4次元hierarchical Ising model のくりこみ軌道解析 とtriviality

および，非線形拡散型方程式の解の漸近的振舞の初期値依存性問題への翻訳

2003/01/08–10 神戸

名大多元　服部哲弥

- 目次

背景： スピン系の（よく知られた）説明

定義： hierarchical model のくりこみ群の定義

結果： T. Hara, T. Hattori, H. Watanabe, Communications in Mathematical Physics **220** (2001) 13–40.

問題： くりこみ群の，非線形放物型 PDE の解軌道への埋め込み

• 背景

○ くりこみ群の出自：$\mathbb{Z}^d$ 上の強磁性スピン系 (with nearest neighbor interaction) の平衡系統計力学

スピン系の統計力学

index set：$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

configuration (sample)：$\varphi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\} \in \mathbb{R}^\Lambda$

確率測度：

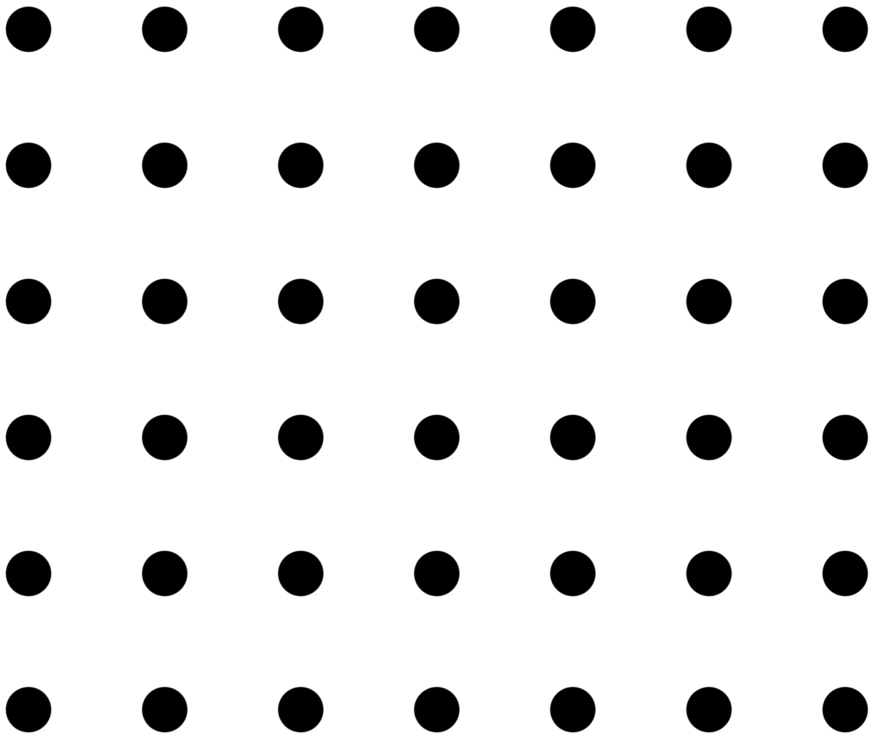
$$\rho(\varphi)d\varphi = e^{-\frac{\beta}{2}(\varphi, C\varphi)} e^{-V(\varphi)} d\varphi, \ \ \beta > 0 \text{ (逆温度)}$$

C： $\Lambda \times \Lambda$ 行列；$(\varphi, C\varphi) = \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda} C_{ij}\varphi_i\varphi_j$

$C_{ij} = 1 \ (|i-j| = 1), \ \ = 0 \ (|i-j| \neq 1),$

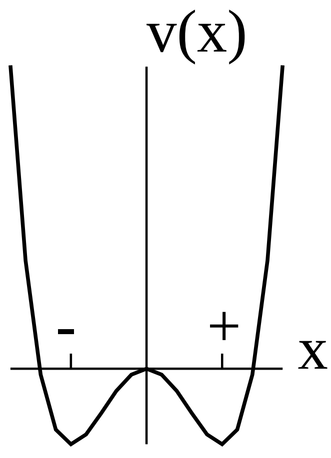
$e^{-V(\varphi)} = \prod_{i\in\Lambda} h(\varphi_i)$

index set



configuration

+	+	+	+	+	+	+
+	-	-	-	-	-	+
+	+	-	-	-	-	+
+	+	-	+	-	+	+
+	-	-	+	-	-	+
+	+	-	-	-	+	+



h(x)=exp(-v(x))

