確率論入門II

服部哲弥

START

↱

０．イントロ

確率論入門I（春学期）：有限集合と$\mathbb{Z}_+$上の確率測度

問1−1：$0 < p < 1$とする．表が出る確率がpの硬貨をn回投げるとき，表の枚数N_nの期待値と分散を求めよ． ◇

２項分布（春学期７既出）

- **有限集合の上の確率測度：**

試行の集合$\Omega = \{(0,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0),\ldots,(1,1,\ldots,1)\}$
の要素の数（Ωの濃度）$\sharp\Omega = 2^n$

- **独立確率変数の和の期待値と分散の加法性を用いる解法**

σ加法性

問1–2：$0 < p < 1$とする．表の出る確率がpの硬貨を初めて表が出るまで投げるとき，有限回で終わらない（永遠に裏が出続ける）確率と，裏が出た回数の合計の期待値と分散を求めよ． ◇

幾何分布（春学期８既出）

確率測度：σ加法性と非負値性を持ち$\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1$を満たす集合関数

確率変数の期待値や分布（確率測度）のモーメントなどは級数で定義

確率１で（つまり現実には必ず）有限回で終わるが，ベルヌーイ試行で表すとΩは有限集合にならない．$\Omega = \{0, 1$ の無限列$\}$

パラドックス：無限列１つだけの事象は$\mathrm{P}[\,\{\omega\}\,] = 0$だから

$$\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1 \neq 0 = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}[\,\{\omega\}\,]$$

σ加法族

（再掲）パラドックス：無限列1つだけの事象は$\mathrm{P}[\,\{\omega\}\,]=0$だから

$$1=\mathrm{P}[\,\Omega\,]\neq\sum_{\omega\in\Omega}\mathrm{P}[\,\{\omega\}\,]=0$$

パラドックスの解決：

無限列の集合の確率は根元事象の確率の和で書けるとは限らない

副産物：確率が定義できない集合があるかもしれない

σ加法族:可算和と補集合に関して閉じているΩの集合族（集合の集合）

確率測度：σ加法族を定義域とする，σ加法性を持つ非負値集合関数（**測度**）であって，$\mathrm{P}[\,\Omega\,]=1$を満たすもの（完全版！）

公理的確率論（コルモゴロフ）

実数上の確率測度

問 1–3：1ヶ月あたりの世界の航空事故は平均4のポワッソン過程にほぼ従うという．最後の事故がいまから1週間前にあったとき，いまから半月以内に事故のある確率を求めよ． ◇

指数分布（春学期9 既出）

非負実数$\mathbb{R}_+ = \{$無限小数$\}$：ベルヌーイ試行の無限列全体と同様

$\Omega = \mathbb{R}_+$上の確率Pの定義域$\mathcal{F}$に含まれない集合がありうる

$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$：$\mathbb{R}_+$の区間を全て含む最小のσ加法族

ボレル確率測度空間$(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathrm{P})$

指数分布：$\mathrm{P}[\,[a,b]\,] = w\displaystyle\int_a^b e^{-wt}dt$ で定まる$\mathbb{R}_+$上の確率測度

ガウス積分と正規分布

問 1–4：$z = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ を計算せよ． ◇

$\rho_{0,1}(x) = \dfrac{1}{2z}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ は $\mathbb{R}$ 上の確率測度（**標準正規分布**）$N = N(0,1)$ の密度関数

平均 m，分散 v の正規分布（ガウス分布）$N(m,v)$ の密度関数：

$$\rho_{m,v}(x) = \frac{1}{2z\sqrt{v}}e^{-\frac{1}{2v}(x-m)^2}$$

中心極限定理

- $\Omega = \mathbb{R}$のとき，**特性関数**$\phi(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}x\,t}\mathsf{P}[\,dx\,],\ t \in \mathbb{R}$.

ここで，$e^{\sqrt{-1}\xi} = \cos\xi + \sqrt{-1}\sin\xi$，複素数値関数の積分は実部と虚部それぞれの積分を実部と虚部とする複素数．

- $\phi(0) = 1$，$\phi'(0) = \sqrt{-1}m$，$(\log\phi(x))''(0) = -v$

問 1–5：平均m，分散$v > 0$で特性関数がϕの分布に従う独立確率変数列$X_1, X_2, \ldots$について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\mathsf{E}[\,e^{\sqrt{-1}t\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m)}\,]$を計算せよ． ◇

大数の法則：期待値が存在する独立同分布確率変数列について，

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m) \to 0,\ \text{a.e.},\ (n \to \infty)$$ （春学期１０）

平均は決定論に収束．バラツキの小さくなりかた？　**中心極限定理**

秋学期の目標

実用上頻繁に現れる確率の計算の基礎，特に，
非可算無限集合の上の確率測度，さらに特に，
積分を用いて定義される確率測度に基づく計算に習熟すること

数学的にやや進んだ話題
・確率変数や確率測度の収束，
・関数や測度の集合上の確率測度や確率過程
は，基礎から講義しきることはできないので，幾つかの高度な結果を認めて（積み残しあり），聞きかじっておくべき先の基礎事項を盛り込む．

秋学期の内容の予定

ランダムウォーク
非可算無限集合の上の確率測度
実数上の確率測度
ガウス積分と正規分布
母関数と特性関数
同時分布
独立性と特性関数
多次元正規分布
中心極限定理
特性関数の収束
その他

教科書等

春学期の内容，特に，有限集合と$\mathbb{Z}_+$上の確率測度は**既習**とする

教科書：　服部哲弥「統計と確率の基礎 第３版」，学術図書，2014年

- 自力で読んで雰囲気がつかめ，部分的に計算もできることが秋学期の目標
- 教科書にある問題は解答を教科書参照ですませる

ウェブ：　服部哲**弥** 確率論入門　（この講義スライドと過去問）

- 服部哲**弥**／ホーム／「統計と確率の基礎」／補足と訂正

レポート：　keio.jp ３回の予定（紙掲示無し，講義とkeio.jp要確認）

成績・単位：　**学期末定期試験**

- 傾向はウェブの過去問（略解付き）を参照
- 講義＋講義スライド＋レポート＋教科書

復習：積分の変数変換１

正規分布の話以降で，あちこちで使うので．

$x' = x - c$: $\displaystyle\int_a^b f(x-c)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x')\,dx'$

例： $\displaystyle\int_a^b (x-2)^3 dx = \int_{a-2}^{b-2} x'^3 dx' = \frac{1}{4}\left[x'^4\right]_{a-2}^{b-2} = \frac{1}{4}\Big((b-2)^4 - (a-2)^4\Big)$

たしかめ：合成関数の微分 $((x-2)^4)' = 4(x-2)^3$ **から，** $\displaystyle\int_a^b (x-2)^3 dx = \frac{1}{4}\left[(x-2)^4\right]_a^b = \frac{1}{4}\Big((b-2)^4 - (a-2)^4\Big)$ **となって成り立つ**

例（ガウス積分）： $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-(x-m)^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x'+m)^2 e^{-x'^2/2} dx'$

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} (x'^2 + 2mx' + m^2) e^{-x'^2/2} dx' = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx + m^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

『$\infty \pm m = \infty$』**（極限の意味で理解）**

- **重積分でも同様**

復習：積分の変数変換２

$x' = c\,x$: $\displaystyle\int_a^b f(c\,x)\,dx = \int_{ac}^{bc} f(x')\frac{1}{c}\,dx'$

例： $\displaystyle\int_a^b e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} e^{x'}dx' = \frac{1}{2}\left(e^{2b} - e^{2a}\right)$

たしかめ：合成関数の微分 $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ **から，** $\displaystyle\int_a^b e^{2x}dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_a^b = \frac{1}{2}\left(e^{2b} - e^{2a}\right)$ **となって成り立つ**

例： $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x'/2)^2 e^{-x'^2/2}dx' \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx$

『$2\infty = \infty$』（極限の意味で理解）

復習：積分の変数変換３

・重積分では積分変数変換のヤコビ行列式
（１年微分積分の最後でいちおうやったことになっている…）

$$dx\,dy = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\, x}{\partial x'} & \dfrac{\partial\, x}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial\, y}{\partial x'} & \dfrac{\partial\, y}{\partial y'} \end{matrix} \right\| dx'\,dy'$$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x'/c)\,dx' \ \ (x' = c\,x)$ の，線形代数的にすなおな，拡張！

直交変換：直交行列O（${}^tOO = E$，Eは単位行列）に対して$\overrightarrow{x} = O\,\overrightarrow{x'}$
なる変数変換のときは，$|O| = \pm 1$なので，$dx_1 \ldots dx_n = dy_1 \ldots dy_n$
（ヤコビ行列式のことは忘れることができる）

積分変数変換の単純な例

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & |x|+|y|\leqq 1,\\ 0, & |x|+|y|>1.\end{cases} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy = c\,|A| = 2c;$$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\leqq 1\}=1$ 辺$\sqrt{2}$の正方形，$|A|=A$ の面積

同じ量の計算を変数変換と逐次積分（Fubini の定理）でやってみる．

$u=x+y$, $v=x-y$ **と変数変換** $|x|+|y|\leqq 1 \Leftrightarrow \pm x\pm y\leqq 1$

$$A=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leqq u\leqq 1,\ -1\leqq v\leqq 1\}=\{(u,v)\mid |u|\leqq 1,\ |v|\leqq 1\}$$

$x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$ →**変数変換のヤコビアン** $=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy = \int_A c\,dx\,dy = \int_{\substack{|u|\leqq 1\\ |v|\leqq 1}} c\times\frac{1}{2}du\,dv = \frac{1}{2}c\int_{-1}^{1}1du\int_{-1}^{1}1dv = 2c$$

復習：極座標とガウス積分

・**積分変数変換の例：**

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

$$dx\,dy = \left\| \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \right\| dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$

・**例：** $z = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2/2} dx$

$$z^2 = \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx \int_0^\infty e^{-y^2/2} dy$$

$$= \int_{\text{第１象限}} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\,dy$$

$$= \int_{r\in[0,\infty)} \int_{\theta\in[0,\pi/2]} e^{-r^2/2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2} \qquad z = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

