1次元拡散過程と一般化逆ガウス分布[*1)]

松本裕行
（名古屋大学大学院情報科学研究科）

このノートは 2008 年度東北大学における集中講義 (6/10-13) に関するノートである．[*2)]

$a(x), b(x)$ をそれぞれ，$\mathbf{R}$ または $(0,\infty)$ 上の正値，実数値関数として

$$L = \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx}$$

という形の 2 階の微分作用素を考えて，L を生成作用素にもつ拡散過程 $X = \{X(t), t \geqq 0\}$ を考える．

講義の目的は，

1. 1 次元拡散過程の到達時刻 $\sigma_y = \inf\{t > 0; X(t) = y\}$ の確率分布，また $t \to \infty$ のとき $X(t) \to \infty$ である拡散過程の最終脱出時刻 $L_y = \sup\{t > 0; X(t) = y\}$ の確率分布に関して一般論を与えること；
2. 例として，定数ドリフトをもつブラウン運動を考えると，一般化逆 Gauss 分布，Gamma 分布が現れることを示すこと；
3. この 2 つの確率分布の関係について，連分数展開，有限 tree などを用いて述べること；
4. $t \to \infty$ のとき 0 に収束するマルチンゲールに対する最終脱出時刻の分布に対する表示を与え，Black-Scholes の公式に対する表示を与えること (Madan-Roynette-Yor [6] の仕事の紹介)；

などである．

1 次元拡散過程の場合，到達時刻 σ_y の確率分布は

$$E_x[\exp(-\lambda\sigma_y)], \quad x = X(0), \quad \text{が } L \text{ の Green 関数}$$

であることを用いて調べることができる．L_y の確率分布は，X に対応する scale 関数 $s(\cdot)$ を負値で $s(\infty) = 0$ であるようにとれば，speed 測度に関する推移確率密度 $p(t,x,y)$ を用いて

$$P_x(L_y \in dt) = \frac{-1}{2s(y)}p(t,x,y)dt$$

で与えられる．

そこで，例として上に述べた定数ドリフトをもつブラウン運動および対応する幾何ブラウン運動，Bessel 過程を念頭に置きながら，1 次元拡散過程の一般論を紹介することから始める．

---

*1)　2007 年 11 月に京都大学において似た話をした．
*2)　サイエンス社から頂いたスタイルファイルを変形して使っています．

目　次

第 1 章

1 次元拡散過程

1.1 1 次元拡散過程

S を $\mathbf{R}$ または半区間 $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$ とし，S 上の関数 $a : S \to \mathbf{R}_+, b : S \to \mathbf{R}$ を考える．適当な確率空間上に，2 階の微分作用素

$$L = \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx}$$

に対応する拡散過程 $X = \{X(t), t \geqq 0\}$ が一意的に存在すると仮定する．

確率微分方程式を考えるならば，次のようにすればよい．(W, P) を原点を出発点とする 1 次元 Wiener 空間として確率微分方程式[*1)]，

$$dX(t) = \sqrt{a(X(t))}dw(t) + b(X(t))dt, \qquad X(0) = x,$$

を考える．一意解 $X = \{X(t), t \geqq 0\}$ が求める拡散過程を定める．経路空間 W_x [*2)] 上の X による Wiener 測度 P の像測度を P_x と書く．

このとき，X を $X(w)(t) = w(t), w \in W_x$, で定まる座標過程とし，$P_x$ に関する期待値を E_x と書くと，適当な関数 f に対して次が成り立つ：

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{E_x[f(X(t))] - f(x)}{t} = (Lf)(x).$$

確率微分方程式によらなくても，確率測度の族 $\{P_x\}_{x \in S}$ は非常に緩い条件の下で構成される．1 次元拡散過程の一般論については，適当な教科書を参照して下さい．ここでは構成されているものとして話を進める．話を簡単にするため，さらに次をみたす拡散過程のみを考える．

仮定． X は保存的である．つまり，$S = \mathbf{R}$ のときは有限時間内に $\pm\infty$ に爆発する確率，$S = \mathbf{R}_+$ のときは 有限時間内に ∞ に爆発する確率も 0 に到達する確率も 0 である．(注意 1.2 参照)

注意 1.1 有限時間内に境界に達する拡散過程もほぼ同様に考えることができる．ただし，一般には境界条件が必要である．詳しいことを述べる時間はないので，上に挙げた文献を参照．

---

*1) $W = \{w : [0, \infty) \to \mathbf{R}; w(0) = 0\}$
*2) $W_x = \{w : [0, \infty) \to S; w(0) = x\}$

$c \in S$ を固定して，$s'(x), m'(x)$ を

$$s'(x) = \exp\left(-\int_c^x \frac{2b(z)}{a(z)}\,dz\right), \qquad m'(x) = \frac{2}{a(x)}\exp\left(\int_c^x \frac{2b(z)}{a(z)}\,dz\right),$$

によって定義すると，

$$L = \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} = \frac{1}{m'(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{s'(x)}\frac{d}{dx}\right)$$

が成り立つことが容易に分かる．$m'(x)dx$ を speed 測度，$s'(x)$ の積分 $s(x)$ を scale 関数と呼ぶ．

注意 1.2　一般に $m(dx)$ を正の測度，$s(x)$ を単調増加関数とすると，一般化された微分作用素 $\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$ が定義され，一般化された拡散過程が対応する．ここでは上のように m が density をもち，s が微分可能である場合を考える．一般化された場合は，上に挙げた文献を参照．なお，一般化された拡散過程も含めて境界の分類が知られており，上の仮定は，$S = \mathbf{R}_+$ の場合であれば

$$\int_0^c s'(\xi)d\xi \int_\xi^c m'(\eta)d\eta = \infty, \qquad \int_c^\infty s'(\xi)d\xi \int_c^\xi m'(\eta)d\eta = \infty,$$

と積分条件で表すことができる．

L が $L^2(S, m'(x)dx)$ 上の対称作用素であること，つまり

$$\int_S (Lu)(x)v(x)m'(x)dx = \int_S u(x)(Lv)(x)m'(x)dx, \qquad u, v \in C_0^\infty(S),$$

が成り立つこと，および $Ls = 0$ であることは容易に分かる．

命題 1.1　X の y への到達時刻を σ_y とする：$\sigma_y = \inf\{t > 0; X(t) = y\}$．このとき，$\alpha, \beta \in S, \alpha < x < \beta$, に対して次が成り立つ：

$$P_x(\sigma_\beta < \sigma_\alpha) = \frac{s(x) - s(\alpha)}{s(\beta) - s(\alpha)}.$$

証明の概略． $\sigma = \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta$ とおく．$Ls = 0$ であるから，$\{s(X(t))\}$ はマルチンゲールである．任意停止定理より $\{s(X(t \wedge \sigma))\}$ もマルチンゲールであり，$E_x[s(X(t \wedge \sigma))] = s(x)$ が成り立つ．ここで有界収束定理を用いて $t \uparrow \infty$ とすると，$p = P_x(\sigma_\beta < \sigma_\alpha)$ として

$$s(x) = E_x[s(X(\sigma))] = s(\alpha)(1-p) + s(\beta)p$$

が得られ，これから結論を得る．　□

さらに事実として，次が知られている．

定理 1.2　(i) 拡散過程 $X = \{X(t)\}$ に対して，speed 測度に関する推移確率密度 $p(t,x,y)$ が存在する：

$$P_x(X(t) \in dy) = p(t,x,y)m'(y)dy, \qquad t > 0, x, y \in S.$$

(ii) $p(t,x,y)$ は熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ の基本解，つまり，$u(0,x) = \varphi(x)$ をみたすこの熱方程式の解は

$$u(t,x) = E_x[\varphi(X(t))] = \int_S \varphi(y)p(t,x,y)m'(y)dy$$

によって与えられる．

有界連続な関数 φ に対して $\{T_t\}_{t \geqq 0}$ を

$$(T_t\varphi)(x) = E_x[\varphi(X(t))]$$

によって定義すると，$\{T_t\}$ は作用素の半群をなす．$p(t,x,y)$ はこの半群の積分核である．

次の 2 つを典型例として念頭におく．

例 1.1（定数ドリフトをもつ Brown 運動，幾何 Brown 運動） $\{B(t), t \geqq 0\}$ を Brown 運動，$k > 0$ を定数として，$B^{(k)}(t) = B(t) + kt$ とおき，$B^{(k)} = \{B^{(k)}(t)\}$ を定数ドリフトをもつ Brown 運動と呼ぶ．$B^{(k)}$ は

$$L^{(k)} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + k\frac{d}{dx} = \frac{1}{2e^{2kx}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^{-2kx}}\frac{d}{dx}\right)$$

を生成作用素にもつ $\mathbf{R}$ 上の拡散過程である．speed 測度は $2e^{2kx}dx$，scale 関数の導関数は e^{-2kx} ととる．さらに，scale 関数は $-(2k)^{-1}e^{-2kx}$ ととる．

$B(0) = 0$ とし，$X_x(t) = x\exp(B(t) + kt)$ とおく．$\{X_x(t)\}$ は

$$dX_x(t) = X_x(t)dB(t) + \left(\frac{1}{2} + k\right)X_x(t)dt$$

をみたし，

$$L = \frac{1}{2}x^2\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} + k\right)x\frac{d}{dx} = \frac{1}{2x^{2k-1}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{-2k-1}}\frac{d}{dx}\right)$$

を生成作用素とする $(0,\infty)$ 上の拡散過程である．speed 測度は $2x^{2k-1}dx$，scale 関数の導関数は $x^{-(2k+1)}$，scale 関数は $-(2k)^{-1}x^{-2k}$ ととる．

例 1.2（Bessel 過程） δ を実数，$\{B(t), t \geqq 0\}$ を $B(0)$ なる Brown 運動 として，$\{R(t)\}$ を確率微分方程式

$$dR(t) = dB(t) + \frac{\delta - 1}{2R(t)}\,dt$$

の解とすると，$\{R(t)\}$ は

$$L = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\delta - 1}{2x}\frac{d}{dx} = \frac{1}{2x^{\delta-1}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{-\delta+1}}\frac{d}{dx}\right)$$

を生成作用素にもつ拡散過程を定める．$\{R(t)\}$ を δ “次元” Bessel 過程と呼ぶ．

δ が正の整数の場合，$\{R(t)\}$ は δ 次元 Brown 運動の原点との距離によって定義される確率過程と確率法則が一致する．

また，$\delta \geqq 2$ であれば我々の仮定がみたされる．特に $\delta > 2$ であれば，scale 関数 $s(x)$ を $-x^{-\delta+2}$ ととれて，これは $s(x) < 0, \lim_{x\to\infty} s(x) = 0$ をみたす．

1.2 Green 関数

種々の解析の基本は Green 関数にある．この節では Green 関数の表示を与え，到達時刻の分布との関係について述べる．また例として，Bessel 過程の推移確率密度の具体形の計算を与える．

L を前節と同じ S 上の 2 階微分作用素とし，対応する拡散過程を $X = \{X(t)\}$，X の speed 測度 $m'(x)dx$ に関する推移確率密度を $p(t,x,y)$ と書く．

$\alpha > 0$ に対して，

$$(G_\alpha\varphi)(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[\varphi(X(t))]dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_S \varphi(y)p(t,x,y)m'(y)dy$$

によって定義される作用素 G_α を L の Green 作用素と呼び，その積分核 $G(x,y;\alpha)$

$$G(x,y;\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t,x,y)dt$$

を L に対する Green 関数と呼ぶ.