○ 興味：無限体積極限 $\Lambda \to \mathbb{Z}^d$ における大きなスケールの振る舞い（$\mathrm{E}[\,\varphi_i\varphi_j\,], |i-j| \to \infty$, など）

くりこみ群の関わり　–　臨界現象：

h が ± 1 に最大値を持つときの典型的な sample：

$\beta \gg 1 \quad \to \quad |i-j| \gg 1$ でも $\varphi_i \fallingdotseq \varphi_j$

$\beta \ll 1 \quad \to \quad$ 各 φ_i は殆ど独立

$\exists \beta_c \qquad \to \quad$ 相関は長いが異なる値が混在 !?

β_c の典型的な configuration （想像）：

$+$ の大海の中に大きな $-$ 符号の陸，その中にかなり大きな $+$ 符号の海，$\cdots$

$\to$　**大小全てのスケールの相似な構造をあわせ持つ**

$\to$　くりこみ群解析の可能性

○ block spin 変換（標準的実用的なくりこみ変換）

$a > 0$ (波動関数のくりこみ定数)

$\Lambda' \subset \Lambda$： ブロックスピン変数の index set

$$(B\varphi)_{i'} = a \sum_{i \in \mathbb{B}_{i'}} \varphi_i \,; \qquad \Lambda = \bigcup_{i' \in \Lambda'} \mathbb{B}_{i'}$$

$B = (B_{i'\,i})$： $\mathbb{R}^{\Lambda'} \times \mathbb{R}^{\Lambda}$ 定数行列

$$\int \delta(\varphi' - B\varphi)\ \rho(\varphi)\, d\varphi = (\mathcal{R}\rho)(\varphi')$$
$$\left(= e^{-\frac{1}{2}(\varphi', (\mathcal{R}C)\varphi')} e^{-(\mathcal{R}V)(\varphi')} \ \right)$$

$\mathcal{R}$: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{\Lambda}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^{\Lambda'})$

くりこみ群 (formal ‘definition’ @ $\Lambda \to \infty$):

$\mathcal{R}$: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{\infty}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^{\infty})$ が定義する力学系

blockspin transformation

+	+	+	+	+	+
+	-	-	-	-	-
+	+	-	-	-	-
+	+	-	+	-	+
+	-	-	+	-	-
+	+	-	-	-	+

+	+	-
+	-	-
+	-	-

• **定義** (hirerachical model)

○ $\mathbb{Z}^d$ 上のスピン系のくりこみ群の困難（の一つ）：

e^{-V} が single site measure h の直積でも $e^{-\mathcal{R}V}$ は違う

←フラクタルとして $\mathbb{Z}^d$ $(d \geqq 2)$ はinfinitely ramified

○ hierarchical model：

(Dyson, Sinai, Gawedzki–Kupiainen)

block spin 変換で直積測度が直積測度に移るモデル

$L \in \mathbb{N}$

$\Lambda_L = \{0,1\}^L = \{i = (i_L, \cdots, i_2, i_1) \mid i_k = 0,1,\ k = 1,2,\cdots,L\}$

$$(\varphi, C\varphi) = (\varphi, C_L\varphi)$$
$$= -\sum_{n=1}^{L} \left(\frac{c}{4}\right)^n \sum_{i_L,\ldots,i_{n+1}} \left(\sum_{i_n,\ldots,i_1} \varphi_{i_L,\ldots,i_1} \right)^2$$

$$e^{-V(\varphi)} = \prod_{i \in \Lambda_L} h(\varphi_i)$$

○ block spin 変換

$$\varphi'_\tau = \frac{\sqrt{c}}{2} \sum_{i_1=0,1} \varphi_{\tau i_1}\ ,\ \ \tau = (\tau_{L-1}, \ldots, \tau_1)$$