１．ランダムウォーク

硬貨投げの繰り返し（ベルヌーイ試行）とランダムウォーク

確率空間と確率測度の（簡単版ではない）定義

今回は復習と慣らしがてら，立ち入った話の紹介

硬貨投げの繰り返し

問 1–1：$0 < p < 1$ とする．表が出る確率が p の硬貨を n 回投げるとき，表の枚数の期待値と分散を求めよ． ◇

•表裏の繰り返し＝$\{0,1\}$のいずれかを繰り返し選ぶ（ベルヌーイ試行）

• n 回硬貨投げ：$\{0,1\}^n = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} =$ $\{(0,0,\ldots,0),(0,0,\ldots,1),(0,1,\ldots,0),\ldots,(1,1,\ldots,0)\}$の上の確率測度

• $W_0 = 0,\ W_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(2s_i - 1),\ k = 1,2,\ldots,n,$ とおくと

$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \Leftrightarrow (W_0, W_1, W_2, \ldots, W_n)$ 一対一対応

ランダムウォーク：歩数の関数上の確率測度（すごろく）

（復習）直積測度

試行の集合 $\Omega_n = \{(0,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0),\ldots,(1,1,\ldots,1)\}$

要素の数（Ω_n の濃度）$\sharp\Omega_n = 2^n$

確率測度は？　（春学期７再掲）

1 回の確率測度 $\mathsf{P}_1[\,\{1\}\,] = p,\ \mathsf{P}_1[\,\{0\}\,] = 1-p$ の直積確率測度

$r^0 = 1,\ r^1 = r$ を用いて，$\mathsf{P}_1[\,\{s\}\,] = p^s(1-p)^{1-s}$

$\Omega_2 = \{0,1\}^2 = \{0,1\}\times\{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_2[\,\{(s_1,s_2)\}\,] &= \mathsf{P}_1[\,\{s_1\}\,]\cdot\mathsf{P}_1[\,\{s_2\}\,]\\ &= p^{s_1+s_2}(1-p)^{2-(s_1+s_2)}\end{aligned}$$

ベルヌーイ試行の確率空間

$\Omega_n = \{(0,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(1,1,1,\ldots,1)\}$
$\mathsf{P}_n[\,\{(s_1,s_2,\ldots,s_n)\}\,] = p^{s_1+s_2+\ldots+s_n}(1-p)^{n-(s_1+\ldots+s_n)}$

n 回中の表の枚数 $N_n((s_1,s_2,\ldots,s_n)) = s_1+\ldots+s_n$
確率変数（Ω_n 上の関数 $N_n:\ \Omega_n \to \mathbb{R}$）

$\mathsf{P}_n[\,\{\omega\}\,] = p^{N_n(\omega)}(1-p)^{n-N_n(\omega)}$
$\mathsf{P}_n[\,A\,] = \sum_{\omega\in A} p^{N_n(\omega)}(1-p)^{n-N_n(\omega)}$, $A \subset \Omega_n$
原理的には確率が計算可能（ベルヌーイ試行の確率空間定義完了）

硬貨投げとランダムウォーク

硬貨投げの確率空間の同値だが興味深い書き換え：

数直線上 0 **から始めて，表なら** $+1$**，裏なら** -1 **駒を進めるすごろく**

k **歩目の位置を** W_k $(W_0 = 0)$

$$W_k = \sum_{i=1}^{k} X_i;\ X_i(\omega) = 2s_i - 1 \qquad s_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow X_i(\omega) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \Leftrightarrow W = (W_1, W_2, \ldots, W_n);\ \frac{1}{2}(W_k - W_{k-1} + 1) = s_k$$

一歩ごとに両隣の整数点に動くあらゆる経路 (path) **が可能**

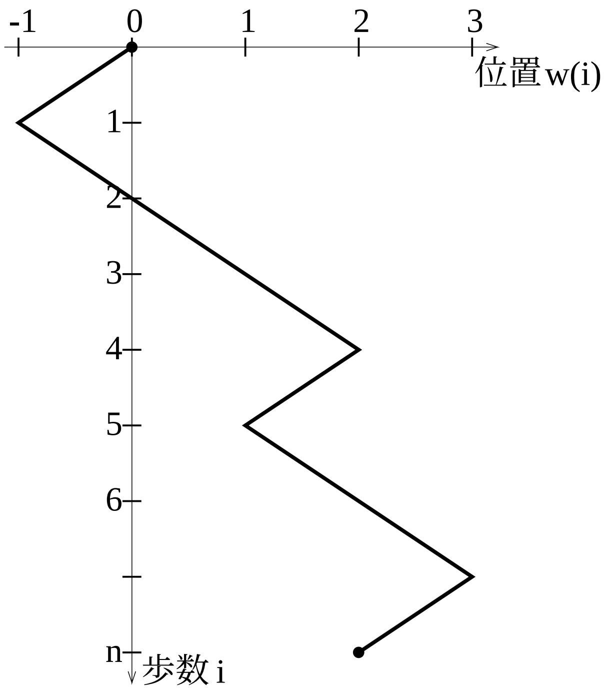
$\tilde{\Omega}_n = \{w :\ \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z} \mid w(0) = 0,\ w(k) - w(k-1) \in \{\pm 1\}, k = 1, 2, \ldots, n\} = (0, 0)$ **を通り隣の整数点との値の差が** ± 1 **の関数全体**

ランダムウォーク (RW)**：**path **の集合上の確率測度（すごろく）**

$$i \neq j\text{:}\ \mathrm{P}[\, X_i = 1 \mid X_j = -1 \,] = \frac{\mathrm{P}[\, \{\omega \mid s_i = 1,\ s_j = 0\} \,]}{\mathrm{P}[\, \{\omega \mid s_j = 0\} \,]} = \frac{p(1-p)}{1-p}$$

$= \mathrm{P}[\, X_i = 1 \,]$ **→（中略）→** $\{X_i\}$ **は独立**

ランダムウォーク



簡単のため以下 $p = 0.5$ **（公平な硬貨）**

$\mathrm{P}_n[\,\{\omega\}\,] = 0.5^n = 2^{-n},\ \omega \in \Omega_n$

$\omega = (s_1, \dots, s_n) \in \Omega_n \Leftrightarrow$

$w:\ \{0, \dots, n\} \to \mathbb{Z}$; path

$\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,] = 2^{-n},\ w \in \tilde{\Omega}_n$

- **硬貨投げの書換なので** w_n **は独立な** n **回の試行の和（表裏の回数の差）**

$Z_k(w) = w(k) - w(k-1),\ k = 1, 2, \dots,$ **独立同分布** $\mathrm{E}[\,Z_k\,] = 0,$

$Z_k^2 = 1 \quad \to$ **種々の量があらわに計算可能**

歩数の極限

大数の法則（春１０既出）：分散の有限な独立同分布確率変数列の平均は期待値に確率収束（概収束も）する． $\diamond$

$Z_k(w) = w(k) - w(k-1),\ k \in \mathbb{N},$ 独立同分布，$\mathsf{E}[\,Z_k\,] = 0$

和が W_k だから，$\dfrac{1}{k} W_k \to 0,\ (k \to \infty)$

ランダムウォークはグラフ上原点を通る傾き１の直線に比べて（比が0に収束するくらいに）原点に近いところにとどまる

ところで，$\tilde{\Omega}_n$ 上では $1 \leqq k \leqq n$ しか定義できない．無限個？極限？

n 歩の path の総数 $\sharp\tilde{\Omega} = 2^n$，一本あたり確率 $= 2^{-n}$．

総歩数 $n \to \infty$ とすると，無限集合．一本の無限長 path あたり確率 0

（根元事象の和で正の確率を得られない）

確率空間の定義（完全版）

ここで確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ の定義（完全版）．$\mathcal{F}$ が Ω の σ 加法族とは

0．空でない集合族：$\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$，$\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$

1．可算和で閉じる：$A_k \in \mathcal{F},\ k \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

2．補集合で閉じる：$A \in \mathcal{F} \ \Rightarrow\ A^c \in \mathcal{F}$

P が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とは

0．集合関数：定義域 $\mathcal{F}$ が σ 加法族，$\mathrm{P}:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

1．非負値：$\mathrm{P}[\,A\,] \geqq 0,\ A \in \mathcal{F}$

2．σ 加法性：$A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \ldots,$ が

$$(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \ \Rightarrow\ \mathrm{P}[\,\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\,] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,A_i\,]$$

3. 全測度 1：$\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1$

春は簡単版：σ 加法性はポワッソン分布で紹介済だが，$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ で，根元事象の確率で任意の集合の確率を $\mathrm{P}[\,A\,] = \displaystyle\sum_{\omega \in A} \mathrm{P}[\,\{\omega\}\,]$ で定義できる場合のみを扱った

問 1–1 の答え

問 1–1：$0 < p < 1$ とする．表が出る確率が p の硬貨を n **回投げる**とき，表の枚数の期待値と分散を求めよ． ◇

２項分布（春７の復習）：$\mathsf{P}_n[\,\{\omega\}\,] = p^{N_n(\omega)}(1-p)^{n-N_n(\omega)}$ （今回４頁目）

$$\mathsf{E}_n[\,N_n\,] = \sum_{\omega\in\Omega} N_n(\omega)p^{N_n(\omega)}(1-p)^{n-N_n(\omega)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sharp\{\omega \mid N_n(\omega) = k\}kp^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathsf{C}_k kp^k(1-p)^{n-k} = \cdots = np$$

$$\mathsf{V}_n[\,N_n\,] = \mathsf{E}_n[\,(N_n-np)^2\,] = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathsf{C}_k(k-np)^2p^k(1-p)^{n-k} \cdots = np(1-p)$$

別解：**独立**確率変数の和の期待値と分散の**加法性**を用いる解法

$\mathsf{E}_n[\,X_1\,] = p$, $\mathsf{V}_n[\,X_1\,] = \mathsf{E}_n[\,(X_1-p)^2\,] = p(1-p)^2+(1-p)p^2 = p(1-p)$．