$T_t = \exp(tL)$ と書くと，少なくとも形式的には

$$G_\alpha\varphi = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t\varphi dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha-L)t}\varphi dt = (\alpha - L)^{-1}\varphi$$

が成り立つ．実際，次が知られている.

定理 1.3　$G_\alpha\varphi$ は $(\alpha - L)u = \varphi$ の解である.

Green 関数に対する表示を与えるために，方程式 $Lu = \alpha u$ を考える.

定理 1.4　$\alpha > 0$ に対して $Lu = \alpha u$ の解空間は 2 次元であり，単調増加な正値解 $u_1(x;\alpha)$ と単調減少な正値解 $u_2(x;\alpha)$ が定数倍を除いて一意的に存在する.

証明には，$Lu = \alpha u$ の解 e_1, e_2 で，$c \in S$ を固定するとき，

$$e_1(c) = 1, \qquad \frac{de_1}{ds}(c) \equiv \frac{1}{s'(c)}\frac{de_1}{dx}(c) = 0,$$
$$e_2(c) = 0, \qquad \frac{de_2}{ds}(c) = 1,$$

なるものが一意的に存在することを示し，u_1, u_2 をこれらの線型結合で構成できることを示す. (例えば，伊藤清 [1], page 174, 参照)

定義 1.1　次で定義される $h(\alpha), \alpha > 0$,（x に依らない）を Wronskian と呼ぶ.

$$\frac{1}{h(\alpha)} = \frac{1}{s'(x)}\big(u_1'(x;\alpha)u_2(x;\alpha) - u_1(x;\alpha)u_2'(x;\alpha)\big).$$

定理 1.5　L の speed 測度に関する Green 関数 $G(x,y;\alpha)$ は

$$G(x,y;\alpha) = \begin{cases} h(\alpha)u_1(x;\alpha)u_2(y;\alpha), & x \leqq y, \\ h(\alpha)u_1(y;\alpha)u_2(x;\alpha), & x > y, \end{cases}$$

によって与えられる．つまり，$\varphi \in C_0^\infty(S)$ に対して

$$g(x) = \int_S G(x,y;\alpha)\varphi(y)m'(y)dy$$

とおくと，g は $(\alpha - L)g = \varphi$ の解である.

今の場合関数は滑らかだから，証明は実際に g を微分して計算すればよい.

例 1.3（定数ドリフトをもつ Brown 運動）　$B^{(k)} = \{B^{(k)}(t) = B(t) + kt\}$ に対して

$$P_x(B(t) + kt \in dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x-kt)^2/2t} dy$$

より，$B^{(k)}$ の Lebesgue 測度に関する推移確率密度は

$$\widetilde{p}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{k(y-x)} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t} - \frac{k^2 t}{2}\right).$$

従って，speed 測度 $2e^{2ky}dy$ に関する推移確率密度は

$$p(t,x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} e^{-k(y+x)} \exp\biggl(-\frac{(y-x)^2}{2t} - \frac{k^2 t}{2}\biggr).$$

従って，直接積分を計算して，speed 測度に関する Green 関数が

$$\begin{aligned} G(x,y;\alpha) &\equiv \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t,x,y)dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k^2+2\alpha}} e^{(-k+\sqrt{k^2+2\alpha})x} e^{-(k+\sqrt{k^2+2\alpha})y}, \qquad x \leqq y,\ \alpha > 0, \end{aligned}$$

であることが分かる．

一方，生成作用素が $L = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + k\frac{d}{dx}$ だから，$Lu = \alpha u$ の単調増加，単調減少な正値解 u_1, u_2 が

$$u_1(x;\alpha) = e^{(-k+\sqrt{k^2+2\alpha})x}, \qquad u_2(x;\alpha) = e^{-(k+\sqrt{k^2+2\alpha})y},$$

であることは容易に分かる．従って，Wronskian の計算をすれば，上の Green 関数の表示を確かめることができる．

例 1.4（Bessel 過程） $\delta > 2$ とする．δ 次元 Bessel 過程の生成作用素は,

$$L = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\delta-1}{2x}\frac{d}{dx} = \frac{1}{2x^{\delta-1}}\frac{d}{dx}\biggl(\frac{1}{x^{1-\delta}}\frac{d}{dx}\biggr).$$

Green 関数を求めるためには，$\nu = (\delta-2)/2$ とおいて（ν は index と呼ばれる）

$$Lu = \frac{1}{2}u''(x) + \biggl(\frac{1}{2}+\nu\biggr)\frac{1}{x}u'(x) = \alpha u(x)$$

の解が必要となる．

ここで，変形 Bessel 関数 I_ν, K_ν を導入する：

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \biggl(\frac{z}{2}\biggr)^\nu \sum_{n=0}^\infty \frac{(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} e^{z\cosh(t)-\nu t}dt, \\ K_\nu(z) &= \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\nu\pi} = \int_0^\infty e^{-z\cosh(t)}\cosh(\nu t)dt. \end{aligned}$$

これらが,

$$w''(z) + \frac{1}{z}w'(z) - \biggl(1+\frac{\nu^2}{z^2}\biggr)w(z) = 0$$

の正値解であることから，$\alpha > 0$ に対して

$$u_1(x;\alpha) = x^{-\nu}I_\nu(\sqrt{2\alpha}x), \qquad u_2(x;\alpha) = x^{-\nu}K_\nu(\sqrt{2\alpha}x)$$

が $Lu = \alpha u$ の単調増加，単調減少な正値解であることが分かる．さらに，$I'_\nu(z)K_\nu(z) - I_\nu(z)K'_\nu(z) = z^{-1}$ より,

$$\frac{1}{s'(x)}(u_1(x;\alpha)u'_2(x;\alpha) - u'_1(x;\alpha)u_2(x;\alpha)) = 1$$

となるから，speed 測度 $2x^{\delta-1}dx = 2x^{2\nu+1}dx$ に関する Green 関数 $G(x,y;\alpha)$ が $x \leqq y$ に対して

$$G(x,y;\alpha) = (xy)^{-\nu}I_\nu(\sqrt{2\alpha}x)K_\nu(\sqrt{2\alpha}y)$$

と表されることが分かる．

さらに，Bessel 関数の積に対する積分表示

$$I_\nu(x)K_\nu(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t/2-(x^2+y^2)/2t} I_\nu\Big(\frac{xy}{t}\Big)\,\frac{dt}{t}, \quad 0 < x \leqq y, \tag{1.1}$$

を用いると，

$$G(x,y;\alpha) = (xy)^{-\nu}\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t-(x^2+y^2)/2t} I_\nu\Big(\frac{xy}{t}\Big)\,\frac{dt}{t}$$

を得る．従って，δ 次元 Bessel 過程の speed 測度に関する推移確率密度 $p_\delta(t,x,y)$ が

$$p_\delta(t,x,y) = \frac{1}{2t(xy)^\nu} e^{-(x^2+y^2)/2t} I_\nu\Big(\frac{xy}{t}\Big)$$

であり，Lebesgue 測度に関する推移確率密度 $\widetilde{p}_\delta(t,x,y)$ が

$$\widetilde{p}_\delta(t,x,y) = \frac{1}{t}\frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} e^{-(x^2+y^2)/2t} I_\nu\Big(\frac{xy}{t}\Big)$$

であることが分かる．

1.3　到達時刻の分布

$X = \{X(t)\}$ を S 上の 2 階の微分作用素

$$L = \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} = \frac{1}{m'(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{s'(x)}\frac{d}{dx}\right)$$

を生成作用素とする拡散過程とし，$c \in S$ への到達時刻を σ_c とする：

$$\sigma_c = \inf\{t \geqq 0; X(t) = c\}. \quad \text{但し，}\{\quad\} = \emptyset \text{ のときは } \sigma_c = \infty \text{ とする．}$$

σ_c の分布の Laplace 変換は，L の Green 関数の表示に用いた $Lu = \alpha u$ の単調解によって与えられる．

定理 1.6　$c \in S$ を固定する．$\alpha > 0$ に対して，

$$v_1(x;\alpha) = \begin{cases} E_x[e^{-\alpha\sigma_c}], & x \leqq c, \\ \big(E_c[e^{-\alpha\sigma_x}]\big)^{-1}, & x \geqq c, \end{cases} \qquad v_2(x;\alpha) = \begin{cases} \big(E_c[e^{-\alpha\sigma_x}]\big)^{-1}, & x \leqq c, \\ E_x[e^{-\alpha\sigma_c}], & x \geqq c, \end{cases}$$

によって定義される S 上の関数 v_1, v_2 は，それぞれ $v_i(c) = 1$ をみたす，$Lu = \alpha u$ の単調増加，単調減少な正値解である．

証明の概略． f を，$x \leqq c$ に対して $f(x) = 0$，$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$，$(G_\alpha f)(c) \neq 0$ である S 上の連続関数とすると，X の強 Markov 性から $(G_\alpha f)(x)$ が次のように計算できる．

$$\begin{aligned}(G_\alpha f)(x) &= E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X(t))dt\right] = E_x\left[\int_{\sigma_c}^\infty e^{-\alpha t} f(X(t))dt\right] \\ &= E_x\left[e^{-\alpha\sigma_c}\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X(\sigma_c+t))dt\right] = E_x\left[e^{-\alpha\sigma_c}\right]E_c\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X(t))dt\right].\end{aligned}$$

これから，$x \leqq c$ ならば $v_1(x;\alpha)$ が $Lu = \alpha u$ をみたすことが分かる．単調増加であること，$v_1(c;\alpha) = 1$ であることは明らかであろう．

$x \geqq c$ のときは，S 上の連続関数 g を，$x \geqq c$ に対して $g(x) = 0$，$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$（$S = \mathbf{R}$ のとき）または $g(0) = 0$（$S = \mathbf{R}_+$ のとき），$(G_\alpha g)(c) \neq 0$ なるものとして，同様の議論をすればよい．

v_2 についても同様である．　□

例 1.5（定数ドリフトをもつ Brown 運動） $\{B(t)\}$ を Brown 運動とし，$k>0$ を定数とする．$B^{(k)}=\{B^{(k)}(t)\equiv B(t)+kt\}$ の c への到達時刻を σ_c とすると，$c>x$ に対して

$$E_x[e^{-\alpha\sigma_c}]=e^{(-k+\sqrt{k^2+2\alpha})(x-c)}=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{c-x}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-(c-x-kt)^2/2t}dt$$

が成り立ち，

$$P_x(\sigma_c\in dt)=\frac{c-x}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-(c-x-kt)^2/2t}dt=\frac{(c-x)e^{(c-x)k}}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-(c-x)^2/2t-k^2t/2}dt$$

