

くりこみ群による 1 次元 (非マルコフ) 確率連鎖 の拡張された重複対数の法則

2003.9.10, 服部 哲弥 (名大), 服部 久美子 (信州大)

§0. 講演の動機 .

オーガナイザーのお誘いに、「一次元確率連鎖の重複対数の法則では、物理と腕力を重視する数理論理の方々冷たい目が予想されるので」と一度は辞退したが、「中華料理のあとのダイエットコーク」と翻意を促され、「養分がないと思っている講演を招待する、その心は?」という禅問答のような問の答を求めてご招待に応じた次第 .

§1. 定義と主結果 .

$L \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ に対して $w : \{0, 1, \dots, L\} \rightarrow \mathbb{Z}$ が (原点を出発点とする \mathbb{Z} 上の) L 歩の path であるとは、 $w(0) = 0$ および $|w(i) - w(i-1)| = 1$ ($i = 1, 2, \dots, L$) を満たすときを言うことにする . 有限歩の path であって、到達点が 2^n かつ途中で -2^n を通らない path の集合を \tilde{W}_n とおく . \tilde{W}_1 における歩数 L の (重み b_1 つきの) 母関数

$$\Phi_1(z) = \sum_{w \in \tilde{W}_1} b_1(w) z^{L(w)} =: \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

が定める力学系をくりこみ群と呼び、 $\Phi_{n+1} = \Phi_1 \circ \Phi_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, とおく . $\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{W}_n} b_n(w) z^{L(w)}$ の形に書けることは容易に分かる . 本講演の主目標は、このくりこみ群

に対応する確率連鎖の存在証明と、その漸近的性質 (一般化された重複対数の法則) を定める「指数」を、固定点における微分写像を用いて書くことである [1, 3] .

Φ_1 に対して以下の (弱い) 仮定を置く : $c_k \geq 0$ ($k = 2, 3, 4, \dots$), 収束半径 $r > 0$, $c_2 > 0$, $\exists k \geq 3; c_k > 0$ ($c_0 = c_1 = 0$ は自動的 .)

命題 . 区間 $(0, r)$ に Φ_1 の固定点 x_c がただ 1 つ存在し、 $\lambda := \Phi'(x_c) > 2$ を満たす . \diamond

$P_n[\{w\}] = b_n(w) x_c^{L(w)-1}$ で \tilde{W}_n 上の確率測度を定義する .

定理 . $x_c^{-1} \Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s} x_c) = \sum_{w \in \tilde{W}_n} e^{-s \lambda^{-n} L(w)} P_n[\{w\}]$ を母関数とするスケールされた歩数分布が $n \rightarrow \infty$ で弱収束する . \diamond

くりこみ群と指数型タウバー型定理などにより、収束の速さや極限分布の詳細な性質が得られる .

\tilde{W}_n の各 path を原点に関して反転 ($w \mapsto -w$) させた path の集合を \tilde{W}_n^r とおく . \tilde{W}_n^r 上に $P_{r,n}[\{w\}] = P_n[\{-w\}]$ を満たす確率測度 $P_{r,n}$ を定義する . 次の定理はくりこみ群に対応する確率連鎖の存在を主張する .

定理 . 以下を満たす確率連鎖 $\{W_k\}$ が存在する : 任意の k 歩の path w に対して ,

$$P[W_j = w(j), 0 \leq j \leq k] = \frac{1}{2} P_n[\{w' \in \tilde{W}_n \mid w'(j) = w(j), 0 \leq j \leq k\}] + \frac{1}{2} P_{r,n}[\{w' \in \tilde{W}_n^r \mid w'(j) = w(j), 0 \leq j \leq k\}]$$

が、 $2^n > \max_{0 \leq j < k} |w(j)|$ を満たす任意の自然数 n に対して成り立つ . \diamond

この定理で得られた確率連鎖に対して次の一般化された重複対数の法則が成り立つ。
定理．定数 $C_{\pm} > 0$ が存在して，

$$C_- \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|W_k|}{k^\nu (\log \log k)^{1-\nu}} \leq C_+, \quad a.s.$$

ここで $\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda}$ である．

◇

§2. 研究の動機．

くりこみ群は複雑（微分不可能，ランダム）な図形 (field, configuration) の性質を解析する方法として誰もが注目し，物理では終わったと言う声も聞こえて久しいが，数学の解析学としての発展は進んでいない．3次元イジング模型の臨界指数も4次元QCDの連続極限も数学的に得られないまま半世紀過ぎたということは，野心的な立場とは別に，簡単な模型から数学的な可能性を地道に研究する立場の可能性を示唆する．

くりこみ群は観測精度のスケール変換に対する系の応答を適切なパラメータ空間上で表現した力学系である．そこでくりこみ群が自明でない意味を持つもっとも簡単な系として \mathbb{Z} 上の path の集合上の確率測度（1次元確率連鎖）を考える．さらにくりこみ群が1次元 (1-parameter) の場合を考えたのが本講演である．もっとも単純で，しかしくりこみ群が確率モデルおよびその漸近的性質を定める，という本質をとらえている場合に限った．

重複対数の法則は，元々は1次元単純ランダムウォーク W_k の各 sample path について，その k 歩目で到達する範囲の広がりが増大するに必ず $\sqrt{k \log \log k}$ になること，式で書けば $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{W_k}{\sqrt{k \log \log k}} = 1, \quad a.s.$ となる，という定理を指す．単純ランダムウォークについてはこの定理は古くから知られていて，単純ランダムウォーク以外にも拡張されているが，特に「指数」 ν が $1/2$ からずれる場合への拡張は筆者の知る限りこれまでなかった．

微分方程式が軌道を定め，偏微分方程式や確率微分方程式が古典場の運動や確率過程を定めるように，くりこみ群が確率過程（将来的には量子場）の存在とその性質を定める数学となることを期待する．特に確率微分方程式（あるいは遷移確率密度を通して偏微分方程式）が定めてきた確率過程はマルチンゲール性またはマルコフ性を必要としていた（従って「指数」は本質的に $1/2$ であった）のに対して，これまで扱えなかった非マルコフ的な確率過程に解析学の地平を広げることが期待される．本講演はその最も簡単な「おもちゃ」の数学的実証である．

本講演では簡単のために確率連鎖を考えたが，周知のようくりこみ群は連続極限と相性が良く，数学的にも連続時間の確率過程で対応する結果を得ることができる [2]．

参考文献

- [1] 服部哲弥，ランダム・ウォークとくりこみ群 — 一つの数理物理学入門 —，共立出版（シリーズ「解析学の新しい流れ」），2004.3 刊行予定．
- [2] B. Hambly, K. Hattori, T. Hattori, *Self-repelling Walk on the Sierpiński Gasket*, Probability Theory and Related Fields **124** (2002) 1–25.
- [3] K. Hattori, T. Hattori, *Displacement exponents of self-repelling walks on the pre-Sierpiński gasket and \mathbb{Z}* , preprint, 2003.