$\mathsf{E}_n[\,N_n\,] = \mathsf{E}[\,X_1\,] + \cdots + \mathsf{E}[\,X_n\,] = np$,

$\mathsf{V}_n[\,N_n\,] = \mathsf{V}[\,X_1\,] + \cdots + \mathsf{V}[\,X_n\,] = np(1-p)$. □

まとめ

春学期の復習：直積確率測度，k 回目の結果を表す確率変数，2 項分布，期待値の線形性，独立確率変数における分散の加法性

ランダムウォーク：硬貨投げの累積値を歩数の関数と見る，path の集合上の確率測度，大数の法則の図形的意味

σ加法族と確率空間の定義（完全版）：**σ加法族**とは可算和と補集合で閉じる，空でない集合族．**確率測度**とはσ加法族を定義域とする非負値集合関数で全体集合に対して 1 を与え，σ加法性を満たすもの

２．非可算無限集合の上の確率測度

ランダムウォーク

確率空間と確率測度の（簡単版ではない）定義

今回も復習がてら，原理主義的なお話の紹介

無限回硬貨投げの空間が必要な理由

$0 < p < 1$ とする．表が出る確率が p の硬貨を繰り返し投げる．

問 1–1（前回）：硬貨を n 回投げるとき，表の枚数の期待値と分散を求めよ． ◇

- 硬貨投げの n 個の直積 Ω_n 上の直積確率測度で表せる

問 1–2：硬貨を初めて表が出るまで投げるとき，有限回で終わらない（永遠に裏が出続ける）確率と，裏が出た回数の合計の期待値と分散を求めよ． ◇

- 幾何分布（春８既出）→答えは分かる．有限回で表が出る確率が 1．
- しかし，$\Omega_{100}, \Omega_{1\,\text{億}}, \Omega_{1\,\text{京}}, \ldots$ はこの確率を表しきれない．

確率の定義（完全版）

確率 1 で（つまり現実には必ず）有限回で終わるが，ベルヌーイ試行で表すと Ω は有限集合にならない．$\Omega = \{0, 1 \text{の無限列}\}$

パラドックス：無限列 1 つだけの事象は $\mathrm{P}[\,\{\omega\}\,] = 0$ だから
$\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1 \neq 0 = \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}[\,\{\omega\}\,]$：「根元事象」が役に立たない

パラドックスの解決：
- 無限列の集合の確率は根元事象の確率の和で書けるとは限らない
- 副産物：確率が定義できない集合があるかもしれない

σ 加法族：可算和と補集合に関して閉じている空でない Ω の集合族
確率測度：σ 加法族を定義域とする，σ 加法性を持つ非負値集合関数（**測度**）で $\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1$ を満たすもの**（完全版！）**
公理的確率論（**コルモゴロフ**）

σ加法族の定義について

σ加法族の定義の由来：確率測度の定義域を制限するにしても，**和事象**や**余事象**などは考えられるはず．→ $A \cup B$ と A^c で閉じていれば有限個の集合算は全て閉じる（cf. **ドモルガンの法則**）．さらに**σ加法性**を無条件で期待するので，**可算和**についても閉じている必要

例：$\mathcal{F}$ が空でなければ（何か $A \in \mathcal{F}$ ならば），$A^c \in \mathcal{F}$，ゆえに $\Omega = A \cup A^c \in \mathcal{F}$，ゆえに $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$．すなわち，
σ加法族は，最低限空集合と全体集合を要素に持つ．
→ $\mathrm{P}[\,\Omega\,]$，$\mathrm{P}[\,\emptyset\,]$ が存在．確率なので前者は 1 と決まっている．春の公式から $\mathrm{P}[\,\emptyset\,] = 1 - \mathrm{P}[\,\emptyset^c\,] = 1 - \mathrm{P}[\,\Omega\,] = 0$

例1：$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ はσ加法族
例2：Ω の全ての部分集合を集めた集合族はσ加法族 **（春学期の簡単版）**

経路上の確率測度

- $\mathbb{Z}_+$ 上の確率は根元事象の $\mathrm{P}[\,\{k\}\,]$ 達で書ける（春８ポワッソン分布）
- σ加法族が重要＝根元事象の確率の和で定義できない「連続無限集合」

ランダムウォーク：無限長の path の集合

$$\Omega = \{w:\ \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z} \mid w_0 = 0,\ |w_k - w_{k-1}| = 1,\ k \in \mathbb{N}\}$$

最初の有限歩で決まる集合（筒集合 cylinder set）

例：$C(0,1,2,1) = \{w:\ \text{path} \mid w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 1\} \subset \Omega$

$\mathrm{P}[\,C(0,1,2,1)\,] = 2^{-3} = 1/8$ 等となれば有限歩の自然な拡張

問題：n 歩で決まる筒集合を全て定義域 $\mathcal{F}$ に含み，その確率が 2^{-n} である path 上の確率 P はあるか？

答え：ある（拡張定理）但し，基礎事項にしては抽象的で長い証明

$\mathbb{R}$ 上の確率測度

無限長 path⇔無限回の硬貨投げ $\Leftrightarrow$ 0, 1 の無限列 $\Leftrightarrow$ 無限小数 (2 進法)
$(0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, \dots) \Leftrightarrow (1, 1, 1, 0, 1, 0, \dots) \Leftrightarrow 0.111010\dots$
$\Leftrightarrow \dfrac{29}{32} + \dots$ ．よって path 空間 $\Omega \Leftrightarrow [0, 1)$
実際，1 点の長さは 0．区間 $[0, 1)$ の長さは 1．区間も点（実数）の集まりだが 0 を足しても 1 にはならない．

$\Omega = [0, 1], \mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ の上の確率測度も path 上の測度と同様の手順

例．$\mathsf{P}[\ [a, b]\ ] = b - a$（$[0, 1)$ 上の一様分布）

例．$\mathsf{P}[\ [t, \infty)\ ] = e^{-t}$（$\mathbb{R}_+$ 上の指数分布）

1 次元ボレル確率測度：区間を全て要素として持つ最小の σ 加法族 $\mathcal{F}$ を定義域とする確率測度

・ ランダムウォーク，特に，その連続極限であるブラウン運動は重要だが，この講義では地味な実数上の確率測度の練習に集中する

可算無限と非可算無限

$\Omega=\mathbb{Z}_+$→根元事象で書ける，$\Omega=\mathbb{R}$→書けない

可算集合：自然数$\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$，整数$\mathbb{Z}$，有理数$\mathbb{Q}$,（偶数の集合$2\mathbb{Z}$などかってな部分集合,）有限集合．

定義：自然数の集合$\mathbb{N}$と1：1**対応**があること（無限行のレポート用紙に1行1要素ずつ書いて尽くせること＝数え上げられるenumerable）

例：$f:\ \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$を$f(i)=\begin{cases}\frac{1}{2}i-1, & i\in 2\mathbb{N},\\ \frac{1}{2}(-i-1), & i\notin 2\mathbb{N}\end{cases}$

非可算集合：実数$\mathbb{R}$や区間$[0,1]$，$\mathbb{R}^n$,pathの集合，連続関数の集合

リストがあるとすると，j行目の実数を小数点表示してj桁目が違う小数を作ると，リストから漏れている．**カントールの対角線論法**

（参考）測度の拡張定理

問題：ランダムウォークやボレル確率測度の定義

解1：$\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}=\{$ 筒集合達 $\}(\{$ 区間達 $\})$ を含む最小の σ 加法族

$$\mathcal{F}=\sigma[\mathcal{C}]=\bigcap_{\mathcal{G}:\mathcal{C}\text{を含む}\sigma\text{加法族}}\mathcal{G}$$

数学的抽象性の威力

問2：$W\in\mathcal{F}$ に対して $\mathsf{P}[\,W\,]$ はどう定義すると確率の公理を満たす？

解2：外測度 $\Gamma(A)=\inf_{I_i\in\mathcal{C};A\subset I_1\cup\cdots}\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}[\,I_i\,]$,

可測集合：$\mathcal{F}'=\{E\subset\Omega\mid\Gamma(A)=\Gamma(A\cap E)+\Gamma(A\cap E^c),\ \ A\subset\Omega\}$

- （$\mathcal{C}$ の性質によって）$\mathcal{F}'$ は σ 加法族で $\mathcal{C}$ を含む（ので，$\mathcal{F}$ の最小性から $\mathcal{F}$ の中の集合はどれも可測集合）
- $E\in\mathcal{F}$ に対して $\mathsf{P}[\,E\,]=\Gamma(E)$ とすると $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ は（作り方から）確率空間

問3：$W\in\mathcal{C}$ のとき事前に設定した値になっているか？
（例：$\mathsf{P}[\,C(0,1,2,1)\,]=1/8,\ \mathsf{P}[\,[a,b]\,]=b-a$）

解3：（P の $\mathcal{C}$ 上での連続性＝σ 加法性によって）P は $\mathcal{C}$ 上で事前に設定した値に一致

問のコメント

問 1–2：$0 < p < 1$ とする．表の出る確率が p の硬貨を初めて表が出るまで投げるとき，有限回で終わらない（永遠に裏が出続ける）確率と，裏が出た回数の合計の期待値と分散を求めよ． ◇

無限回硬貨投げの空間 $\Omega = \{s = (s_1, s_2, \ldots) \mid s_k \in \{0, 1\},\ k \in \mathbb{N}\}$
$k+1$ 回目に初めて表が出る事象 A_k（裏の回数が k）とおく．A_k たちは排反．例：$A_0 = \{s \in \Omega \mid s_1 = 1\},\ A_1 = \{s \in \Omega \mid (s_1, s_2) = (0.1)\}$．有限回で表が出る事象は $B = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$．注：和の記号の ∞ は「無限回目」を合わせるという意味ではなく，全ての自然数についての和集合の意味．級数の極限の意味でもない（春既出）
A_k たちは最初の有限回で決まる（拡張定理における筒集合）ので，Ω_{k+1} での確率に等しく $\mathrm{P}[\,A_k\,] = p(1-p)^k$

σ 加法性から $\mathrm{P}[\,B\,] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}[\,A_k\,] = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = \dfrac{p}{1-(1-p)} = 1$