が得られる．この確率分布は逆 Gauss 分布と呼ばれる（次章を参照）．

$x>c$ のときは，

$$E_x[e^{-\alpha\sigma_c}]=e^{-(k+\sqrt{k^2+2\alpha})(x-c)}$$

となる．これから，$\alpha\downarrow 0$ として，

$$P_x(\sigma_c<\infty)=P_x(\inf_{t\geqq 0}B^{(k)}(t)\leqq c)=e^{-2k(x-c)}$$

を得る．

証明． $\alpha>0$ に対して，

$$\frac{1}{2}v_1''+kv_1'=\alpha v,\qquad v_1(c;\alpha)=1,$$

をみたす単調増加，単調減少な正値解を求めればよい．

例 1.6（Bessel 過程） $\delta>2$ とし，$X=\{X(t)\}$ を δ 次元 Bessel 過程とする．生成作用素を L に対して，$u_1(x;\alpha)=x^{-\nu}I_\nu(\sqrt{2\alpha}x), u_2(x;\alpha)=x^{-\nu}K_\nu(\sqrt{2\alpha}x)$, は $Lu=\alpha u$ をみたすから，

$$x\leqq c\quad のとき，\qquad E_x[e^{-\alpha\sigma_c}]=\frac{u_1(x;\alpha)}{u_1(c;\alpha)}=\left(\frac{c}{x}\right)^\nu\frac{I_\nu(\sqrt{2\alpha}x)}{I_\nu(\sqrt{2\alpha}c)},$$
$$x\geqq c\quad のとき，\qquad E_x[e^{-\alpha\sigma_c}]=\frac{u_2(x;\alpha)}{u_2(c;\alpha)}=\left(\frac{c}{x}\right)^\nu\frac{K_\nu(\sqrt{2\alpha}x)}{K_\nu(\sqrt{2\alpha}c)}.$$

$K_\nu(z)=2^{\nu-1}\Gamma(\nu)x^{-\nu}(1+o(1))$, $x\downarrow 0$, より，後者の結果から，$\alpha\downarrow 0$ とすれば次を得る：

$$x\geqq c\quad のとき，\qquad P_x(\sigma_c<\infty)=P_x(\inf_{t\geqq 0}X(t)\leqq c)=\left(\frac{c}{x}\right)^{2\nu}.$$

特に，$B_{(3)}$ を $\xi\in\mathbf{R}^3$ 出発する 3 次元 Brown 運動とするとき，$|\xi|\geqq c$ であれば

$$P(\inf_{t\geqq 0}|B_{(3)}(t)|\leqq c)=\frac{c}{|\xi|}.$$

1.4 最終脱出時刻の分布

本節では，正のドリフトをもつ幾何 Brown 運動や δ 次元 Bessel 過程で $\delta>2$ の場合を念頭に，半区間 $S=(0,\infty)$ 上の保存的な拡散過程 $X=\{X(t)\}$ で

$$\sigma_0=\infty\qquad かつ\qquad \lim_{t\to\infty}X(t)=\infty$$

であるものを考える．

生成作用素を

$$L = \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} = \frac{1}{m'(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{s'(x)}\frac{d}{dx}\right)$$

とし，X は確率微分方程式

$$dX(t) = \sqrt{a(X(t))}dB(t) + b(X(t))dt$$

の解として実現されているとする．

$a < x < b$ のとき

$$P_x(\sigma_a < \sigma_b) = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)}$$

が成り立つことから，上の仮定は $s(0+) = -\infty, s(\infty) < \infty$ であることを意味することが，$a \downarrow 0$ および $b \uparrow \infty$ のときの挙動を考えれば分かる．従って，一般性を失うことなく $s(\infty) = 0$ とする．

仮定から X の $y \in (0, \infty)$ からの最終脱出時刻 L_y を考えることができる：

$$L_y = \sup\{t \geqq 0; X(t) = y\}. \qquad \text{但し，}\{\quad\} = \emptyset \text{ のときは } L_y = 0 \text{ とする．}$$

次が本節の主定理である．

定理 1.7（Pitman-Yor） scale 関数を上のようにとり $p(t, x, y)$ を拡散過程 X の speed 測度 $m'(y)dy$ に関する推移確率密度とすると，次が成り立つ：

$$P_x(L_y \in dt) = \frac{-1}{s(y)}p(t, x, y)\, dt, \quad t > 0.$$

Pitman-Yor [9] に従って，確率解析を用いた証明を与える (Revuz-Yor [10] も参照)．平衡ポテンシャルの理論に基づく証明もできると思われる (竹内-山田-渡辺 [14] 参照).

証明のために幾つか準備をする．

命題 1.8 上の仮定の下で，$x, y \in (0, \infty)$ に対して $u_y(x) = P_x(\sigma_y < \infty) = P_x(L_y > 0)$ は次のように書ける：

$$u_y(x) = \begin{cases} 1, & x \leqq y \\ s(x)/s(y), & x > y. \end{cases}$$

証明． $x \leqq y$ のときは，仮定から $u_y(x) = 1$.

$x > y$ のとき，$M > x$ なる M をとると，

$$P_x(\sigma_y < \sigma_M) = \frac{s(M) - s(x)}{s(M) - s(y)}$$

が成り立つから，$M \to \infty$ として $s(\infty) = 0$ より $P_x(\sigma_y < \infty) = s(x)/s(y)$ を得る． □

注意 1.3 $u_y(x)$ は x に関して単調非増加関数である．

命題 1.9 $P_x(L_y > t) = E_x[u_y(X(t))]$, $t > 0$.

証明． x を出発した拡散過程 X が t 以後に少なくとも一度 y を訪れるという事象の $\mathcal{F}_t = \sigma\{X(s), s \leqq t\}$ の下での条件付確率は，$X(t)$ を出発した拡散過程が有限時間内に y に到達する確率に等しく

$$P_x(L_y > t | \mathcal{F}_t) = u_y(X(t))$$

が成り立つ．この両辺の期待値を考えれば結論を得る． □

命題 1.9 の右辺 $E_x[u_y(X(t))]$ を確率解析を用いて計算するが，u_y は滑らかではない．従って，通常の伊藤の公式ではなく，田中の公式を用いる．そのために局所時間を導入する．

定理 1.10　$y>0$ に対して，t に関して単調非増加な確率過程 $\{\Lambda_t^y\}$ で

$$|X(t)-y| = |X(0)-y| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X(s)-y)dX(s) + \Lambda_t^y,$$
$$(X(t)-y)_+ = (X(0)-y)_+ + \int_0^t 1_{\{X(s)>y\}}dX(s) + \frac{1}{2}\Lambda_t^y,$$
$$(X(t)-y)_- = (X(0)-y)_- + \int_0^t 1_{\{(X(s)\leqq y\}}dX(s) + \frac{1}{2}\Lambda_t^y,$$

をみたすものが存在する．$(0,\infty)$ 上の測度 $d\Lambda_t^y$ の台は $\{t; X(t)=y\}$ に含まれる．

$\{\Lambda_t^y\}$ を X の y における局所時間と呼ぶ．

定理 1.11　確率 1 で，任意の $t>0$ および 任意の正値可測関数 ϕ に対して次が成り立つ．

$$\int_0^t \phi(X(s))a(X(s))ds = \int_{\mathbf{R}_+} \phi(z)\Lambda_t^z dz.$$

定理 1.12（田中の公式）　下に凸な関数の差で表現される $\mathbf{R}_+$ 上の関数 f に対して，

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'_-(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}_+} \Lambda_t^z f''(dz)$$

が成り立つ．ここで，f'_- は f の左導関数，f'' は f'_- の超関数の意味での微分で定義される測度である．*3)

$f\in C^2$ であれば，$f''(dy)=f''(y)dy$ であり，定理 1.11 より田中の公式は伊藤の公式と一致する．

$u_y(X(t))$ を田中の公式によって展開するために，u_y の超関数の意味での導関数を計算すると次を得る．

補題 1.13　$y>0$ に対して次が成り立つ．

$$u'_y(x) = \frac{1}{s(y)}s'(x)1_{(y,\infty)}(x), \quad u''_y(x) = \frac{s'(y)}{s(y)}\delta_y(x) + \frac{s''(x)}{s(y)}1_{(y,\infty)}(x).$$

定理 1.7 の証明の概略． 田中の公式より

$$u_y(X(t)) = u_y(X(0)) + \int_0^t u'_y(X(s))\sqrt{a(X(s))}dB(s) + \frac{1}{2}\frac{s'(y)}{s(y)}\Lambda_t^y$$

となり，$u_y(X(t)) - s'(y)(2s(y))^{-1}\Lambda_t^y$ が局所マルチンゲールであることが分かる．さらにこれが自乗可積分マルチンゲールであることも分かって*4)，

$$E_x[u_y(X(t))] = u_y(x) + \frac{s'(y)}{2s(y)}E_x[\Lambda_t^y]$$

を得る．

ここで $\varphi\in C_0(\mathbf{R}_+)$ とすると，定理 1.11 より

$$E_x\left[\int_0^t \varphi(X(s))a(X(s))ds\right] = E_x\left[\int_{\mathbf{R}_+}\varphi(y)\Lambda_t^y dy\right] = \int_{\mathbf{R}_+}\varphi(y)E_x[\Lambda_t^y]dy$$

が成り立つ．一方，

*3)　f が下に凸なら，f'_- は単調増加関数である．

*4)　Pitman-Yor [9], p.327, Revuz-Yor [10], p.321, (4.16) Exercise

$$E_x\left[\int_0^t \varphi(X(s))a(X(s))ds\right] = \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}_+} \varphi(y)a(y)p(s,x,y)m'(y)dy$$
$$= \int_{\mathbf{R}_+} \varphi(y)a(y)m'(y)dy \int_0^t p(s,x,y)ds$$

である．従って，

$$E_x[\Lambda_t^y] = a(y)m'(y)\int_0^t p(s,x,y)ds$$

となり，命題 1.9 より

$$P_x(L_y > t) = E_x[u_y(X(t))] = u_y(x) + \frac{s'(y)}{2s(y)}E_x[\Lambda_t^y]$$
$$= u_y(x) + \frac{s'(y)}{2s(y)}a(y)m'(y)\int_0^t p(s,x,y)ds$$

が得られる．$s'(y)m'(y) = 2/a(y)$ に注意し，両辺を t について微分すれば結論を得る． □

例 1.7（定数ドリフトをもつ Brown 運動） $B = \{B(t)\}$ を Brown 運動，$k > 0$ として

$$L_c = \sup\{t > 0; B(t) + kt = c\}$$

とすると，$c > x$ のとき

$$P_x(L_c \in dt) = \frac{k}{\sqrt{2\pi t}}e^{k(c-x)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(c-x)^2}{t} + k^2t\right)\right)dt$$

が成り立つ．つまり，L_c は P_x のもとで一般化逆 Gauss 分布 $\mathrm{GIG}((c-x)^2, k^2; 1/2)$ に従う．この確率分布については次章で詳しく述べる．