$\mathcal{R} C_L = C_{L-1}$

Hierarchical model のくりこみ群

$$\mathcal{R}h(x) \propto e^{\frac{\beta}{2}x^2} \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{x}{\sqrt{c}} + y\right) h\left(\frac{x}{\sqrt{c}} - y\right) dy,\ \ x \in \mathbb{R}$$

$e^{-(\mathcal{R}V)(\varphi')} = \prod_{i\in\Lambda'} (\mathcal{R}h)(\varphi'_i),\ \beta = c^{-1} - 2^{-1}$

くりこみ群の軌道 $h_N = \mathcal{R}^N h_0,\ N = 0, 1, 2, \cdots$

○ Hierarchical model ではくりこみ群は $\mathbb{R}$ 上の測度の集合の上の力学系に帰着　→　既存の数学で手が届くことを期待

○ 固定点：$h_G(x) \propto \exp(-\frac{1}{4}x^2)$ (Gauss 測度)

$\mathbb{Z}^d$ とのアナロジー (e.g., moment)：$c = 2^{1-2/d}$ で c を次元と解釈

$\boxed{\text{○先行研究　ー　} h_G \text{ の近傍　} \leftrightarrow \text{　\textbf{ガウス固定点から遠く離れた領域}はほとんど分かっていない}}$

○ **予想 (triviality)**：$d \geqq 4$ ではくりこみ群の全ての収束軌道は単位分布か h_G に収束する

○ 予想 (臨界次元未満)：$d < 4$ では h_G は不安定固定点で，他に固定点と収束軌道がある

• 結果

定理 (Hara – Hattori – Watanabe)． $s \geqq 0$ をパラメータとする $\mathbb{R}$ 上の測度の族

$$h_{\mathrm{I},s}(x) = \frac{1}{2}(\delta(x-s)+\delta(x+s)), \qquad (1)$$

を single site measure h とする hirarchical model (hierarchical Ising model) について， $d \geqq 4$ ならばある $s_c > 0$ が存在して，くりこみ群の軌道 $\mathcal{R}^N(h_{\mathrm{I},s_c})$ は $N \to \infty$ のとき Gauss 固定点 h_G に弱収束する．「$s \sim s_c$ なら $N = 100$ までに h_G の近傍に入る」◇

Hierarchical Ising measure は Gauss measure と遠く離れている：

ϕ^4 measure $h_\lambda(x) \propto \exp((2\lambda s^2 - \frac{1}{4})x^2 - \lambda x^4)$

$\lambda \to 0$: Gauss 固定点,　　$\lambda \to \infty$: Ising model

○ ガウス固定点近傍の外側からの大局的な軌道の厳密な追跡に初めて成功した

○ 解析手段

$h_N = \mathcal{R}^N(h_{\mathrm{I},s})$ 特性関数

$$\hat{h}_N(\xi) = \mathcal{F}h_N(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x} h_N(x)\, dx$$

Cumulant (truncated n 点関数) $\mu_{n,N} = \mu_{n,N}(s)$

$$\hat{h}_N(\xi) = e^{-V_N(\xi)}, \quad V_N(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,N}\xi^n$$

Ising: $h_0 = h_{I,s}$: $\hat{h}_0(\xi) = \cos(s\xi)$

$$\mu_{2,0} = \frac{1}{2}s^2,\ \mu_{4,0} = \frac{1}{12}s^4,\ \mu_{6,0} = \frac{1}{45}s^6,\ \text{etc.}$$