よって有限で終わらない確率は $\mathrm{P}[\,B^c\,] = 1 - 1 = 0$．

裏の回数の平均 m と分散 v は $m = \sum_{k=0}^{\infty} k\,p\,(1-p)^k$，$v = \sum_{k=0}^{\infty} (k-m)^2\,p\,(1-p)^k$．

これらは幾何分布（春８問 8–1 既出），教科書「統計と確率の基礎 第３版」練習問題２問４を参照 □

まとめ

・**σ加法族**：可算和と補集合について閉じているΩの空でない集合族

・**確率測度（完全版の定義）**：Ωのσ加法族を定義域とする，σ加法性を持つ非負値集合関数（測度）で$\mathrm{P}[\Omega]=1$を満たすもの

・σ加法族の必要性：Ωが**非可算**無限集合のとき根元事象の確率の和で書けない．拡張定理による定義は全ての集合に確率が定義できない

・無限回硬貨投げ（無限長pathの集合）の必要性：表が出るまで投げる事象（確率1で有限回で表が出るが，事象の定義に無限回硬貨投げ空間必要）

・有限回で決まる事象（**筒集合**）は有限回硬貨投げの確率に等しい

→**定義は拡張定理によるが計算は有限集合で正しい答え**

・$\mathbb{R}$も非可算（無限小数の集合）．**区間**の確率＋拡張定理**（ボレル確率測度）**

３．実数上の確率測度

測度と積分

実数の集合 $\mathbb{R}$ 上の確率測度

今回は原理的な話と実用的な話を細い線でつなぎます

レポート１ ＠ keio.jp

積分が定義する確率

問1–3：1ヶ月あたりの世界の航空事故は平均4のポワッソン過程にほぼ従うという．最後の事故がいまから1週間前にあったとき，いまから半月以内に事故のある確率を求めよ． ◇

指数分布（春学期9既出）

$\mathbb{R}$ 上の測度

（前回）$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $[0,1]$, $\mathbb{R}_+$, は非可算集合

実数＝無限小数＝数字の無限列＝無限硬貨投げ→対角線論法＝$\mathbb{N}$ と 1:1 対応が無い

→ １点ごとの確率 P[$\{a\}$] と σ 加法性では確率を計算できない

区間に対する値 P[$[t,\infty)$],P[$[a,b]$] ＋（外測度と可測集合を用いた） 拡張定理→ $\mathbb{R}$ の σ 加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の σ 加法性を持つ集合関数 P（確率）

$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$：$\mathbb{R}_+$ の区間を全て含む最小の σ 加法族

ボレル確率測度空間 $(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\mathrm{P})$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に含まれない集合がありうる（普通の集合は入るので困らない）

実際に計算するとき：区間に対してはあからさまに与えてあるはず．区間の可算和（補助的に補集合や共通部分も使用）で書ければ級数計算

ルベーグ測度

$\Omega = [0,1]$ 上の一様分布：$\mathrm{P}[\,[a,b]\,] = b - a$.

$\mathbb{R}$（$\mathbb{R}_+$ でも同様）上でも区間に対して $\mu([a,b]) = b - a$ を満たし，σ加法性を持つボレルσ加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上の集合関数が存在（拡張定理）

$\mu(\mathbb{R}) = +\infty$ となることを除けば確率測度と同様：**（ルベーグ）測度**

例：$0 \leqq \mu(\{c\}) \leqq \mu([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) = 2\varepsilon$ （非負値性と単調性と区間の長さ）．ε は任意の正数だから $\mu(\{c\}) = 0$.

例：有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合（分母＋分子と分子の辞書式で一列に並ぶ）なのでσ加法性から $\mu(\mathbb{Q}) = 0$

例：$1 = \mu([0,1)) = \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} [1-2^{-k}, 1-2^{-k-1}))$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu([1-2^{-k}, 1-2^{-k-1})) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$ 矛盾がない

素朴な意味の長さだが，複雑な集合でも測度が存在する場合がある

ルベーグ積分

$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$が（ボレル）**可測関数**とは，$D(a):=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)<a\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$が，全ての$a\in\mathbb{R}$に対して成り立つことを言う．

例：$\mathcal{B}(\mathbb{R})$は開区間を（閉区間等も）全て含む一方，$\mathbb{R}$の開集合は可算個の開区間の和集合で表せる．連続関数は開集合の逆像が開集合なので，**連続関数は可測関数**

・**ルベーグ測度**μ，非負値可測関数$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$に対して

$$S_n=\sum_{k=0}^{n\cdot 2^n}k\cdot 2^{-n}\mu(D((k+1)2^{-n})\cap D(k2^{-n})^c)$$

$$=\sum_{k=0}^{n\cdot 2^n}k\cdot 2^{-n}(\mu(D((k+1)2^{-n}))-\mu(D(k2^{-n})))$$ はnについて非減少なので，$S=\lim_{n\to\infty}S_n\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ が存在する．これをfの**（ルベーグ）積分**$S=\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu=\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mu(dx)$と言う

積分で与えられる確率

- （ルベーグ）積分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx)$
- 積分範囲を限定するのは，f を $f\,\mathbf{1}_{[a,b]}$ に置き換えれば良い

  一般に $\displaystyle\int_A f\, d\mu := \int_{\mathbb{R}} f\ \mathbf{1}_A\ d\mu$

- 普通の（リーマン）積分が存在するとき（例えば連続関数）は一致

リーマン積分は複雑な集合上（積分範囲）の積分が定義できないのでσ加法性不成立

- f と x 軸で囲まれた領域の面積（$\mathbb{R}^2$ の２次元ルベーグ測度）
- 負の値も取る関数については，正の部分と負の部分にわけてそれぞれの積分の差で

定義：$f = f_+ - f_-$，$f_\pm \geqq 0$，$\displaystyle\int f\, d\mu = \int f_+\, d\mu - \int f_-\, d\mu$

$\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu\ =\ 1$ となる非負値関数 f があれば，$A\ \subset\ \mathbb{R}$（正しくは $A\ \in$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$）に対して $\mathrm{P}[\ A\ ] = \displaystyle\int_A f\, d\mu$ とおくと，σ加法性を満たす $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の集合関数，すなわち f を密度関数とする確率測度を定義する

指数分布

指数分布：$\mathsf{P}[\,[a,b]\,] = w\int_a^b e^{-wt}dt$ で定まる$\mathbb{R}_+$上の確率測度

例：$\mathsf{P}[\,[a,b]\,] = -\left[e^{-wt}\right]_a^b = e^{-aw} - e^{-bw}$,

$\mathsf{P}[\,[a,\infty)\,] = -\left[e^{-wt}\right]_a^\infty = e^{-aw}$

（復習 春９）強度$\lambda > 0$のポワッソン過程X_t：小さな確率の独立な原因が時間的に一様にある場合の事件生起．t時間事件が起きない確率＝$\mathsf{P}[\,X_t = 0\,] = e^{-t\lambda}$ →事件発生数はポワッソン分布，**事件発生間隔は指数分布**

指数分布の計算例

$$\mathsf{P}[\,[a,b]\,] = \int_a^b \rho(t)\,dt,\ \rho(t) = we^{-wt}$$

•故障率wの機械がt時間無事の確率$\mathsf{P}[\,[t,\infty)\,] = \int_t^\infty we^{-wt}dt = e^{-wt}$

• 半減期Tの放射性元素の原子$\mathsf{P}[\,[0,T]\,] = \mathsf{P}[\,[T,\infty)\,] = e^{-wT} = 1/2$ →崩壊率$w = \dfrac{1}{T}\log 2$ →t時間以内に放射線を出す確率は

$$\mathsf{P}[\,[t,\infty)^c\,] = 1 - e^{-wt} = 1 - e^{-(t/T)\log 2} = 1 - 2^{-t/T}$$

• 時刻sまで無事の条件で時刻$t > s$まで無事の条件付確率（春４）

$$\mathsf{P}[\,[t,\infty) \mid [s,\infty)\,] = \frac{\mathsf{P}[\,[t,\infty)\,]}{\mathsf{P}[\,[s,\infty)\,]} = e^{-wt+ws} = e^{-w(t-s)}.$$

条件時点sを時刻計測の原点に取れば同じ故障率の指数分布になる（いつから事故が起きてないかに無関係＝指数分布の無記憶性）

コメント

問 1–3：1ヶ月あたりの世界の航空事故は平均４のポワッソン過程にほぼ従うという．最後の事故がいまから１週間前にあったとき，いまから半月以内に事故のある確率を求めよ． ◇

（春学期９既出） 答えは教科書「統計と確率の基礎 第３版」練習問題 A 問４参照

時刻 t から $\triangle t$ 時間に最初の事件が起きる確率 $= \mathrm{P}[\,[t, t + \triangle t]\,]$ はほぼ $w\,e^{-wt}\,\triangle t$．**確率密度** we^{-wt} はその時刻での時間あたりの発生率

経済学では伝統的に，微分（密度など）を「限界○○」と呼んできた（例．限界効用低減の法則,「限界革命」）．

まとめ

- **ボレル確率測度**空間 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathsf{P})$
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $[0,1]$, $\mathbb{R}_+$, は非可算集合（$\mathsf{P}[\,[t,\infty)\,]$,$\mathsf{P}[\,[a,b]\,]$ と拡張定理による確率測度の定義）
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$：$\mathbb{R}_+$ の区間を全て含む最小のσ加法族（普通の集合の確率は問題ないが確率が決められない集合があり得る）
- $\mathbb{R}$ 上の**ルベーグ測度**（$\mu([a,b]) = b - a$ で決まる測度）
- 可測関数，ルベーグ積分，**確率密度**関数の積分で与えられる確率測度

一様分布：$\Omega = [0,1]$，$\mathsf{P}[\,[a,b]\,] = b - a$

指数分布：$\mathsf{P}[\,[t,\infty]\,] = e^{-wt} = \displaystyle\int_t^{\infty} \rho(t)dt$