$c = x$ のときは，

$$P_x(L_c \in dt) = \frac{k}{\sqrt{2\pi t}}e^{-k^2t/2}\,dt$$

であり，$2k^{-2}L_c$ はパラメータ 1/2 の Gamma 分布に従う．

証明は，対応する幾何 Brown 運動 $X(t) = \exp(B(t) + kt)$ を考えて，定理 1.7 を適用すればよい．

ここで，$B(0) = x$ のときの c への到達時刻，最終脱出時刻を $\sigma_{x\to c}$，$L_{x\to c}$ と書くと，Brown 運動の強 Markov 性から $\sigma_{x\to c}$ と $L_{c\to c}$ は独立で，その和は $L_{x\to c}$ である．これは次章に述べる 命題 2.3 の特別な場合で，その解釈を与えている．

$c < x$ のときは，

$$\int_0^\infty P_x(L_c \in dt) = e^{k((c-x)-|c-x|)} = e^{-2k(x-c)}.$$

つまり，例 1.5 で示したように，

$$P_x(L_c < \infty) = P_x(\sigma_c < \infty) = P_x(\inf_{t\geqq 0} B^{(k)}(t) \leqq c) = e^{-2k(x-c)}.$$

例 1.8（Bessel 過程） $\delta > 2$ とし，L_y を δ 次元 Bessel 過程の $y > 0$ からの最終脱出時刻とすると，推移確率密度の表現から $\nu = (\delta-2)/2$ として

$$P_x(L_y \in dt) = \frac{1}{2(\delta-2)t}\left(\frac{y}{x}\right)^\nu e^{-(x^2+y^2)/2t}I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right).$$

これから，Bessel 関数の積に対する積分表現 (1.1) を用いると，$\alpha > 0$ に対して

$$E_x[e^{-\alpha L_y}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_x(L_y \in dt) = \frac{1}{\delta - 2}\left(\frac{y}{x}\right)^\nu I_\nu(\sqrt{2\alpha}x) K_\nu(\sqrt{2\alpha}y)$$

が得られる．

ここで，到達時刻 σ_y に対して

$$E_x[e^{-\alpha\sigma_y}] = \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \frac{I_\nu(\sqrt{2\alpha}x)}{I_\nu(\sqrt{2\alpha}y)}$$

であったことを思い出すと，Bessel 過程の強 Markov 性から当然成り立っている等式

$$E_x[e^{-\alpha L_y}] = E_x[e^{-\alpha\sigma_y}] E_y[e^{-\alpha L_y}]$$

を確認することができる．

第 2 章
Gamma 分布，GIG 分布

2.1　基本的事項

定義 2.1　$\mu > 0$ に対し，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率変数 γ_μ の分布が

$$P(\gamma_\mu \in dy) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} y^{\mu-1} e^{-y} dy, \qquad y > 0,$$

のとき，γ_μ はパラメータ μ の Gamma 分布に従うという．

定義 2.2　$\nu \in \mathbf{R}, a, b > 0$ に対し，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率変数 $I_{a,b}^{(\nu)}$ の分布が

$$P(I_{a,b}^{(\nu)} \in dx) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu/2} \frac{x^{\nu-1}}{2K_\nu(\sqrt{ab})} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + bx\right)\right) dx, \quad x > 0,$$

のとき，$I_{a,b}^{(\nu)}$ は一般化逆 Gauss（略して，GIG）分布 $\mathrm{GIG}(a, b; \nu)$ に従うという．ただし，K_ν は変形 Bessel 関数である．

例 2.1　$B^{(k)} = \{B(t) + kt\}$ を x を出発する定数ドリフト $k > 0$ をもつ Brown 運動とし，σ_c を $B^{(k)}$ の c への到達時刻とすると，σ_c は $\mathrm{GIG}((c-x)^2, k^2; -1/2)$ に従う．

注意 2.1　$\nu = -1/2$ のときは，キュムラント母関数が通常の Gauss 分布のそれと互いに逆関数の関係になるので，$\mathrm{GIG}(a, b; -1/2)$ は逆 Gauss 分布と呼ばれる．実際，N を Gauss 分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数とすると $k_N(\mu) \equiv \log E[\exp(\mu N)] = m\mu + \sigma^2\mu^2/2$ であり，$k_I(\lambda) \equiv \log E[\exp(\lambda I_{a,b}^{(-1/2)})]$ とおくと $K_{1/2}(z) = K_{-1/2}(z) = (\pi/2z)^{1/2} e^{-z}$ を用いて $k_I(\lambda) = \sqrt{ab} - \sqrt{a(b - 2\lambda)}$ を示すことができ，$m < 0$ のとき $a = 1/\sigma^2, b = m^2/\sigma^2$ とおけば $k_N(k_I(-\lambda)) = \lambda$ が成り立つことが分かる．

命題 2.1　X の確率分布が $\mathrm{GIG}(a, b; \nu)$ であれば，X^{-1} は $\mathrm{GIG}(b, a; -\nu)$ に従う．

$I_{a,b}^{(\nu)}$ のモーメントは

$$E[(I_{a,b}^{(\nu)})^\alpha] = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha/2} \frac{K_{\nu+\alpha}(\sqrt{ab})}{K_\nu(\sqrt{ab})}$$

によって与えられる．従って GIG に従う確率変数，$I_{a,b}^{(\nu)}$ と $I_{b,c}^{(\nu)}$，$I_{c,b}^{(\nu)}$ と $I_{b,a}^{(\nu)}$ が独立とすると，

$$E\left[\exp\left(\alpha \log\left(\frac{1}{a} I_{a,b}^{(\nu)} I_{b,c}^{(\nu)}\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(\alpha \log\left(\frac{1}{c} I_{c,b}^{(\nu)} I_{b,a}^{(\nu)}\right)\right)\right]$$

がすべての $\alpha > 0$ に対して成り立つことが分かる．つまり，次が成り立つ．

命題 2.2 $I^{(\nu)}_{a,b}$ と $I^{(\nu)}_{b,c}$，$I^{(\nu)}_{c,b}$ と $I^{(\nu)}_{b,a}$ が独立とすると，次が成り立つ．

$$\frac{1}{a}I^{(\nu)}_{a,b}I^{(\nu)}_{b,c} \overset{(\mathrm{law})}{=} \frac{1}{c}I^{(\nu)}_{c,b}I^{(\nu)}_{b,a}.$$

一般化は容易であるが，ここでは省略する．

Gamma 分布と GIG 分布に対しては多くの興味深い関係がある．ここに幾つかまとめておく．

命題 2.3 $\mu > 0$ とする．$I^{(-\mu)}_{a,b}$ と γ_μ が独立であれば，$I^{(-\mu)}_{a,b} + 2b^{-1}\gamma_\mu$ と $I^{(\mu)}_{a,b}$ の確率分布は一致する．

この命題の一般化が講義の後半の目的の１つである．上の例で述べた定数ドリフトをもつ Brown 運動の最終脱出時刻が $\mathrm{GIG}((c-x)^2, k^2; 1/2)$ に従うこと，$k = 1/2$ のときこの命題が定数ドリフトをもつ Brown 運動を用いて解釈できることなど興味深いことがあるので，次節に述べる．

命題 2.3 の性質は GIG 分布の特徴付けを与える．Letac-Seshadri [5] に従ってこのことを示す．

定理 2.4 (i) X, Y は独立確率変数で，$a > 0$ に対して $Y \overset{(\mathrm{law})}{=} 2a^{-1}\gamma_\mu$ とする．このとき，$X \overset{(\mathrm{law})}{=} (X+Y)^{-1}$ となるのは，X の分布が $\mathrm{GIG}(a, a; -\mu)$ のときかつそのときに限る．
(ii) X, Y_1, Y_2 を正値独立確率変数で，$a, b > 0$ に対して $Y_1 \overset{(\mathrm{law})}{=} 2a^{-1}\gamma_\mu$，$Y_2 \overset{(\mathrm{law})}{=} 2b^{-1}\gamma_\mu$ とする．このとき，$X \overset{(\mathrm{law})}{=} (Y_1 + (Y_2 + X)^{-1})^{-1}$ となるのは X の確率分布が $\mathrm{GIG}(a, b; -\mu)$ となるときかつそのときに限る．

X の確率分布が GIG 分布のときに，X が $(X+Y)^{-1}$，$(Y_1 + (X+Y_2)^{-1})^{-1}$ と同分布であることは，命題 2.1 と 命題 2.3 から容易に証明できる．

従って，逆の一意性を示すのが問題である．そのために次を示す．正の実数列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ から定まる連分数を $[y_1, ..., y_n], n = 1, 2, ...,$ と表す：

$$[y_1] = y_1, \qquad [y_1, ..., y_n] = y_1 + \frac{1}{[y_1, ..., y_{n-1}]}.$$

定理 2.5 d を自然数とする．$X_0, Y_1, Y_2, ...,$ を正値独立確率変数の列とし，任意の $r, m \in \mathbf{N}$ に対して $Y_{md+r} \overset{(\mathrm{law})}{=} Y_r$ と仮定する．このとき，
(i) $Z_n \equiv [Y_1, ..., Y_n]$ は $n \to \infty$ のとき確率 1 で収束する．
(ii) $\{X_m\}_{m=1}^\infty$ を

$$\frac{1}{X_{m+1}} = [Y_{md+1}, Y_{md+2}, ..., Y_{(m+1)d}, \frac{1}{X_m}], \quad m = 0, 1, 2, ..., \tag{2.1}$$

によって定めると，(i) の極限を Z とするとき，X_0 の分布にかかわらず X_m は $m \to \infty$ のとき Z^{-1} に法則収束する．
(iii) $X_0^{-1} \overset{(\mathrm{law})}{=} [Y_1, Y_2, ..., Y_d, X_0^{-1}]$ が成り立つのは，$X_0 \overset{(\mathrm{law})}{=} Z^{-1}$ のときかつそのときに限る．

定理 2.5 の証明は appendix に回す．

定理 2.4 の証明． (i) 定理 2.5 を，$d = 1, Y_i \overset{(\mathrm{law})}{=} 2a^{-1}\gamma_\mu$ として適用すると，$X_0 \overset{(\mathrm{law})}{=} \frac{1}{Y_1 + 1/(X_0)^{-1}} = (Y_1 + X_0)^{-1}$ が成り立つような X_0 の分布は（Z^{-1} の確率分布としかここでは分からないが）１つしかないことが分かる．ところが，すでに示した逆の主張は，$\mathrm{GIG}(a, a; -\mu)$ がこの確率分布であることを主張しており，X_0 が $\mathrm{GIG}(a, a; -\mu)$ に従わないといけないことが分かる．
(ii) 定理 2.5 を，$d = 2$ とし，$a, b > 0$ に対して $Y_{2i+1} \overset{(\mathrm{law})}{=} 2a^{-1}\gamma_\mu$，$Y_{2i} \overset{(\mathrm{law})}{=} 2b^{-1}\gamma_\mu$ として適用すると，$X_0 \overset{(\mathrm{law})}{=} [Y_1, Y_2, X_0^{-1}]$ が成り立つような X_0 の確率分布は（Z^{-1} の確率分布）１つ

しかないことが分かる．$X_0 \sim \mathrm{GIG}(a,b;-\mu)$ なら $X_0 \overset{\text{(law)}}{=} [Y_1, Y_2, X_0^{-1}]$ となることは既に示したので，X_0 の確率分布が $\mathrm{GIG}(a,b;-\mu)$ でないといけないことが分かる．　□