$$\mu_{2,1} = k\ell,\ \mu_{4,1} = \frac{k}{6}(2k-1)\ell^2,\ \text{etc.}$$

$(\ell = \dfrac{cs^2}{2(k+1)},\ k = e^{\beta cs^2/2})$

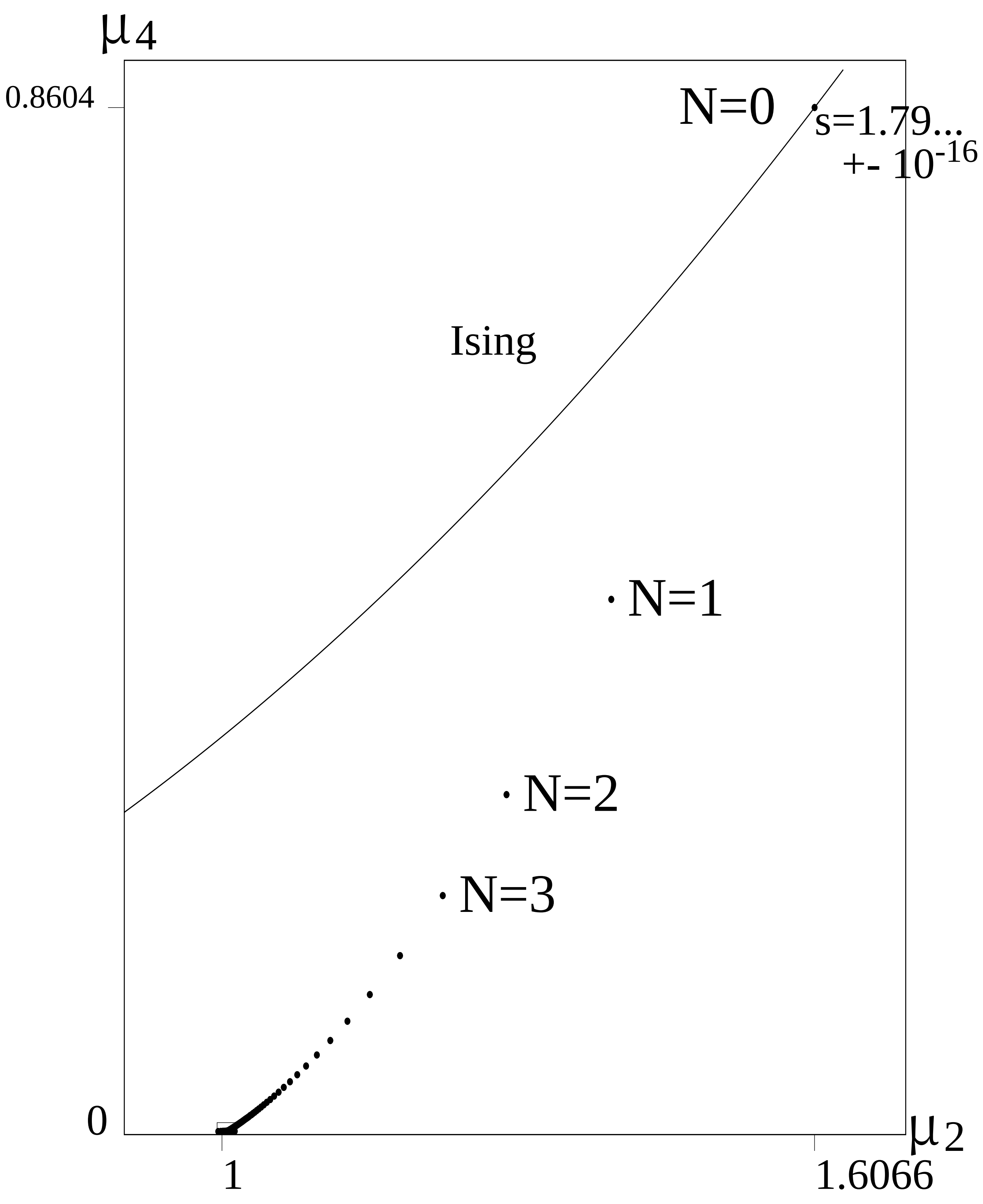
$\boxed{h_N \Leftrightarrow (\mu_{2,N}, \mu_{4,N} \cdots) \in \ell^\infty}$