ポワッソン過程，半減期，事故率，**指数分布の無記憶性**

４．ガウス積分と正規分布

正規分布

ガウス積分

今回から（ガウス積分の計算という意味で）実用的な話

ガウス積分

問1–4：$I = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ を計算せよ． ◇

２次元ルベーグ測度：μ_2(長方形) $=$ μ_1(縦) μ_1(横) なる測度（面積）
１次元ルベーグ測度 μ_1 の直積測度に等しい（どちらも長方形に同じ値を対応させる，拡張定理で唯一存在が証明される測度だから）

フビニの定理：$\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,y)|dxdy < \infty$（**可積分**）ならば

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right)dy$$

重積分＝**逐次積分**（１次元積分の繰返し）

ガウス積分の計算

$x > 0$．積分変数変換 $y = xz$ で $I := \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2z^2} x\,dz$ だから

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^\infty I \times e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)} x\,dz\right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)} x\,dx\right) dz \quad \text{（フビニの定理）} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(1+z^2)\,u}\,du\right) dz = \int_0^\infty \frac{1}{1+z^2} dz \quad \text{（積分変数変換 } u = \tfrac{1}{2}x^2\text{）} \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2}\pi \quad \text{（積分変数変換 } z = \tan\theta\text{）}
\end{aligned}
$$

問1–4答：$\underline{I = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}$ （ガウス積分） □

標準正規分布

被積分関数は偶関数なので（同じことだが積分変数変換 $x' = -x$ によって）

$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$．よって，$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 1$

よって，$\rho_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ は非負値関数で $\mathbb{R}$ で積分すると 1 だから，積分が定義する確率測度の密度関数になる

標準正規分布 $N = N(0,1)$：$\rho_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ を密度関数とする $\mathbb{R}$ 上の確率測度

正規分布

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2a}}\times\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (y=\sqrt{2a}x)$$

$\rho_{m,v}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2v}(x-m)^2}$ とおくと，

$$\int_{\mathbb{R}}\rho_{m,v}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{2v}y^2}dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi v}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2v}y^2}dy = 1 \qquad (y=x-m)$$

平均 m，分散 v の正規分布 $N(m,v)$ の密度関数

$$\int_{\mathbb{R}}x\rho_{m,v}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{\mathbb{R}}(y+m)e^{-\frac{1}{2v}y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{\mathbb{R}}ye^{-\frac{1}{2v}y^2}dy + m = m$$

（$y<0$ の積分を $y=-y'$ で変換すると $y>0$ の積分と打ち消す）

$$\int_{\mathbb{R}}(x-m)^2\rho_{m,v}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{\mathbb{R}}y^2\,e^{-\frac{1}{2v}y^2}\,dy = \frac{-v}{\sqrt{2\pi v}}\int_{\mathbb{R}}y\frac{d}{dy}e^{-\frac{1}{2v}y^2}\,dy$$

$$= -\sqrt{\frac{v}{2\pi}}\left[ye^{-\frac{1}{2v}y^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \sqrt{\frac{v}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2v}y^2}dy = v \qquad \text{（部分積分）}$$

ガウス積分の公式

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-1/2}$$ （再掲）

a で微分（微分は極限で定義する．測度の σ 加法性によって，（ルベーグ）積分が有限に存在すれば，積分と極限は順序交換可能）

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-3/2},\quad \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-3/2}$$

特に $\sqrt{2\pi v}$ で割って $a = \dfrac{1}{2v}$ とおくと $N(0,v)$ の分散が v （確かめ）

a で２度微分すれば $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}a^{-5/2}$ $N(0,v)$ の４次モーメントが計算できる（$N(0,v)$ の奇数次モーメントは0）

ガウス積分 (2)

$I = \int_0^\infty e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ **の別解（小針あき宏，確率・統計入門，岩波，5 章 §1）**

$e^x \geqq 1 + x$ **から** $e^{-x} \geqq 1 - x$**，これらから** $1 - x^2 \leqq e^{-x^2} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ **よって**

$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leqq \int_0^\infty e^{-nx^2}dx \leqq \int_0^\infty \dfrac{1}{(1+x^2)^n}dx$ **最左辺で** $x = \cos\theta$**，中央で** $y = \sqrt{2n}x$**，最右辺で** $x = \cot\theta$ **と変換すると** $\sqrt{2n}S_{2n+1} \leqq I \leqq \sqrt{2n}S_{2n-2}$;

$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta d\theta$. **部分積分によって** $S_n = (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n$**，**

したがって $S_n = \dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$ — (*)**．**

$0 \leqq S_{2n+1} \leqq S_{2n} \leqq S_{2n-1}$ **と** (*) **から** $1 \leqq \dfrac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \leqq \dfrac{2n+1}{2n}$**．また** (*) **から**

$$S_{2n+1}S_{2n} = \frac{2n-1}{2n+1}S_{2n-1}S_{2n-2} = \cdots = \frac{1}{2n+1}S_1S_0 = \frac{\pi}{4n+2}.$$

これらから， $\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}S_{2n-2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. □

ガウス積分(3)

・**積分変数変換のヤコビ行列式**：極座標 $x(r,\theta) = r\cos\theta,\ y(r,\theta) = r\sin\theta$ に対して $\displaystyle\int_A f(x(r,\theta), y(r,\theta))\, r\, dr\, d\theta = \int_{A'} f(x,y)\, dx\, dy$

$$I(R)^2 := \left(\int_0^R e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\right)^2 = \int_0^R \left(\int_0^R e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dx\right) dy \quad \text{（逐次積分）}$$

$$= \int_{[0,R]^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_{A_R} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\ dr\, d\theta \quad \text{（フビニ→積分変数変換）}$$

$$B_R = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq R\} \to B_R \subset A_R \subset B_{\sqrt{2}R}$$

$$\int_{B_R} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\ dr\, d\theta = \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} 1 d\theta\right) e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = \frac{\pi}{2}\int_0^{R^2/2} e^{-s} ds\ \ (s = \frac{1}{2}r^2)$$

$= \dfrac{\pi}{2}(1 - e^{-R^2/2})$．よって，$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sqrt{1 - e^{-R^2/2}} \leqq I(R) \leqq \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sqrt{1 - e^{-R^2}}$

よって，$I = \displaystyle\lim_{R\to\infty} I(R) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

正規分布のその他の性質

$N(0,1)$: $\mathrm{P}[\,[-z,z]\,] = \int_{-z}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

確率変数 X **が** $N(m,v)$ **に従うとき，** $Z = \dfrac{X-m}{\sqrt{v}}$ **は** $N(0,1)$ **に従う．**

統計学でよく用いられる近似値
$\mathrm{P}[\,[-1,1]\,] = 0.682689$ (1 **σ**), $\mathrm{P}[\,[-1.645, 1.645]\,] = 0.9$ (90% CL), $\mathrm{P}[\,[-1.9600, 1.9600]\,] = 0.95$ (95% CL), $\mathrm{P}[\,[-2,2]\,] = 0.9545$ (2 **σ**), $\mathrm{P}[\,[-2.576, 2.576]\,] = 0.99$ (99% CL), $\mathrm{P}[\,[-3,3]\,] = 0.9973$ (3 **σ**),

$N(0,v)$ **に従うことが分かっている確率変数のサンプルの値の絶対値が** q **以上になる確率は** $N(0,v)([-q,q]) = N(0,1)([\frac{-q}{\sqrt{v}}, \frac{q}{\sqrt{v}}])$**．たとえば，** $|q| \geqq 2\sqrt{v}$ **になる確率は** $(100-95.45)\% = 4.55\%$**．統計調査をやってそのような値が得られれば，** $N(0,v)$ **に従うという最初の前提を疑う（統計的推測の基本原理）**

まとめ

ガウス積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$

Fubini **の定理（可積分ならば重積分＝逐次積分）**

正規分布 $N(m,v)$ **の密度関数（平均** m **分散** v**）**

$$\rho_{m,v}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-(x-m)^2/(2v)}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

積分とパラメータによる微分の交換可能性，部分積分

５．母関数と特性関数

確率測度（確率変数）の母関数と特性関数

分布関数，モーメント

中心極限定理（秋終盤の大きな山場）の証明の準備も意識して，理論でも実用でもよく用いられる大事な量の紹介

ポワッソン分布の母関数

問5–1：平均$\lambda > 0$のポワッソン分布の母関数を求めよ． $\diamond$

ポワッソン分布（春８）：$\mathsf{P}[\,\{k\}\,] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!},\ k \in \Omega = \mathbb{Z}_+$

期待値$\mathsf{E}[\,f\,] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathsf{P}[\,dx\,] = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} f(k)\,\mathsf{P}[\,\{k\}\,]$

母関数$g(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x\,t}\mathsf{P}[\,dx\,]$

母関数

確率測度は集合関数．集合算はわかりにくい．（点）関数で計算できるときはそうしたい．母関数，特性関数，分布関数

$\Omega = \mathbb{R}$（実数上のボレル確率測度）（含む $\mathbb{Z}_+$ 上→積分は和）

（積率）母関数 $\mathbb{R}_+$ 上の確率測度に対して $M(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x\,t} \mathsf{P}[\,dx\,]$

符号を $M(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{x\,t} \mathsf{P}[\,dx\,]$ とすることも．

- $[0,1]$ 上の一様分布：$g_U(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x\,t} dx = \frac{1-e^{-t}}{t}$, $t \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}_+$ 上の減衰率 w の指数分布：$g_E(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x\,t} w e^{-wx} dx = \frac{w}{w+t}$, $t > -w$
- $\mathbb{Z}_+$ 上の公比 p の幾何分布：$g_G(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\,t}(1-p)p^k = \frac{1-p}{1-e^{-t}p}$, $t > \log p$
- 正規分布 $N(m,v)$：$g_N(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\,t} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(x-m)^2/(2v)} dx = e^{-mt+vt^2/2}$，

$t \in \mathbb{R}$ （指数部平方完成，$y = x + vt - m$，ガウス積分：特性関数について計算後述）

母関数，分布関数

母関数 $g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-xt} \mathrm{P}[\,dx\,]$ （t で n 回微分して $t = 0$ とおくと）