系 2.6　(i) $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ をそれぞれ $2a^{-1}\gamma_\mu$ と同分布である IID とすると，連分数 $[Y_1, Y_2, ..., Y_n]$ の確率分布は $n \to \infty$ のとき $\mathrm{GIG}(a,a;\mu)$ に弱収束する．
(ii) $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ を独立確率変数列で，$a,b>0$ に対して $Y_{2i+1} \overset{\text{(law)}}{=} 2a^{-1}\gamma_\mu$，$Y_{2i} \overset{\text{(law)}}{=} 2b^{-1}\gamma_\mu$ とすると，連分数 $[Y_1, Y_2, ..., Y_n]$ の確率分布は $n \to \infty$ のとき $\mathrm{GIG}(b,a;\mu)$ に弱収束する．

2.2　特徴付け

本節では，命題 2.3 の拡張と，これに基づく Gamma 分布と GIG 分布の特徴付けについて述べる．

定理 2.7　γ_μ をパラメータ μ の Gamma 分布に従う確率変数とし，$I_{a,b}^{(\mu)}, I_{a,b}^{(-\mu)}$ を，γ_μ と独立で，それぞれ $\mathrm{GIG}(a,b;\mu), \mathrm{GIG}(a,b;-\mu)$ に従う確率変数とすると，次が成り立つ：

$$\left(\frac{1}{I_{a,b}^{(-\mu)} + 2b^{-1}\gamma_\mu}, \frac{1}{I_{a,b}^{(-\mu)}} - \frac{1}{I_{a,b}^{(-\mu)} + 2b^{-1}\gamma_\mu}\right) \overset{\text{(law)}}{=} \left(\frac{1}{I_{a,b}^{(\mu)}}, \frac{2}{a}\gamma_\mu\right).$$

第 1 成分を比べると，定理が命題 2.3 の拡張であることが分かる．また，左辺の成分が独立であることも定理の主張である．

興味深いと思われるのは，この独立性が Gamma 分布と GIG 分布の特徴付けになっていることである．

定理 2.8　X, Y を独立な正値確率変数で，Y の確率分布は退化していないとする．このとき，$\dfrac{1}{X+Y}$ と $\dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+Y}$ が独立になるなら，$a,b,\mu>0$ が存在して $X \overset{\text{(law)}}{=} I_{a,b}^{(-\mu)}, Y \overset{\text{(law)}}{=} 2b^{-1}\gamma_\mu$.

以下，本節ではこれらの事実の証明を与える．

定理 2.7 の証明のため，

$$M = \{(k_1,k_2) \in (0,\infty)^2; \begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & k_2 \end{pmatrix} \text{ は正定値 }\},$$

$$\psi_1^{(2)}(k_1,k_2) = \left(k_1 - \frac{1}{k_2}, k_2\right) : M \to (0,\infty)^2,$$

$$\psi_2^{(2)}(k_1,k_2) = \left(k_1, k_2 - \frac{1}{k_1}\right) : M \to (0,\infty)^2$$

とおく．簡単な計算から，次が分かる．

$$(\psi_1^{(2)} \circ \psi_2^{(2)-1})(x,y) = \left(\frac{1}{x^{-1}} - \frac{1}{y+x^{-1}}, y + x^{-1}\right). \tag{2.2}$$

ここで，$\mu>0, a,b>0$ に対して，(K_1,K_2) を M-値確率変数で分布が

$$P(K_1 \in dk_1, K_2 \in dk_2) = C^{-1}(k_1k_2-1)^{\mu-1}\exp\left(-\frac{1}{2}(ak_1+bk_2)\right)dk_1dk_2$$

によって与えられるものとする．

命題 2.9　$I_{a,b}^{(\pm\mu)}, I_{b,a}^{(\mu)}$ と γ_μ は独立とすると，

$$\psi_1^{(2)}(K_1,K_2) \overset{\text{(law)}}{=} \left(\frac{2}{a}\gamma_\mu, I_{a,b}^{(\mu)}\right), \quad \psi_2^{(2)}(K_1,K_2) \overset{\text{(law)}}{=} \left(I_{b,a}^{(\mu)}, \frac{2}{b}\gamma_\mu\right) \overset{\text{(law)}}{=} \left(\frac{1}{I_{a,b}^{(-\mu)}}, \frac{2}{b}\gamma_\mu\right).$$

証明は Laplace 変換の計算による．ここでは省略する．

定理 2.7 の証明． (2.2) より，

$$(\psi_1^{(2)}\circ\psi_2^{(2)-1})\left(\frac{1}{I_{a,b}^{(-\mu)}},\frac{2}{b}\gamma_\mu\right)=\left(\frac{1}{I_{a,b}^{(-\mu)}}-\frac{1}{2b^{-1}\gamma_\mu+I_{a,b}^{(-\mu)}},2b^{-1}\gamma_\mu+I_{a,b}^{(-\mu)}\right).$$

一方，命題 2.9 より

$$(\psi_1^{(2)}\circ\psi_2^{(2)-1})\left(\frac{1}{I_{a,b}^{(-\mu)}},\frac{2}{b}\gamma_\mu\right)\overset{(\mathrm{law})}{=}(2a^{-1}\gamma_\mu,I_{a,b}^{(\mu)}).\qquad\square$$

定理 2.8 の証明を与える．

$$U=\frac{1}{X+Y},\qquad V=\frac{1}{X}-\frac{1}{X+Y}$$

とおき，$\alpha\geqq 0,\theta>0,\sigma>0,$ に対して，

$$A=\exp\left(-\sigma X-\frac{\theta}{X}\right),\qquad B=\exp\left(-\frac{\sigma}{U}-\theta U\right)$$

とおく．$\dfrac{V}{U}=\dfrac{Y}{X}$ に注意しておく．

補題 2.10 $E[Y^\alpha e^{-\sigma Y}]E[A/X^\alpha]=E[V^\alpha e^{-\theta V}]E[B/U^\alpha]$.

証明． $U+V=X^{-1}$ より，

$$V^\alpha e^{-\theta V}\frac{B}{U^\alpha}=\left(\frac{V}{U}\right)^\alpha e^{-\theta(U+V)-\sigma/U}=\left(\frac{Y}{X}\right)^\alpha e^{-\theta/X-\sigma(X+Y)}=Y^\alpha e^{-\sigma Y}\frac{A}{X^\alpha}.$$

これから，X と Y，U と V の独立性を用いて平均をとれば結論を得る． $\square$

補題より，対数をとって

$$\log E[Y^\alpha e^{-\sigma Y}]+\log E[X^{-\alpha}e^{-\sigma X-\theta/X}]=\log E[V^\alpha e^{-\theta V}]+\log E[U^{-\alpha}e^{-\theta U-\sigma/U}].$$

両辺を θ で微分すると，

$$\frac{E[X^{-\alpha-1}e^{-\sigma X-\theta/X}]}{E[X^{-\alpha}e^{-\sigma X-\theta/X}]}=\frac{E[V^{\alpha+1}e^{-\theta V}]}{E[V^\alpha e^{-\theta V}]}+\frac{E[U^{-\alpha+1}e^{-\theta U-\sigma/U}]}{E[U^{-\alpha}e^{-\theta U-\sigma/U}]}$$

となる．さらに両辺を σ で微分すると，

$$\begin{aligned}-1+&\frac{E[X^{-\alpha-1}e^{-\sigma X-\theta/X}]E[X^{-\alpha+1}e^{-\sigma X-\theta/X}]}{(E[X^{-\alpha}e^{-\sigma X-\theta/X}])^2}\\&=-1+\frac{E[U^{-\alpha+1}e^{-\theta U-\sigma/U}]E[U^{-\alpha-1}e^{-\theta U-\sigma/U}]}{(E[U^{-\alpha}e^{-\theta U-\sigma/U}])^2}\end{aligned}$$

となり，$\alpha=1$ とすると，

$$\frac{E[X^{-2}A]E[A]}{(E[X^{-1}A])^2}=\frac{E[B]E[U^{-2}B]}{(E[U^{-1}B])^2}\tag{2.3}$$

が得られる．

一方，補題において $\alpha=0,1,2$ とすると，次を得る．

$$\begin{aligned}&E[e^{-\sigma Y}]E[A]=E[e^{-\theta V}]E[B],\\&E[Ye^{-\sigma Y}]E[X^{-1}A]=E[Ve^{-\theta V}]E[U^{-1}B],\\&E[Y^2e^{-\sigma Y}]E[X^{-2}A]=E[V^2e^{-\theta V}]E[U^{-2}B].\end{aligned}$$

これらから,

$$\frac{E[Y^2e^{-\sigma Y}]E[e^{-\sigma Y}]}{(E[Ye^{-\sigma Y}])^2} = \frac{E[V^2e^{-\theta V}]E[U^{-2}B]}{E[X^{-2}A]}\frac{E[e^{-\theta V}]E[B]}{E[A]}\left(\frac{E[X^{-1}A]}{E[Ve^{-\theta V}]E[U^{-1}B]}\right)^2 = \frac{E[V^2e^{-\theta V}]E[e^{-\theta V}]}{(E[Ve^{-\theta V}])^2}$$

となる．ここで，第 2 の等式には (2.3) を用いた．

左辺は σ のみの関数，右辺は θ のみの関数だから，ともに定数関数であることが分かる．さらに，Y の分布が退化していないことを仮定しているので，

$$(E[Ye^{-\sigma Y}])^2 \lneqq E[Y^2e^{-\sigma Y}]E[e^{-\sigma Y}]$$

である．よって，$\varphi(\sigma) = E[e^{-\sigma Y}]$ とおくと，$\varphi(\sigma)\varphi''(\sigma) = (1+p)(-\varphi'(\sigma))^2$ となる $p>0$ が存在する．つまり，$(\log(-\varphi'(\sigma)))' = (1+p)(\log\varphi(\sigma))'$ だから，

$$\log\frac{-\varphi'(\sigma)}{(\varphi(\sigma))^{1+p}} \text{ は } Y \text{ から定まる定数}$$

となり，$\varphi'(\sigma) = -m\varphi(\sigma)^{1+p}, m = E[Y]$, であり，

$$\varphi(\sigma) = E[e^{-\sigma Y}] = (1+pm\sigma)^{-1/p}$$

を得る．

Gamma 分布の Laplace 変換は，$\beta > 0$ に対して

$$E[e^{-\beta\sigma\gamma_\mu}] = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1}e^{-(1+\beta\sigma)x}dx = (1+\beta\sigma)^{-\mu}.$$

従って，$1/p = \mu$ として，$Y \overset{(\mathrm{law})}{=} 2b^{-1}\gamma_\mu$ となる $b > 0$ が存在することが分かる．

V についても，ある $a > 0$ に対して $V \overset{(\mathrm{law})}{=} 2a^{-1}\gamma_\mu$ である．

ここで，U, V の定義に戻ると，γ_μ, γ'_μ を独立とすると，

$$X = \frac{1}{U+V} \overset{(\mathrm{law})}{=} \frac{1}{U+2a^{-1}\gamma_\mu} = \frac{1}{2a^{-1}\gamma_\mu + \frac{1}{2b^{-1}\gamma'_\mu + X}}$$