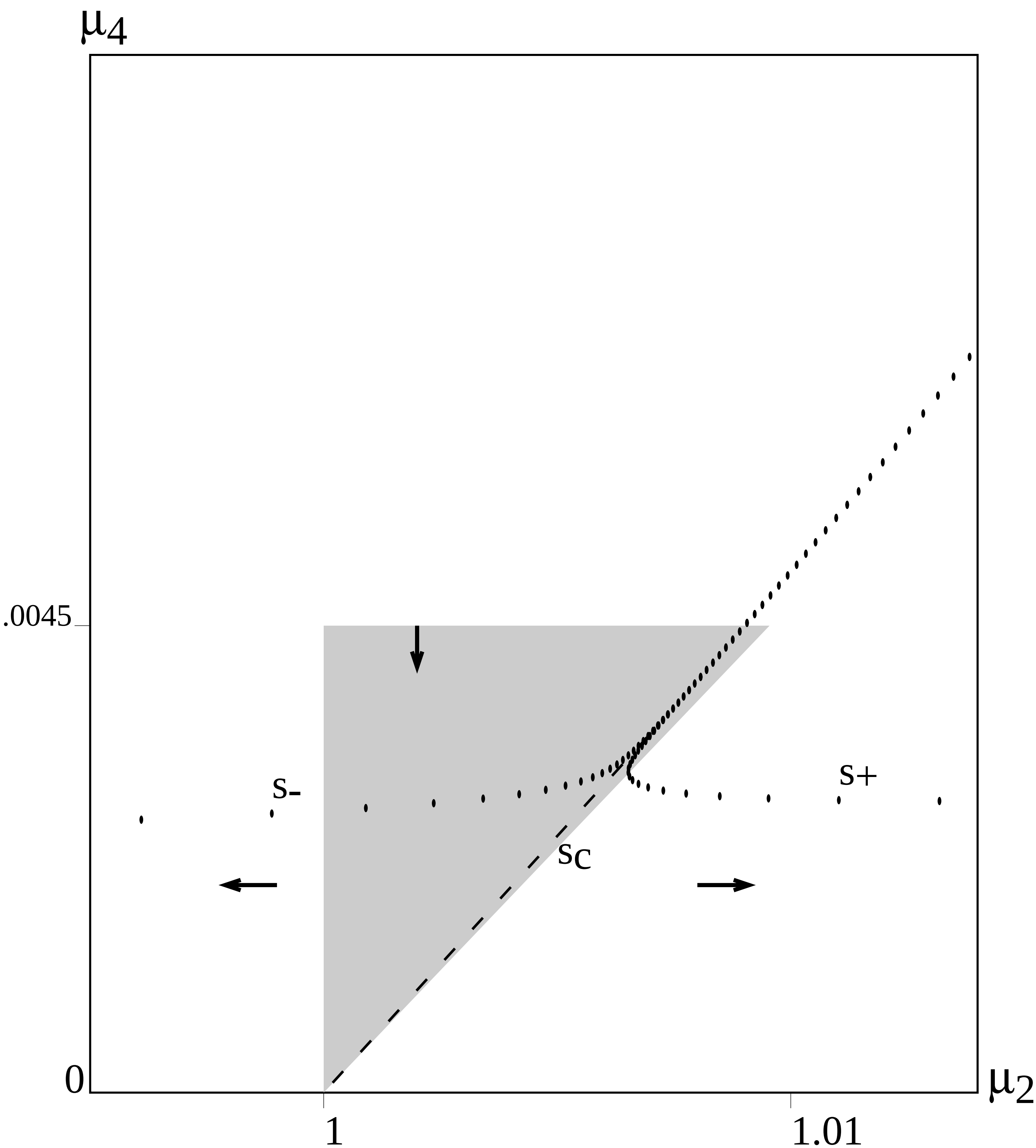
○ 高次の $\mu_{n,N}$ を低次の $\mu_{n,N}$ で抑える（強磁性）

図示：$(\mu_{2,N}, \mu_{4,N}) \in \mathbb{R}^2$ への射影

$d \geqq 4$ では $\mu_{4,N} \to 0$ なる軌道が存在する

$h_N = R^N h_0$ rigorous computer cals
(bounds within blobs)