$g^{(n)}(0) = (-1)^n \int x^n \mathrm{P}[\,dx\,]$ n 次モーメント

・平均 (1 次)，分散 (2 次− 1 次^2) などをまとめて計算しておける

・e^{-xt} は x が大きいと小さいので,（小さくなる様子から）x が大きいところでの P の振る舞いを理論的に調べるのに便利（大偏差値原理）

ついでに，分布関数 $F(x) = \mathrm{P}[\,(-\infty, x]\,] = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{P}[\,dy\,]$

指数分布：$F(x) = \int_0^x we^{-wy} dy = 1 - e^{-wx}$

$F(-\infty) = 0$, $f(\infty) = 1$, 非減少

・サンプル調査のとき：密度 $\Leftrightarrow$ 度数分布（母分布が微分可能でも度数分布は微分できない）．分布関数のほうが収束が早い

特性関数

$\Omega = \mathbb{R}$ のとき，**特性関数** $\phi(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}x\,t} \mathsf{P}[\,dx\,],\ t \in \mathbb{R}.$

ここで，$e^{\sqrt{-1}\xi} = \cos\xi + \sqrt{-1}\sin\xi$，複素数値関数の積分は実部と虚部それぞれの積分を実部と虚部とする複素数．

- $\cos$, $\sin$ は絶対値 1 以下の連続関数なのでボレル確率測度に対して可積分なので，

$\phi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **は存在**（必ず**存在**することと，**確率と 1 : 1** がポイント）

- **連続関数**（期待値があれば C^1 級，分散があれば C^2 級）で，

$\phi(0) = 1$，$\phi'(0) = \sqrt{-1}m$，$(\log\phi)''(0) = -v$

$\Omega = \mathbb{R}^n$ **のとき** $\phi(\overrightarrow{t}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{t})} \mathsf{P}[\,d\overrightarrow{x}\,],\ \overrightarrow{t} \in \mathbb{R}^n$ **（後述）**

Ω **が線形空間**ならば線形汎関数 $F :\ \Omega \to \mathbb{R}$ に対して $\phi(F) = \displaystyle\int_{\Omega} e^{\sqrt{-1}F(x)} \mathsf{P}[\,dx\,]$ によって，Ω の線形汎関数の集合上の複素数値関数 ϕ が定義：**特性関数**（一般の線形空間で定義できることもポイント）

正規分布の特性関数

$N(m,v)$: $\rho_{m,v}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}(x-m)^2}$

$\phi(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xt} \rho_{m,v}(x)dx$

指数の肩： $-\dfrac{1}{2v}(x-m)^2 + \sqrt{-1}xt = -\dfrac{1}{2v}(x^2 - 2mx - 2\sqrt{-1}xvt + m^2) = -\dfrac{1}{2v}((x-m-\sqrt{-1}vt)^2 - (m+\sqrt{-1}vt)^2 + m^2) = -\dfrac{1}{2v}(x-m-\sqrt{-1}vt)^2 + \dfrac{1}{2v}(2\sqrt{-1}mvt - v^2t^2) = -\dfrac{1}{2v}(x-m-\sqrt{-1}vt)^2 + \sqrt{-1}mt - \dfrac{v}{2}t^2$

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2v}(x-m-\sqrt{-1}vt)^2}dx = \sqrt{2\pi v}$ **（複素関数論：正則関数の複素積分）**

$\phi(t) = e^{\sqrt{-1}mt}\, e^{-\frac{v}{2}t^2}$ **（形式的期待のとおり，** $= g_N(-\sqrt{-1}t)$**）**

反転公式

・**特性関数**$\Leftrightarrow$**母関数**$\Leftrightarrow$**分布関数**$\Leftrightarrow$ **確率測度**　(1 : 1)

密度ρ**を持つ確率測度の場合**

特性関数$\Leftrightarrow$**確率測度：**$\rho(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{-\sqrt{-1}xt}\phi(t)\dfrac{dt}{2\pi}$　(P. Lévy)

分布関数$\Leftrightarrow$**確率測度：**$\rho(x) = F'(x)$

母関数$\Leftrightarrow$**確率測度：**$\mathbb{Z}_+$ **の確率の場合** $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt}\mathrm{P}[\,\{k\}\,]$.

$$h(x) = g(-\log x) = \mathrm{P}[\,\{0\}\,] + \mathrm{P}[\,\{1\}\,]\,x + \mathrm{P}[\,\{2\}\,]\,x^2 + \cdots$$

$$\mathrm{P}[\,\{n\}\,] = \frac{1}{n!}\frac{d^n h}{dx^n}(0)$$

確率変数の特性関数

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ 上の確率変数 $X: \ \Omega \to \mathbb{R}$ の分布

$Q(A) = \mathsf{P}[\ X \in A\ ] = \mathsf{P}[\ X^{-1}(A)\ ] = \mathsf{P} \circ X^{-1}(A)$ （春６）

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xt} Q(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xt} \mathsf{P}[\ X^{-1}(dx)\ ]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}X(\omega)t} \mathsf{P}[\ d\omega\ ] = \mathsf{E}[\ e^{\sqrt{-1}X\,t}\ ]$$

$g_X(t) = \mathsf{E}[\ e^{-X\,t}\ ]$

$F_X(x) = \mathsf{P}[\ X \leqq x\ ]$

問5–1の答え

問5–1：平均$\lambda > 0$のポワッソン分布の母関数を求めよ． ◇

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt}\mathrm{P}[\ \{k\}\ ] = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{-t}\lambda)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}e^{e^{-t}\lambda}$$

□

まとめ

$\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度の母関数，分布関数，特性関数（確率測度と 1:1）

$M(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x\,t}\mathsf{P}[\,dx\,]$，微分がモーメント

$F(x) = \mathsf{P}[\,(-\infty, x]\,] = \int_{-\infty}^{x} \mathsf{P}[\,dy\,]$，非減少

$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}x\,t}\mathsf{P}[\,dx\,]$，連続，微分がモーメント

正規分布 $N(m, v)$: $\phi_{m,v}(t) = e^{\sqrt{-1}mt}\,e^{-\frac{v}{2}t^2}$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2v}(x-m-\sqrt{-1}vt)^2}dx = \sqrt{2\pi v}$

確率変数の母関数 $g_X(t) = \mathsf{E}[\,e^{-X\,t}\,]$，分布関数 $F_X(x) = \mathsf{P}[\,X \leqq x\,]$，特性関数

$\phi_X(t) = \mathsf{E}[\,e^{\sqrt{-1}X\,t}\,]$

６．同時分布

結合分布（同時分布）と周辺分布

重積分と２次元正規分布

共分散と相関係数

シュワルツの不等式

レポート２ ＠ keio.jp

独立な確率変数の相関係数

6−1：「X と Y が独立な確率変数ならば相関係数が 0」を証明せよ ◇

（春５既出）：確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が独立：任意の実数 $a_1 \ldots, a_n$ について

$$\mathsf{P}[\, X_1 \leqq a_1, \ldots, X_n \leqq a_n \,] = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}[\, X_k \leqq a_k \,]$$

$$\Leftrightarrow \mathsf{E}[\, \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k \leqq a_k} \,] = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\, \mathbf{1}_{X_k \leqq a_k} \,]$$

⇔ X_k の単関数の積の期待値が期待値の積に等しい

⇔ 次の期待値が有限な任意の可測関数たち f_k について次が成り立つ：

$$\mathsf{E}[\, \prod_{k=1}^{n} f_k(X_k) \,] = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\, f_k(X_k) \,]$$

同時分布

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$．確率変数 X と Y．X の分布 $Q_X = \mathrm{P} \circ X^{-1}$，$Y$ の分布 $Q_Y = \mathrm{P} \circ Y^{-1}$：$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度（それぞれの確率変数の「度数分布」の理想化）

(X, Y)： $\Omega \to \mathbb{R}^2$ の度数分布の理想化＝結合分布（同時分布）

例：$p = 0.5$ の硬貨投げ．$1, 2$ 回目それぞれの結果を X, Y とおくと

$\mathrm{P}[\,X = 0\,] = \mathrm{P}[\,X = 1\,] = \mathrm{P}[\,Y = 0\,] = \mathrm{P}[\,Y = 1\,] = 0.5$ だから

$Q_X(\{0\}) = Q_X(\{1\}) = Q_Y(\{0\}) = Q_Y(\{1\}) = 0.5$（$\mathbb{R}$ 上の確率）

$Q_{(X,Y)}(\{(0,0)\}) = Q_{(X,Y)}(\{(1,0)\}) = Q_{(X,Y)}(\{(0,1)\}) =$

$= Q_{(X,Y)}(\{(1,1)\}) = 0.25$（$\mathbb{R}^2$ 上の確率）

(X, X)： $\Omega \to \mathbb{R}^2$ の分布も $\mathbb{R}^2$ 上の確率測度だが別物

$Q_{(X,X)}(\{(0,0)\}) = Q_{(X,X)}(\{(1,1)\}) = 0.5$

結合分布：$Q_{(X,Y)}$（同時分布）　　**周辺分布**：Q_X，Q_Y

重積分（復習）

（内容は再掲）

・２次元ルベーグ測度：１次元ルベーグ測度 μ_1 の直積測度．
μ_2(長方形) $= \mu_1$(縦) μ_1(横) なる測度（面積）

・２変数関数のルベーグ積分 ：$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が可測関数とは，$D(a) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) < a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が，全ての $a \in \mathbb{R}$ に対して成り立つこと

・非負値可測関数 f のルベーグ積分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} S_n$;

$$S_n = \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n} k \cdot 2^{-n} \mu_2(D((k+1)2^{-n}) \cap D(k2^{-n})^c)$$ （単関数近似）

・実数値可測関数は正の部分と負の部分にわけて積分を定義．両方とも有限のとき（すなわち絶対値の積分が有限のとき）可積分と言う

・フビニの定理：非負値または可積分ならば直積測度による積分（重積分）は逐次積分に等しい

・実際の計算は過去に習ったもの．積分順序の他極限（微分）との交換も（可積分関数で大きさが抑えられていれば）自由

２次元正規分布

２次元正規分布：$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ 上の確率測度（あるいは，２つの実数値確率変数 X, Y の結合分布）であって，ルベーグ密度関数が (x, y) の２次多項式の指数関数のもの：$\rho(x, y) = e^{-ax^2-bxy-cy^2-dx-ey-f}$