となるから，定理 2.4 (ii) の逆の主張を用いると，X の分布が $\mathrm{GIG}(a,b;-\mu)$ でないといけないことが分かる．　$\square$

2.3 tree と GIG, Gamma 分布

tree のことばを用いて定理 2.7 または命題 2.9 の拡張を述べる．

そのために命題 2.9 に現れた写像 ψ_1, ψ_2 の ‘解釈’ を与える．このために，2 点 $\{1,2\}$ からなる tree を考える．始めは向きを考えないこととし，$1, 2$ それぞれに重み k_1, k_2 をおくと考える．

$1 \longleftarrow 2$ と向きをつけて，始点 (leaf という) 2 の重み k_2 は変えないで，終点 (root という) 1 の重みを k_1 から $k_1 - 1/k_2$ に変える写像が ψ_1 である．証明に与えた M 上の確率測度の ψ_1 による像測度が，Gamma 分布と GIG 分布の直積になることが命題 2.9 の主張であった．

一般の場合の結果を述べる前に，頂点数が 3 の tree を考える．この場合は，頂点集合が $V = \{1,2,3\}$, 辺の集合が $E = \{(1,2),(2,3)\}$ であり，$1-2-3$ という形の tree しかないが，写像の決め方のルール 2 つはともに含まれている．

まず，各 $(i,j) \in E$ に対して，実定数が与えられているとする：

$$\alpha_{12}=\alpha_{21}=\alpha, \qquad \alpha_{23}=\alpha_{32}=\beta.$$

これらは辺に与えられている重みと理解して良い．そして次の集合を考える．

$$M_{\alpha,\beta}=\{k=(k_1,k_2,k_3)\in(0,\infty)^3; K(k)=\begin{pmatrix} k_1 & \alpha & 0\\ \alpha & k_2 & \beta \\ 0 & \beta & k_3\end{pmatrix} \text{ が正定値 }\}.$$

$k=(k_1,k_2,k_3)$ は始めに各頂点に与えられた重みだと考える．

k を変換することを考えるために，tree に向きをつける．そのためには root と呼ばれる 1 点を指定し，その点に向かうように向きをつければよい．

"1" が root のときは，向きは $1\longleftarrow 2\longleftarrow 3$ となり，端点 (leaf) "3" の重みは変えないで，$\widetilde{k}_3=k_3$，leaf の隣 "2" の重みは，$\widetilde{k}_2=k_2-\beta^2/k_3$，さらにその隣 "1" の重みは，$\widetilde{k}_1=k_1-\alpha^2/\widetilde{k}_2$ と，leaf から順に重みをかえて，

$$\psi_1^{(3)}(k_1,k_2,k_3)=(\widetilde{k}_1,\widetilde{k}_2,\widetilde{k}_3):M\to(0,\infty)^3, \qquad \text{diffeomorphism}$$

と写像 $\psi_1^{(3)}$ を定義する．

"2" が root のときは，向きは $1\longrightarrow 2\longleftarrow 3$ となる．この場合も端点 (leaf) "1, 3" の重みは変えないで，$\widehat{k}_1=k_1,\widehat{k}_3=k_3$，leaf の隣 "2" (root になる) の重みは $\widehat{k}_2=k_2-\alpha^2/k_1-\beta^2/k_3$ と，"2" に入る辺すべてを考慮して変えて，

$$\psi_2^{(3)}(k_1,k_2,k_3)=(\widehat{k}_1,\widehat{k}_2,\widehat{k}_3):M\to(0,\infty)^3, \qquad \text{diffeomorphism}$$

と写像 $\psi_2^{(3)}$ を定義する．

次に，$M_{\alpha,\beta}$-値確率変数 (K_1,K_2,K_3) で分布が次で与えられるものを考える：$\mu>0, a\in(0,\infty)^3$ に対して

$$P(K_1\in dk_1,K_2\in dk_2,K_3\in dk_3)=C^{-1}(\det(K(k))^{\mu-1}e^{-\langle a,k\rangle/2}dk_1dk_2dk_3.$$

注意 2.2　この確率分布は，Wishart 分布の条件付確率分布である．このことがどのような意味を持つのかは，現時点では不明である．

命題 2.11　(i) $\psi_1^{(3)}(K_1,K_2,K_3)\overset{\text{(law)}}{=}\left(\dfrac{2}{a_1}\gamma_\mu, I^{(\mu)}_{\alpha^2a_1,a_2}, I^{(\mu)}_{\beta^2a_2,a_3}\right)$.

(ii) $\psi_2^{(3)}(K_1,K_2,K_3)\overset{\text{(law)}}{=}\left(I^{(\mu)}_{\alpha^2a_2,a_1}, \dfrac{2}{a_2}\gamma_\mu, I^{(\mu)}_{\beta^2a_2,a_3}\right)$.

証明． 気づいてしまうと，初等的である．(i) のみ示す．

まず，$\det(K(k))=k_1k_2k_3-\alpha^2k_3-\beta^2k_1$ であり，

$$\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2\widetilde{k}_3=\big(k_1-\frac{\alpha^2}{\widetilde{k}_2}\big)\widetilde{k}_2k_3=k_1\big(k_2-\frac{\beta^2}{k_3}\big)k_3-\alpha^2k_3=\det K(k).$$

次に，

$$\begin{aligned}\langle a,k\rangle=a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3&=a_1\big(k_1-\frac{\alpha^2}{\widetilde{k}_2}\big)+\left(a_2\big(k_2-\frac{\beta^2}{k_3}\big)+a_1\frac{\alpha^2}{\widetilde{k}_2}\right)+\left(a_3k_3+a_2\frac{\beta^2}{k_3}\right)\\&=a_1\widetilde{k}_1+\big(a_2\widetilde{k}_2+a_1\frac{\alpha^2}{\widetilde{k}_2}\big)+\big(a_3\widetilde{k}_3+a_2\frac{\beta^2}{\widetilde{k}_3}\big)\end{aligned}$$

に注意する．

これらから，任意の $p\in(0,\infty)^3$ に対し

$$E[e^{-\langle p,\psi_1(K_1,K_2,K_3)\rangle}] = \int_{M_{\alpha,\beta}} e^{-\langle p,\psi_1(k_1,k_2,k_3)\rangle} C^{-1}(\det K(k))^{\mu-1} e^{-\langle a,k\rangle/2} dk$$

$$= \int_{(0,\infty)^3} e^{-\langle p,\widetilde{k}\rangle} C^{-1}(\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2\widetilde{k}_3)^{\mu-1} \exp\left(-\frac{1}{2}a_1\widetilde{k}_1 - \frac{1}{2}\big(a_2\widetilde{k}_2 + a_1\frac{\alpha^2}{\widetilde{k}_2}\big) - \frac{1}{2}\big(a_3\widetilde{k}_3 + a_2\frac{\beta^2}{\widetilde{k}_3}\big)\right) d\widetilde{k}$$

となり，結論を得る． □

注意 2.3 $(\psi_1 \circ \psi_2^{-1})(x,y,z) = (u,v,w)$ とおいて定義から具体的に計算を行うと，$xyz = uvw$ が分かる．これから命題 2.2 が予想される．

最終的な結果を述べる．$V = \{1,2,...,n\}$ を頂点集合とし，E を辺の集合とする有限 tree を考える．

$(i,j) \in E$ に対して，0 ではない実数 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ が与えられているとし，$k = (k_1,k_2,...,k_n) \in (0,\infty)^n$ に対して，n 次対称行列 $K(k) = (k_{ij})$ を

$$k_{ij} = \begin{cases} k_i, & i = j, \\ \alpha_{ij}, & i \neq j, (i,j) \in E, \\ 0, & i \neq j, (i,j) \notin E, \end{cases}$$

によって定めて，M を

$$M = \{k \in (0,\infty)^n; K(k) \text{ は正定値 }\}$$

とする．$\mu > 0, a \in (0,\infty)^n$, に対して，

$$P(K \in dk) = C^{-1}(\det K(k))^{\mu-1} e^{-\langle a,k\rangle/2} dk$$

によって分布が与えられる M-値確率変数 K を考える．

次に，$r \in V$ を root として，写像 $\psi_r : M \to (0,\infty)^n$ を次で定める．$k = (k_1,k_2,...,k_n) \in M$ に対し，$i \in V$ が leaf であれば，$\widetilde{k}_i = k_i$ とする．leaf の隣の頂点 j に対しては，j と辺で結ばれる頂点の集合を $p(j)$ として，

$$\widetilde{k}_j = k_j - \sum_{i \in p(j)} \frac{(\alpha_{ij})^2}{k_i}$$

によって $\widetilde{k}_j$ を定め，同様に順番に root まで $\widetilde{k}_\ell$ を定めて，$\psi_r^{(n)}(k) = (\widetilde{k}_1,...,\widetilde{k}_n)$ とする．

定理 2.12 任意の $r \in V$ に対し，$\psi_r^{(n)}(K)$ の成分はすべて独立で，$i \in V \setminus \{r\}$ に対しルート r に対応する向きで i の次の点を j とすると，第 i 成分は $\mathrm{GIG}(a_j\alpha_{ij}^2, a_i; \mu)$ に従い，第 r 成分は $\frac{2}{a_r}\gamma_\mu$ と同じ確率分布に従う．

与えられた tree に 1 つ頂点を付け加えるとその頂点は leaf であることに注意して帰納法を用い，行列の基本変形を思い出せば証明は難しくない．

第 3 章

マルチンゲールの最終脱出時刻

3.1 Black-Scholes formula

$M = \{M_t\}$ をフィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ 上で定義された正のマルチンゲールで

$$\lim_{t\to\infty} M_t = 0$$

なるものとする．例としては，幾何 Brown 運動 $\{e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2}\}$ を念頭に置けばよい．

適当な条件の下で，最終脱出時刻

$$L_b = \sup\{s; M_s = b\} \qquad (\{\quad\} = \emptyset \text{ のときは } L_b = 0 \text{ とする})$$

の確率分布の表示が得られ，幾何 Brown 運動の場合は 1 章に与えた結果と一致するという Madan-Roynette-Yor [6] の最近の結果を紹介する．

$b > 0$ に対して $E[(M_t - b)_+], E[(b - M_t)_+]$ が L_b の分布関数を用いて表示することが基本である．これは European option に対する Black-Scholes の公式の新しい表示である．

次の補題を準備しておく．

補題 3.1 $M^* = \sup_{t\geqq 0} M_t$ とおくと，$M_0 < x$ に対して

$$P(M^* \geqq x|\mathcal{F}_0) = P(0 < L_x < \infty|\mathcal{F}_0) = \frac{M_0}{x}$$

が成り立つ．従って，特に

$$P(M^* < x) = P(L_x = 0) = 1 - \frac{M_0}{x}.$$

注意 3.1 $x \leqq M_0$ のときは $P(M^* < x) = 0$ だから，すべての $x > 0$ に対して次が成立：

$$P(M^* < x) = P(L_x = 0) = \left(1 - \frac{M_0}{x}\right)_+.$$

証明． $\sigma_x = \inf\{t > 0; M_t = x\}$ とおくと，任意停止定理より $\{M_{t\wedge\sigma_x}\}$ はマルチンゲールであり，$E[M_{\sigma_x}|\mathcal{F}_0] = M_0$ が成り立つ．一方，

$$E[M_{\sigma_x}|\mathcal{F}_0] = xP(\sigma_x < \infty|\mathcal{F}_0) = xP(M^* \geqq x|\mathcal{F}_0)$$