μ4
.0045
0
μ2
1
1.01
s-
s+
sc

• 問題

○ 何を理解したいか

１．漸近的振舞の s 依存性

大きい N $\Leftrightarrow$ 遠方のスピン間の相関

臨界点 s_c：無限自由度に由来する非解析性

臨界現象： $s \to s_c$，臨界指数

２．次元 d (c) による違いの統一的理解

臨界次元 $d_u = 4$

$d \geqq d_u$: 分子場的振舞 (triviality)

$d < d_u$: 非ガウス固定点への臨界軌道の収束

○ くりこみ群の描像：固定点近傍の力学系の挙動で決まる（既存の数学！）

○ 困難 (の１つ):固定点から離れた元の測度 (canonical surface) から有限回ですなおに落ちること

○ 今回：計算機支援による解決

hirarchical から元のスピン系へ戻りたい

○ くりこみ変換の，**非線形放物型偏微分方程式の解軌道**への埋め込み

$$\begin{aligned}\dot{u}(t,x) &= -\frac{a}{2b}\,u(t,x) - \frac{1}{2}xu'(t,x) \\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{k}\,u(t,x)^2u''(t,x) + 2\bar{k},u(t,x)^2\bar{f}(\frac{t}{2b})\end{aligned}$$

$a = \log\dfrac{2}{c}$, $b = \log\sqrt{c}$, $(\frac{a}{2b} = \frac{2}{d-2})$, $\bar{k} = \dfrac{2-c}{2\log c}\dfrac{\log\frac{4}{c}}{4-c}$,
$\bar{f}(t) = 2^{[t]-t}$

初期値問題 $u(0,x) = (s^2 - x^2)\vee 0$ の解 $u(t,x)$ があれば $G_N(x) = \dfrac{1}{u(2bN,x)}$

ここで G_N は

$$F_N(\xi) = \log\int_{\mathbb{R}} h_N(x)e^{x\xi}dx$$

「V_N の解析接続 $(F_N(\xi) = -V_N(-\sqrt{-1}\xi))$」

$$\Gamma_N(x) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}}(x\xi - F_N(\xi)),\quad G_N(x) = \frac{d^2\Gamma_N}{dx^2}(x)$$