平均 $(m_X, m_Y) = (\mathsf{E}[\,X\,], \mathsf{E}[\,Y\,])$，

標準偏差 $(\sigma_X, \sigma_Y) = (\sqrt{\mathsf{V}[\,X\,]}, \sqrt{\mathsf{V}[\,Y\,]})$ に対して，変数変換

$x' = \dfrac{x - m_X}{\sigma_X}$, $y' = \dfrac{y - m_Y}{\sigma_Y}$, によって

$$(*)\quad \rho_r(x', y') = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x'^2-2rx'y'+y'^2)}$$ すなわち，

$X' = \dfrac{X - \mathsf{E}[\,X\,]}{\sqrt{\mathsf{V}[\,X\,]}}$ と $Y' = \dfrac{Y - \mathsf{E}[\,Y\,]}{\sqrt{\mathsf{V}[\,Y\,]}}$ の結合分布の密度が $(*)$ の形に書ける．

$(*)$ は偶関数なので平均０，変数変換で生じる $dx + ey$ が期待値に寄与．定数 e^{-f} は $\int \rho(x, y)dxdy = 1$ から決まる．X, Y それぞれの分散から $ax^2 + cy^2$ の係数が決まるので残る変数は１つ．それを r と書いた（r の意味は次頁）．注：$-1 < r < 1$

共分散と相関係数

（再掲） (*) $\rho_r(x,y) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)}$ $(|r|<1)$

周辺分布：$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_r(x,y)\,dy = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(y-rx)^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$：標準正規分布 $N(0,1)$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$．$(X,Y): \ \Omega \to \mathbb{R}^2$ の分布が ρ_r とする（期待値の記号を使うためだけ）．（ρ_r が偶関数なので）$\mathsf{E}[\,X\,] = \mathsf{E}[\,Y\,] = 0$．周辺分布が $N(0,1)$ なので，$\mathsf{V}[\,X\,] = \mathsf{E}[\,X^2\,] = 1 = \mathsf{E}[\,Y^2\,] = \mathsf{V}[\,Y\,]$

共分散：$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathsf{E}[\,(X-\mathsf{E}[\,X\,])(Y-\mathsf{E}[\,Y\,])\,]$ **（春６既出）**

相関係数：$r(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{V}[\,X\,]\mathsf{V}[\,Y\,]}}$

(*) の場合の計算結果：$\mathrm{Cov}(X,Y) = r = r(X,Y)$（続く）

２次元正規分布の相関の計算

$$(*)\ \rho_r(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)} \quad (|r|<1)$$

$O = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1-r & 0 \\ 0 & 1+r \end{pmatrix}$ とおくと

${}^tOAO = D,\ {}^tOO = E$．さらに $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O\overrightarrow{x'}$ とおくと

$x^2 - 2rxy + y^2 = {}^t\overrightarrow{x}A\overrightarrow{x} = {}^t\overrightarrow{x}'D\overrightarrow{x}' = (1-r)x'^2 + (1+r)y'^2$

積分変数変換のヤコビ行列式 $dxdy = \big|\,|O|\,\big|dx'dy' = dx'dy'$

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},\ \int_{\mathbb{R}} x^2e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-3/2}$ （秋５既出）

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} xy\rho_r(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x'^2-y'^2}{2}e^{-\frac{1}{2}\frac{x'^2}{1+r}-\frac{1}{2}\frac{y'^2}{1-r}}\,dx'dy' = r$．すなわち，$r(X,Y) = r$

相関係数の性質

シュワルツの不等式： $\mathrm{E}[\,XY\,]^2 \leqq \mathrm{E}[\,X^2\,]\mathrm{E}[\,Y^2\,]$ **等号は** Y **と** X **の比が** ω **について定数のときに限る**

証明：$\mathrm{E}[\,(Y - t\,X)^2\,] \geqq 0$．特に $t = \dfrac{\mathrm{E}[\,XY\,]}{\mathrm{E}[\,X^2\,]}$ とする．等号は $Y = t\,X$ となるときそのときに限る． □

シュワルツの不等式で X に $X - \mathrm{E}[\,X\,]$，Y に $Y - \mathrm{E}[\,Y\,]$ を代入すると，

$|\mathrm{Cov}(X, Y)| = |\mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])(Y - \mathrm{E}[\,Y\,])\,]| \leqq \sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]}$

よって， $-1 \leqq r(X, Y) \leqq 1$

問6–1の答え

問6–1：X と Y が独立な確率変数ならば相関係数が 0 を証明せよ．　◇

独立 $\Leftrightarrow$ 任意の a, b に対して $\mathrm{P}[\,X \leqq a, Y \leqq b\,] = \mathrm{P}[\,X \leqq a\,]\mathrm{P}[\,Y \leqq b\,]$

$\Rightarrow$（単関数近似をとおして）$\mathrm{E}[\,f(X)g(Y)\,] = \mathrm{E}[\,f(X)\,]\mathrm{E}[\,g(Y)\,]$

$f(x) = x - \mathrm{E}[\,X\,]$ と $g(x) = x - \mathrm{E}[\,Y\,]$ を代入すると，期待値の線形性と $\mathrm{E}[\,1\,] = 1$ から，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])(Y - \mathrm{E}[\,Y\,])\,] \\
&= \mathrm{E}[\,X - \mathrm{E}[\,X\,]\,]\mathrm{E}[\,Y - \mathrm{E}[\,Y\,]\,] \\
&= (\mathrm{E}[\,X\,] - \mathrm{E}[\,X\,])(\mathrm{E}[\,Y\,] - \mathrm{E}[\,Y\,]) = 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

まとめ

・確率変数の独立（積事象の確率が確率の積に等しい，合成関数の積の期待値が期待値の積に等しい）

・**結合分布（同時分布），周辺分布**,（密度を持つ場合は重積分）

・２次元正規分布は各変数の期待値と分散と相関係数で決まる．

２次形式とガウス積分による計算

・**共分散** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,])(Y-\mathrm{E}[\,Y\,])\,]$ （春６既出）

・**相関係数** $r(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]}}$ （春６既出）

・**シュワルツの不等式** $\mathrm{E}[\,XY\,]^2 \leqq \mathrm{E}[\,X^2\,]\mathrm{E}[\,Y^2\,]$，
等号は Y と X の比が定数のときに限る

・**$-1 \leqq r(X,Y) \leqq 1$，** 独立な確率変数ならば相関係数は０

７．確率変数の独立性と特性関数

確率変数の和の特性関数

独立確率変数の和の特性関数

確率変数の法則収束と特性関数の各点収束

独立確率変数の和の分布の極限

問 7–1：表の確率 λ/n の硬貨投げ n 回の表の枚数を S_n とするとき，S_n の分布の極限を求めよ． $\diamond$

独立性と密度

（春５，前回既出）X と Y が独立 $\Leftrightarrow$ 任意の a, b に対して
(∗) $\mathsf{P}[\, X \leqq a, Y \leqq b \,] = \mathsf{P}[\, X \leqq a \,]\mathsf{P}[\, Y \leqq b \,]$

結合分布が（2 次元ルベーグ測度に関して）密度関数 ρ を持つ場合：

$$\mathsf{P}[\, X \leqq a, Y \leqq b \,] = \int_{(-\infty,a]\times(-\infty,b]} \rho(x,y)\, dxdy$$

周辺分布 $\tilde{\rho}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x,y)dy$ とおくと $\mathsf{P}[\, X \leqq a \,] = \int_{-\infty}^{a} \tilde{\rho}_X(x)\, dx$

(∗) の両辺を a で微分すると $\int_{-\infty}^{b} \rho(a,y)dy = \tilde{\rho}_X(a)\, \mathsf{P}[\, Y \leqq b \,]$

同様に，さらに b で微分すると $\rho(a,b) = \tilde{\rho}_X(a)\, \tilde{\rho}_Y(b)$
逆に積で書ければ (∗) が成り立つ（3 個以上の確率変数でも同様）

確率変数の同時分布が（ルベーグ測度について）密度を持つとき，

確率変数が独立 $\Leftrightarrow$ 同時分布の密度が 1 変数関数の積で書ける

確率変数の独立性と特性関数

（前回既出）以下の期待値が存在するボレル可測関数 $f,\ g$ に対して，
X と Y が独立 $\Rightarrow \mathsf{E}[\, f(X)g(Y)\,] = \mathsf{E}[\, f(X)\,]\mathsf{E}[\, g(Y)\,]$
$f(x) = e^{\sqrt{-1}xt},\ g(x) = e^{\sqrt{-1}ys}$ のとき，有界連続なので期待値は存在するから，
$\mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}(tX+sY)}\,] = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}tX}\,]\mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}sY}\,]$
特性関数 $\phi_X(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}tX}\,]$，$\phi_Y(s) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}sY}\,]$,

$\phi_{(X,Y)}(t,s) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}(tX+sY)}\,]$ （秋６既出）とおくと

$\phi_{(X,Y)}(t,s) = \phi_X(t)\phi_Y(s)$ （任意の $t,s \in \mathbb{R}$ で成立）
逆に，特性関数が等しければ確率測度も等しいことが知られている (P.Lévy の反転公式) ので，

X, Y が独立 $\Leftrightarrow \phi_{(X,Y)}(t,s) = \phi_X(t)\phi_Y(s),\ t,s \in \mathbb{R}$
（確率密度関数の有無に無関係に無条件に成り立つ同値関係）

和の分布と特性関数

和 $Z = X + Y$ の従う分布の特性関数

$$\phi_Z(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}tZ} \,] = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}(tX+tY)} \,] = \phi_{(X,Y)}(t,t)$$