より，結論を得る． □

定理 3.2　任意の $b>0$，$\mathcal{F}_t$-可測確率変数 F_t に対して，

$$E[F_t(b-M_t)_+] = bE[F_t\mathbf{1}_{\{L_b \leqq t\}}]$$

が成り立つ．特に，$E[(b-M_t)_+] = bP(L_b \leqq t)$ が成り立つ．
証明． 示すべきことは，$P(L_b \leqq t|\mathcal{F}_t) = b^{-1}(b-M_t)_+$. $L_b \leqq t$ は t 以後に b に到達しないということだから，$P(L_b \leqq t|\mathcal{F}_t) = P(\sup_{u \geqq t} M_u < b|\mathcal{F}_t)$ である．従って補題を用いればよい．□

次は，行使価格 K の European put option の $t=0$ における価格に対する Black-Scholes の公式である．

例 3.1　$\{B_t\}$ を $B_0=0$ なる 1 次元 Brown 運動とすると，$\sigma>0, S_0>0, K>0$ に対して次が成り立つ：

$$E[\big(K-S_0\exp(\sigma B_t-\sigma^2 t/2)\big)_+] = KP(L_K^{(\sigma)} \leqq t).$$

ただし，$L_K^{(\sigma)} = \sup\{u; S_0\exp(\sigma B_u - \sigma^2 u/2) = K\}$. これから，

$$E[\big(K-S_0\exp(\sigma B_t-\sigma^2 t/2)\big)_+] = KP\left(\sup\left\{u; B_u - \frac{1}{2}u = \log\left(\frac{K}{S_0}\right)\right\} \leqq \sigma^2 t\right).$$

通常の Black-Scholes の公式は株価に関する期待値の形であるが，右辺は時間に関する確率となっていて σ, t に関する単調性が直ちに分かる．もっとも単調性は，右辺が劣マルチンゲールに関する期待値であることからも明らかである．

次に，call option $E[(M_t-b)_+]$ を考える．このため，これまでの仮定 $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$ に加えて次を仮定する．

仮定． $M_0 \equiv 1,\ M_t > 0 \quad (\forall t>0)$.

P から M_t によって測度変換して得られる確率測度を Q とする：

$$Q\Big|_{\mathcal{F}_t} = M_t \cdot P\Big|_{\mathcal{F}_t}.$$

補題を 2 つ用意する．

補題 3.3　$\{(M_t)^{-1}\}$ は Q の下でマルチンゲールである．
証明． F_s を $\mathcal{F}_s$-可測な確率変数とすると，$t>s$ に対して

$$E^Q\left[\frac{1}{M_t}F_s\right] = E^P[F_s] = E^P\left[\left(\frac{1}{M_s}F_s\right)M_s\right] = E^Q\left[\frac{1}{M_s}F_s\right].$$

つまり，$E^Q[(M_t)^{-1}|\mathcal{F}_s] = (M_s)^{-1}, \mathrm{a.s.}$ □

補題 3.4　$Q(M_t \to \infty, t\to\infty) = 1$.
証明の概略． $c>0$ に対して $\sigma_c = \inf\{t; M_t = c\}$ とおく．任意停止定理を用いると $Q(\sigma_c < n) = cP(\sigma_c<n), n>0,$ が示される．さらに，$n\to\infty$ として，補題 3.1 を用いると

$$Q(\sigma_c<\infty) = cP(\sigma_c<\infty) = cP(\sup M_t \geqq c) = 1$$

が得られる．つまり，任意の $c>0$ に対して $Q(\tau_c<\infty)=1$ が成り立つ．
ここで，$\{(M_t)^{-1}\}$ は Q の下で正の (優) マルチンゲールだから $t\to\infty$ で収束することに注意する．補題の主張を否定すると，

$$Q(\lim_{t\to\infty} M_t = \infty) < 1 \qquad \text{または} \qquad Q(\sup_{t\geqq 0} M_t < \infty) > 0,$$

つまり，十分大きい $c > 0$ に対して $Q(\sup M_t < c) > 0$ となるが，これは $Q(\tau_c < \infty) = 1, c > 0,$ に矛盾する． □

次が call option に対する価格付け公式である．

定理 3.5 仮定の下で，次が成立：

$$E^P[(M_t - b)_+] = Q(L_b \leqq t).$$

証明． Q の定義から

$$E^P[(M_t - b)_+] = E^P\left[\left(1 - \frac{b}{M_t}\right)_+ M_t\right] = E^Q\left[(1 - \frac{b}{M_t}\Big)_+\right].$$

補題から，$\{b/M_t\}$ は Q-マルチンゲールであり，$t \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって，右辺の Q に関する平均に対して定理 3.2 が適用できて，結論を得る． □

次の European call option に対する価格付け公式は数理ファイナンスの代名詞のような公式だから，詳しく述べておく．

例 3.2 計算したい期待値は，$\sigma, r > 0, S_0 > 0, K_0$ とし，$\{B_t\}$ を $B_0 = 0$ である 1 次元 Brown 運動，$T > 0$ を満期とするとき，

$$e^{-rT}E^P[\big(S_0 e^{\sigma B_T + (r-\sigma^2/2)T} - K\big)_+] = E^P[\big(S_0 e^{\sigma B_T - \sigma^2 T/2} - Ke^{-rT}\big)_+]$$

である (例えば，関根[12])．ここで，P は $\{B_t\}$ の確率法則を表すとする．

このために，$t < T$ として

$$E^P[\big(S_0 e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2} - Ke^{-rT}\big)_+] = S_0 E^P[\big(S_0 e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2} - Ke^{-rT}/S_0\big)_+]$$

を t の関数として求め，$t \uparrow T$ とする．

$\{M_t = \exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)\}$ で測度変換した測度を Q と書く：

$$Q\Big|_{\mathcal{F}_t} = M_t \cdot P\Big|_{\mathcal{F}_t}.$$

ここで定理 3.5 を用いると，Cameron-Martin の定理より $\{B_t^{(\sigma)} \equiv B_t - \sigma t\}$ は Q の下で Brown 運動であるから，

$$\begin{aligned}E^P[\big(S_0 e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2} - Ke^{-rT}\big)_+] &= S_0 Q\left(\sup\left\{u; e^{\sigma B_u^{(\sigma)} + \sigma^2 u/2} = \frac{K}{S_0}e^{-rT}\right\} \leqq t\right) \\ &= S_0 P\left(\sup\left\{s; B_s + \frac{1}{2}s = \log\left(\frac{K}{S_0}e^{-rT}\right)\right\} \leqq \sigma^2 t\right)\end{aligned}$$

となり，右辺に現れている最終脱出時刻が一般化 Gauss 分布に従うことから，$t \to T$ として次を得る．

$$\begin{aligned}&E^P[\big(S_0 e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2} - Ke^{-rT}\big)_+] \\ &= \sqrt{S_0 K}e^{-rT/2}\int_0^{\sigma^2 T} \frac{1}{2\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{4} + \frac{(\log(Ke^{-rT}/S_0))^2}{u}\right)\right) du.\end{aligned}$$

よく知られた Black-Scholes の公式は，Φ を 標準正規分布の分布関数として，次の等式である．

$$e^{-rT}E^P[\big(S_0e^{\sigma B_T+(r-\sigma^2/2)T}-K\big)_+]=S_0\Phi(d_1)-Ke^{-rT}\Phi(d_2).$$

ただし，d_1, d_2 は次の定数.

$$d_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left\{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\},$$
$$d_2=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left\{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\}=d_1-\sigma\sqrt{T}.$$

直接微積分で一致することを示せるはずだが，私は考えたことがありません.

3.2　最終脱出時刻の分布

本節の目的は，次の定理を示すこと.

定理 3.6（Madan-Roynette-Yor） $\{M_t\}$ を正値連続マルチンゲールで $\lim_{t\to\infty}M_t=0$ なるものとして，次を仮定する.

(i) 任意の t に対して M_t の確率密度関数 $\varphi_t(x)$ が存在し，$\varphi_t(x)$ は (t,x) について連続；

(ii) $d\langle M\rangle_t=u_t^2dt$ をみたす u_t が存在し，$E[u_t^2|M_t=x]$ は (t,x) について連続.

このとき，M_0 が non-random であるとすると，次が成立.

$$P(0<L_b\leqq t)=\int_0^t\frac{1}{2b}E[u_s^2|M_s=b]\varphi_s(b)ds.$$

注意 3.2　$P(L_b=0)=P(\sup M_s<b)=(1-b^{-1}M_0)_+$ は前節で示した.

証明. 半マルチンゲールに対する確率解析を用いる．$\{\Lambda_t^b\}$ を M の b における局所時間とすると，田中の公式より

$$(b-M_t)_+=(b-M_0)_+-\int_0^t\mathbf{1}_{\{M_s<b\}}dM_s+\frac{1}{2}\Lambda_t^b$$
$$E[(b-M_t)_+]=(b-M_0)_++\frac{1}{2}E[\Lambda_t^b].$$

定理 3.2 より $E[(b-M_t)_+]=bP(L_b\leqq t)$ であり，
上で注意したように $(b-M_0)_+=bP(L_b=0)$ が成り立つから，

$$P(0<L_b\leqq t)=\frac{1}{2b}E[\Lambda_t^b]$$

となる．つまり，非再帰的な 1 次元拡散過程の最終脱出時刻の分布を考えたときと同様，局所時間の平均が現れる.

ここで ϕ を非負可測関数として，滞在時間型の公式

$$\int_0^t\phi(M_s)d\langle M\rangle_s=\int_0^\infty\phi(b)\Lambda_t^b\,db$$

が成り立つことに注意する．仮定の下で平均を考えると，Fubini の定理より

$$E\left[\int_0^t\phi(M_s)u_s^2\right]=\int_0^\infty\phi(b)E[\Lambda_t^b]\,db$$

が成り立つことが分かる.

一方，左辺は

$$\int_0^tE[\phi(M_s)u_s^2]ds=\int_0^tE[\phi(M_s)E[u_s^2|M_s]]ds=\int_0^\infty\phi(b)db\int_0^tE[u_s^2|M_s=b]\varphi_s(b)ds$$

と変形されるから,

$$P(0 < L_b \leqq t) = \frac{1}{2b} E[\Lambda_t^b] = \frac{1}{2b} \int_0^t E[u_s^2 | M_s = b] \, \varphi_s(b) \, ds. \qquad \square$$

例 3.3 σ を正の定数, $\{B_t\}$ を 0 を出発する 1 次元 Brown 運動として, $M_t = M_0 \exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)$ の場合を考える. 伊藤の公式より,

$$dM_t = \sigma M_t dB_t, \qquad d\langle M \rangle_t = \sigma^2 M_t^2 \, dt,$$

であり,

$$P(M_t \in db) = \varphi_t(b) \, db, \quad 但し \quad \varphi_t(b) = \frac{1}{\sigma b \sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\sigma^{-1} \log(b/M_0) + \sigma t/2)^2}{2t} \right),$$

だから,

$$P(L_b \in dt) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\sigma^{-1} \log(b/M_0) + \sigma t/2)^2}{2t} \right) dt$$

となり, L_b が一般化逆 Gauss 分布に従うことが再び示された.