$(\Gamma(-x) = \Gamma(x), \Gamma(0) = 0)$

○ $u(t,x)$ はくりこみ群の軌道の情報を持っている！

○ 有限時間での well-posedness はあるだろう

$\exists\phi(x,t)$: analytic; $u(x,t)=\phi(x,t)\vee 0$

$u(\cdot,t)$ の support は原点を含む区間

$\Rightarrow$ 弱解だが,「古典解」でないのは support の端点だけ，端点の動きは explicit に分かる

○ くりこみ群の翻訳

くりこみ群 $\Leftrightarrow$ 時間発展「微分方程式を解くこと」

臨界点 s_c $\Leftrightarrow$ 固定点へ収束する解の初期値

無限自由度の効果としての相転移 $\Leftrightarrow$ 「$t=\infty$ でのみ well-posedness が壊れる」

（くりこみ群でいうスケール変換は PDE に翻訳すると隠れる）

○ $\bar{f}$ を定数に置いた方程式の固定点に関しては以下が分かっている（元の PDE は全て未解決）

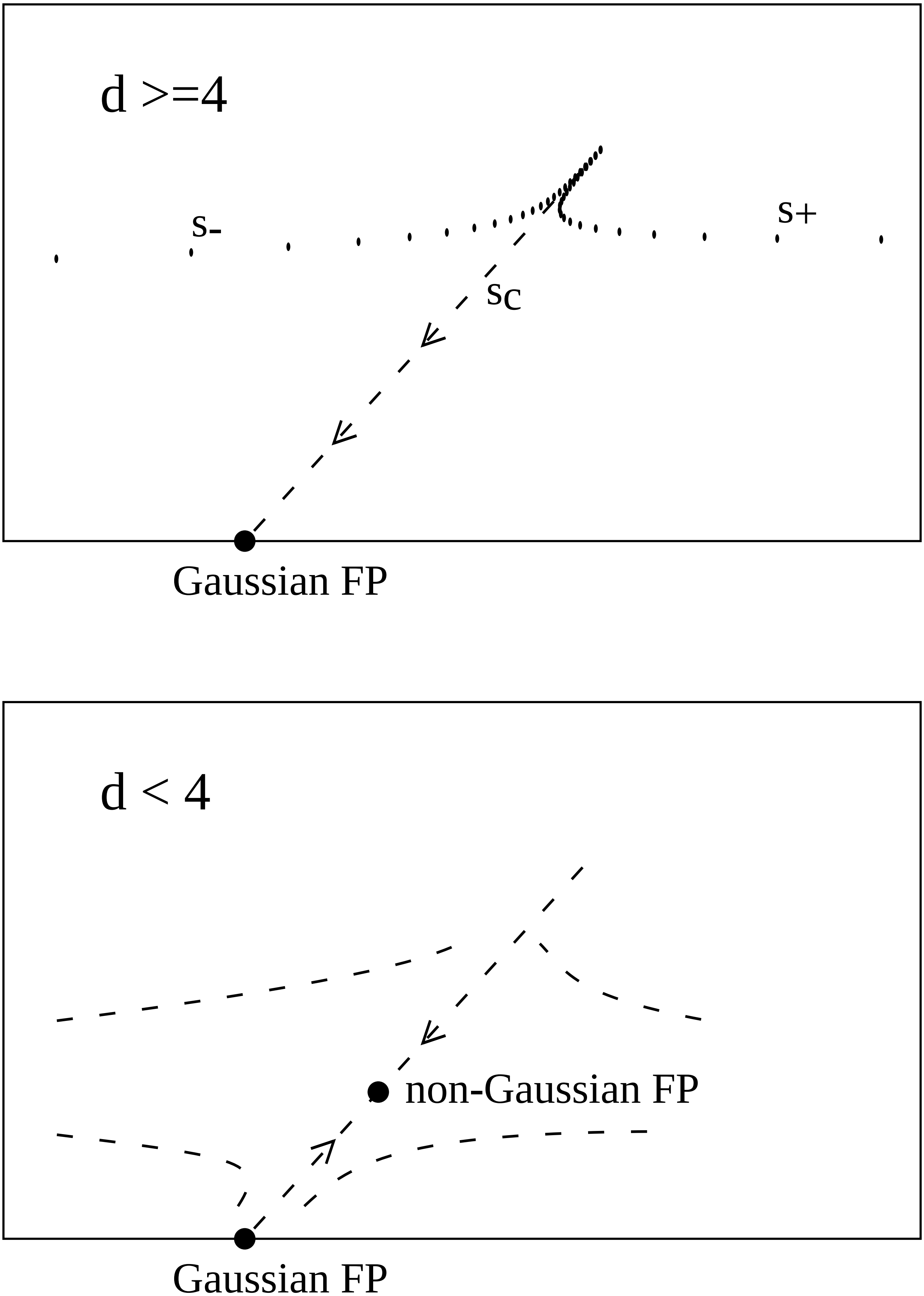
１．ガウス固定点（定数関数） $u(t,x)=\dfrac{a}{4b\bar{k}\bar{f}}$

２．非ガウス固定点（定数関数以外の時間方向に一定の有界な解析解）

$d \geqq 4$ ではない

$3 \leqq d < 4$ ではある

porous medium type eq with constant f



• **まとめ**

4 次元 hierarchical Ising model のくりこみ群の臨界軌道の存在

○無限次元パラメータ空間 (測度空間・関数空間) 上のくりこみ群

• 固定点近傍：不等式で有限次元に押さえ込む

• 大局的な軌道追跡：Gauss 固定点から遠く離れた Ising measure からの厳密な評価（計算機支援）

○課題（　＝　可能性）

$\mathbb{Z}^d$ 上のスピン系のくりこみ群に向けて

• $d \leqq 4$ では d とともにくりこみ群の flow が大きく変わる (予想) →くりこみ群の可能性

• くりこみ群力学系の軌道が大局的に素直な不変部分集合？(Lee-Yang property, Newman's bound)