数の法則）を定める「指数」を，固定点における微分写像を用いて書く [1,2].

Φ_1 に対して，(i) $c_k \geqq 0$ $(k = 2,3,4,\cdots)$, (ii) 収束半径 $r > 0$, (iii) $c_2 > 0$, (iv) $\exists k \geqq 3;\ c_k > 0$, を仮定する（$c_0 = c_1 = 0$ は自動的）.

命題． $0 < x_c < r$ を満たす Φ_1 の固定点 x_c がただ 1 つ存在し，$\lambda := \Phi'(x_c) > 2$ を満たす. ◇

$\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,] = b_n(w) x_c^{L(w)-1}$ で $\tilde{W}_n$ 上の確率測度を定義する．

定理． $g_n(s) := x_c^{-1}\Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s}x_c) = \sum_{w\in\tilde{W}_n} e^{-s\lambda^{-n}L(w)}\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,]$ を母関数とするスケールされた歩数分布が $n\to\infty$ で弱収束する．◇

タウバー型定理により詳細な性質が得られる．

次の意味でくりこみ群に対応する確率連鎖が存在する．

定理． 各 $n\in\mathbb{N}$ と各 $w\in\tilde{W}_n$ に対して

$$\mathrm{P}[\,W_j = w(j),\ j=0,1,2,\cdots,L(w)\,] = \frac{1}{2}\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,]$$

を満たす $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖 $W_0, W_1, W_2, \cdots,$ が存在する．◇

この定理で得られた確率連鎖に対して一般化された重複対数の法則が成り立つ．

定理． 定数 $C_\pm > 0$ が存在して，

$$C_- \leqq \limsup_{k\to\infty} \frac{|W_k|}{k^\nu(\log\log k)^{1-\nu}} \leqq C_+,\quad a.s.$$

ここで $\nu = \dfrac{\log 2}{\log\lambda}$ とおいた．◇

参考文献

[1] K. Hattori, T. Hattori, *Displacement exponents of self-repelling walks on the pre-Sierpiński gasket and* **Z**, 2003, preprint

[2] 服部哲弥，ランダム・ウォークとくりこみ群 — 一つの数理物理学入門 —, 共立出版，2004, 刊行予定