付録 A
定理 2.5 の証明

まず，連分数の表示に関する良く知られた結果を示す．

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正の実数列として，連分数 $[y_1, ..., y_n]$ を

$$[y_1] = y_1, \qquad [y_1, ..., y_n] = y_1 + \frac{1}{[y_2, ..., y_n]},$$

によって定義する．$n = 2, 3$ のときを書き下しておく．

$$[y_1, y_2] = y_1 + \frac{1}{y_2} = \frac{y_1 y_2 + 1}{y_2}, \qquad [y_1, y_2, y_3] = y_1 + \frac{1}{y_2 + 1/y_3}.$$

$\{p_n\}, \{q_n\}$ を

$$\begin{aligned} &p_1 = y_1, &&p_2 = y_1 y_2 + 1, &&p_n = y_n p_{n-1} + p_{n-2}, &&n = 3, 4, ...\\ &q_1 = 1, &&q_2 = y_2, &&q_n = y_n q_{n-1} + q_{n-2}, &&n = 3, 4, ... \end{aligned}$$

で定めると，次が成り立つ．

定理 A.1

$$[y_1, ..., y_n] = \frac{p_n}{q_n}, n = 1, 2, ..., ; \tag{A.1}$$

$$p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = (-1)^n, \quad \text{従って，} \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}, \quad n = 1, 2, ..., ; \tag{A.2}$$

$$[y_1, ..., y_n, k] = \frac{k p_n + p_{n-1}}{k q_n + q_{n-1}}, \quad n = 2, 3, ... \tag{A.3}$$

証明．まず，(A.3) を帰納法で示す．$n = 2$ のときは，

$$[y_1, y_2, k] = y_1 + \frac{1}{y_2 + 1/k} = \frac{y_1(k y_2 + 1) + k}{k y_2 + 1} = \frac{k(y_1 y_2 + 1) + y_1}{k y_2 + 1}$$

となって，$n = 2$ のとき (A.3) は成立．

n のとき成立すると仮定すると，

$$\begin{aligned} [y_1, ..., y_n, y_{n+1}, k] = [y_1, ..., y_n, y_{n+1} + 1/k] &= \frac{(y_{n+1} + 1/k) p_n + p_{n-1}}{(y_{n+1} + 1/k) q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{k(y_{n+1} p_n + p_{n-1}) + p_n}{k(y_{n+1} q_n + q_{n-1}) + q_n} = \frac{k p_{n+1} + p_n}{k q_{n+1} + q_n} \end{aligned}$$

となる．最後の等式は，$\{p_n\}, \{q_n\}$ の漸化式による．従って，$n + 1$ のときにも (A.3) は成立する．

次に，(A.3) を，$n - 1$ のときに，$k = y_n$ として適用すると，

$$[y_1, ..., y_{n-1}, y_n] = \frac{y_n p_{n-1} + p_{n-2}}{y_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

となるから，(A.1) が証明された．

(A.2) を示す．まず，$n = 1$ のときは，$p_1 q_2 - q_1 p_2 = y_1 \cdot y_2 - 1(y_1 y_2 + 1) = -1$ となり成立．一般の n に対しては，$\{p_n\}, \{q_n\}$ に対する漸化式より，

$$p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = p_n(y_{n+1} q_n + q_{n-1}) - q_n(y_{n+1} p_n + p_{n-1}) = -(p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n)$$

となるから，(A.2) を得る． □

定理 2.5 の証明． (i) $\{P_n\}, \{Q_n\}$ を

$$\begin{aligned} &P_1 = Y_1, && P_2 = Y_1 Y_2 + 1, && P_n = Y_n P_{n-1} + P_{n-2}, && n = 3, 4, ... \\ &Q_1 = 1, && Q_2 = Y_2, && Q_n = Y_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, && n = 3, 4, ... \end{aligned}$$

によって定めると，$Z_n \equiv [Y_1, ..., Y_n] = P_n / Q_n$ が成り立つ．

Claim． n について $\{Z_{2n-1}\}$ は単調増加，$\{Z_n\}$ は単調減少であり，$Z_{2n+1} < Z_{2n}$.

$\because$) (A.1), (A.2) より，

$$\begin{aligned} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} &= \frac{Y_{2n+1} P_{2n} + P_{2n-1}}{Y_{2n+1} Q_{2n} + Q_{2n-1}} - \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} \\ &= \frac{-Y_{2n+1}(P_{2n-1} Q_{2n} - Q_{2n-1} P_{2n})}{(Y_{2n+1} Q_{2n} + Q_{2n-1}) Q_{2n-1}} = \frac{-Y_{2n+1}(-1)^{2n-1}}{(Y_{2n+1} Q_{2n} + Q_{2n-1}) Q_{2n-1}} > 0. \end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} - \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} &= \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} - \frac{Y_{2n+2} P_{2n+1} + P_{2n}}{Y_{2n+2} Q_{2n+1} + Q_{2n}} = \frac{Y_{2n+2}(P_{2n} Q_{2n+1} - Q_{2n} P_{2n+1})}{Q_{2n}(Y_{2n+2} Q_{2n+1} + Q_{2n})} \\ &= \frac{Y_{2n+2}(-1)^{2n}}{Q_{2n}(Y_{2n+2} Q_{2n+1} + Q_{2n})} > 0. \end{aligned}$$

さらに，

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{P_{2n} Q_{2n+1} - Q_{2n} P_{2n+1}}{Q_{2n} Q_{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n}}{Q_{2n} Q_{2n+1}} > 0. \qquad \square \tag{A.4}$$

(A.4) より，$Q_n Q_{n+1} \to \infty$, a.s. を示せば，Z_n の収束を得るが，これには $Q_{2k} \geqq Q_2 = Y_2$ と

$$Q_{2n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (Q_{2k+1} - Q_{2k-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} Y_{2k+1} Q_{2k} \geqq 1 + \sum_{k=1}^{n} Y_{2k+1} Y_2 \to \infty, \text{ a.s.}$$

に注意すればよい．後者は大げさにいうと大数の法則の帰結である．これで (i) の証明は終わり．

(ii) $\{X_m\}$ の定義から，仮定を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_m} &= [\underbrace{Y_{(m-1)d+1}, Y_{(m-1)d+2}, ..., Y_{md}}, \underbrace{Y_{(m-2)d+1}, ..., Y_{(m-1)d}}, ..., \underbrace{Y_1, ..., Y_d}, \frac{1}{X_0}] \\ &\overset{\text{(law)}}{=} [Y_1, ..., Y_d, Y_{d+1}, ..., Y_{2d}, ..., Y_{(m-1)d+1}, ..., Y_{md}, \frac{1}{X_0}] \end{aligned}$$

が成り立つ．よって (A.3) より

$$\frac{1}{X_0} \overset{\text{(law)}}{=} \frac{X_0^{-1} P_{md} + P_{md-1}}{X_0^{-1} Q_{md} + Q_{md-1}}.$$

ここで初等的な不等式，

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \qquad \text{なら} \qquad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

を用いると，$\{P_{2n+1}/Q_{2n+1}\}$ が単調増加，$\{P_{2n}/Q_{2n}\}$ が単調減少だから，
md が偶数ならば $P_{md-1}/Q_{md-1} < (X_0^{-1}P_{md})/(X_0^{-1}Q_{md})$ より

$$Z_{md-1} = \frac{P_{md-1}}{Q_{md-1}} < \frac{P_{md-1}+X_0^{-1}P_{md}}{Q_{md-1}+X_0^{-1}Q_{md}} < \frac{X_0^{-1}P_{md}}{X_0^{-1}Q_{md}} = Z_{md}.$$

md が奇数のときは,

$$Z_{md} < \frac{P_{md-1}+X_0^{-1}P_{md}}{Q_{md-1}+X_0^{-1}Q_{md}} < Z_{md-1}$$

が成り立つ.

(i) から Z_{md}, Z_{md-1} は Z に概収束するから，$(X_m)^{-1}$ が Z に法則収束することが分かる．
(iii) $X_0^{-1} \overset{(\mathrm{law})}{=} [Y_1, ..., Y_d, X_0^{-1}]$ を仮定すると，

$$\frac{1}{X_1} \equiv [Y_1, ..., Y_d, \frac{1}{X_0}] \overset{(\mathrm{law})}{=} \frac{1}{X_0}.$$

従って，$X_1 \overset{(\mathrm{law})}{=} X_0$ となり，任意の m に対して $X_m \overset{(\mathrm{law})}{=} X_0$．(ii) で X_m が Z^{-1} に法則収束することを示したので，$X_0 \overset{(\mathrm{law})}{=} Z^{-1}$ を得る．

逆に，$Z \overset{(\mathrm{law})}{=} X_0^{-1}$ を仮定する．漸化式 (2.1) で $m \to \infty$ とした極限を考えると，$Z \overset{(\mathrm{law})}{=} [Y_1, ..., Y_d, Z]$ を得る．よって仮定から，$X_0^{-1} \overset{(\mathrm{law})}{=} [Y_1, ..., Y_d, X_0^{-1}]$ を得る． $\square$

[1] 伊藤清，確率過程，I, II, 岩波書店 (岩波講座 現代応用数学), 1957.（「確率過程」として，2007 年に復刊された）

[2] K. Itô and H.P. McKean, Jr., Diffusion Processes and their Sample Paths, Springer, 1974.

[3] 伊藤清, 渡辺信三, 福島正俊, 拡散過程, Seminar on Probability **3**, 1960.

[4] I. Karatzas and S.E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd. Ed., Springer, 1991. (渡邊壽夫訳，ブラウン運動と確率積分，シュプリンガーフェアラーク東京)

[5] G. Letac and V. Seshadri, A characterization of the generalized inverse Gaussian distribution by continuous fractions, Z. Wahr., **62** (1983), 485–489.

[6] D.Madan, B.Roynette and M.Yor, From Black-Scholes formula, to local times and last passage times for certain submartingales, preprint.

[7] 松本裕行，応用のための確率論・確率過程，ＳＧＣライブラリ - ３６，サイエンス社，2004.

[8] H.P. McKean, Jr., Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations, Trans. AMS, **82** (1956), 519–548.

[9] J.W. Pitman and M. Yor, Bessel processes and infinitely divisible laws, in Stochastic Integrals, ed. by D.Williams, Lecture Notes in Math., **851**, 285–370, Springer, 1981.

[10] D. Revuz and M. Yor, Continuous Martingales and Brownian motion, 3rd ed., Springer, 1999.

[11] L.C.G. Rogers and D. Williams, Diffusion, Markov Processes and Martingales, Vol.2: Itô calculus, Wiley and Sons, 1987.

[12] 関根順，数理ファイナンス，培風館，2007.

[13] V. Seshadri, The Inverse Gaussian Distributions, Oxford Univ. Press, 1993.

[14] 竹内順治，山田俊雄，渡辺信三，安定過程 - Riesz ポテンシャル，path の性質，Seminar on Probability, **13**, 1962.