特に，独立な確率変数 X, Y の和 $Z = X + Y$ の従う分布の特性関数

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

例：さいころ． $\mathsf{P}[\, Z = 5 \,] = \mathsf{P}[\, X+Y = 5 \,] = \sum_{k=1}^{4} \mathsf{P}[\, X = k, Y = 5-k \,] = \frac{1}{9}$． Z **の値を (X, Y) に振り分け，それぞれの確率を加える必要：畳み込み**

$$\phi_X(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}tX} \,] = \frac{1}{6}(e^{\sqrt{-1}t} + e^{2\sqrt{-1}t} + \cdots e^{6\sqrt{-1}t}) = \frac{e^{\sqrt{-1}t} - e^{7\sqrt{-1}t}}{6(1 - e^{\sqrt{-1}t})}$$

$$= \frac{\sin 3t}{6 \sin \frac{t}{2}} e^{7\sqrt{-1}t/2}. \quad \phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = \left(\frac{\sin 3t}{6 \sin \frac{t}{2}} e^{7\sqrt{-1}t/2} \right)^2.$$

独立確率変数の和の分布：確率測度は畳み込み，特性関数は積

硬貨投げの和の特性関数

・表 $(X=1)$ の確率 p の硬貨投げ
$\phi_p(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}Xt}\,] = 1-p+pe^{\sqrt{-1}t}$
・n 回の硬貨投げの表の枚数　＝　$X_k,\ k=1,2,\ldots,n,$ 独立同分布でそれぞれ表の確率 p の硬貨投げのときの和 $S = X_1+\ldots+X_n$
　＝　２項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数

$$\phi_{n,p}(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}St}\,] = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}X_k t}\,] = (1-p+pe^{\sqrt{-1}t})^n$$

・$B(n,p)$ に従う X と独立な $B(m,p)$ に従う Y の和 $Z=X+Y$：
$\phi_Z(t) = (1-p+pe^{\sqrt{-1}t})^{n+m} = \phi_{n+m,p}(t)$
（＝$n+m$ 回の硬貨投げの和）

独立なポワッソン確率変数の和の特性関数

ポワッソン分布の特性関数 $\phi_{Po(\lambda)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\sqrt{-1}kt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{\sqrt{-1}t}\lambda)^k}{k!} = e^{(e^{\sqrt{-1}t}-1)\lambda}$$

$Po(\lambda)$ **に従う** X **と独立な** $Po(\mu)$ **に従う** Y **の和** $Z = X + Y$ **：**

$$\phi_Z(t) = e^{(e^{\sqrt{-1}t}-1)\lambda} e^{(e^{\sqrt{-1}t}-1)\mu} = \phi_{Po(\lambda+\mu)}(t)$$

確率変数の法則収束

特性関数とつながりが深い収束（次々回のための準備）

確率変数列 $X_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$，が確率変数 Y に**法則収束**するとは，**任意の有界連続関数** $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **に対して，** $\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[\, f(X_n)\,] = \mathsf{E}[\, f(Y)\,]$ となることを言う．

・X_n の値が整数値（離散値）のときは,「連続関数→関数」と読み替えるので，結局各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して $f(x) = \begin{cases} 1, & x = k \\ 0, & x \neq k \end{cases}$ を考えることと同値になって，法則収束は $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}[\, X_n = k\,] = \mathsf{P}[\, Y = k\,],\ k \in \mathbb{Z},$ と同値

・X_n **が** Y **に法則収束することと，特性関数の各点収束が同値である：**
$\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = \phi_Y(t),\ t \in \mathbb{R}\ (\phi_{X_n}(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}tX_n}\,])$ 証明は難

分布が似ていること（収束）を特性関数が似ていること（収束）で言えることも，特性関数の理論上のだいじなポイント

問 7–1 の答え

問 7–1：表の確率 λ/n の硬貨投げ n 回の表の枚数を S_n とするとき，S_n の分布の極限を求めよ． ◇

解：k 回目の硬貨投げの結果を X_k とおくと，$S_n = X_1 + \ldots + X_n$．各 X_k の特性関数は $\phi_{\lambda/n}(t) = 1 + \frac{1}{n}\lambda(e^{\sqrt{-1}t} - 1)$（前々々頁）．$X_k$ たちは独立なので $\phi_{S_n}(t) = (1 + \frac{1}{n}\lambda(e^{\sqrt{-1}t} - 1))^n$．自然対数の底の定義から右辺は $n \to \infty$ で収束：$\lim_{n\to\infty} \phi_{S_n}(t) = e^{\lambda(e^{\sqrt{-1}t}-1)}$．前々頁から，平均 λ のポワッソン分布の特性関数 $\phi_{Po(\lambda)}(t)$ に等しい．特性関数が各点収束するので，S_n は $Po(\lambda)$ に従う確率変数に法則収束する．

（ポワッソンの少数の法則の特別な場合）

まとめ

- 確率変数が**独立**なことと結合分布の**特性関数**が積で書けることが同値
  - 確率変数が独立ならば，積の**期待値**が期待値の積に等しい
  - 複数の確率変数の結合分布がルベーグ測度に関して**密度**を持つ場合，

確率変数が独立なことと密度が積であることが同値

$\phi_p(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}Xt} \,] = 1 - p + pe^{\sqrt{-1}t}$

$\phi_{n,p}(t) = (1 - p + pe^{\sqrt{-1}t})^n$

$\phi_{Po(\lambda)}(t) = e^{(e^{\sqrt{-1}t}-1)\lambda}$

$B(n,p)$ に従う X と独立な $B(m,p)$ に従う Y の和は $B(n+m,p)$ に従う

$Po(\lambda)$ に従う X と独立な $Po(\mu)$ に従う Y の和は $Po(\mu+\lambda)$ に従う

- **法則収束**（任意の有界連続関数との合成の期待値が収束すること）.
- 特性関数の各点収束と同値
- 整数値確率変数の場合は，各整数値になる確率の収束と同値
- ポワッソンの少数の法則

８．多次元正規分布

n 次元正規分布

正規分布の計算（特性関数，ガウス積分，２次形式，分散，相関係数）

レポート３ ＠ keio.jp

正規確率変数の和の分布

問 8–1：**独立同分布確率変数列** $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ **のそれぞれの分布が正規分布** $N(m, v)$ **のとき，和** $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ **の分布を求めよ．** $\diamond$

n 次元正規分布

n 次元正規分布：$\Omega = \mathbb{R}^n$ 上の（ルベーグ測度に関して）連続なボレル確率測度で，密度が２次多項式の指数関数であるもの

$\rho(\overrightarrow{x}) = e^{-\frac{1}{2}{}^t\overrightarrow{x}A\overrightarrow{x} + {}^t\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x} + c}$

- 定数項 c は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(\overrightarrow{x})\, d^n x = 1$ から決まる
- １次項の係数 $\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{m}$ で $\overrightarrow{0}$ にできる（平均 $\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$）

$\displaystyle\int e^{-\frac{a}{2}(x-m)^2} dx = \int e^{-\frac{a}{2}x^2} dx$ （秋５）

•（２次形式：線形代数既出）A は $x_i x_j$ の係数が $A_{ij} + A_{ji}$ なので対称行列にとれる．

対称行列は直交行列で対角化できる：${}^tOO = E$, ${}^tOAO = D$; $D_{ij} = d_j \delta_{ij}$

積分変数変換 $\overrightarrow{x} = O\overrightarrow{x}'$ で，${}^t\overrightarrow{x}A\overrightarrow{x} = {}^t\overrightarrow{x}'D\overrightarrow{x}' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i {x'}^2$

ヤコビ行列式 $d^n x = \big|\,|O|\,\big| d^n x' = d^n x'$

n 次元ガウス積分

（続き）$\int e^{-d_i x_i^2/2} dx_i < \infty \Leftrightarrow d_i > 0$ すなわち，A は正値実対称行列のときのみ

ρ は確率測度の密度（秋 7 $n=2$ のとき $|r|<1$ に対応）

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}{}^t\overrightarrow{x}A\overrightarrow{x}} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_i {x'}_i^2} d^n x'$$

$$= \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}d_i {x'}_i^2} dx'_i = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{2\pi}{d_i}} \text{（秋 5）} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{|D|}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{|OD^tO|}}$$

（線形代数）$= \sqrt{\dfrac{(2\pi)^n}{|A|}}$．ここまでの計算で n 次元正規分布の密度の一般形は

$$\rho(\overrightarrow{x}) = \sqrt{\frac{|A|}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}{}^t(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})A(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})};\ A \text{ は正値実対称行列}$$

• 正規分布に従う独立な n 個の確率変数の結合分布は多次元正規分布◇
なぜなら，独立なので結合分布の密度は積（前回）．それぞれは 2 次式の指数関数だから，積も（A が対角行列）　□

n次元正規分布の特性関数

A正定値対称n次行列，$\overrightarrow{X}: \ \Omega \to \mathbb{R}^n$の分布の密度が

$$\rho(\overrightarrow{x}) = \sqrt{\frac{|A|}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}{}^t(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})A(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})}$$ のとき

特性関数 $\phi(\overrightarrow{t}) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}(\overrightarrow{t},\overrightarrow{X})}\,]$

$$= \sqrt{\frac{|A|}{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}{}^t(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})A(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})+\sqrt{-1}(\overrightarrow{t},\overrightarrow{x})} d^n x$$

指数部 $= -\frac{1}{2}{}^t(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{m} + \sqrt{-1}A^{-1}\overrightarrow{t})A(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{m} + \sqrt{-1}A^{-1}\overrightarrow{t})$

$- \frac{1}{2}{}^t\overrightarrow{t}A^{-1}\overrightarrow{t} + \sqrt{-1}(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{t})$ （$n = 1$は秋６既出）

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}{}^t(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m}+\sqrt{-1}A^{-1}\overrightarrow{t})A(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m}+\sqrt{-1}A^{-1}\overrightarrow{t})} d^n x = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{|A|}}$$

$\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{m} + \sqrt{-1}A^{-1}\overrightarrow{t}$で結果的に前頁に等しいが，虚部は積分変数変換で吸収できない．正則関数の複素積分の結果（講義範囲を超えるので結果を認める）

特性関数 $\phi(\overrightarrow{t}) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}(\overrightarrow{t},\overrightarrow{X})}\,] = e^{-\frac{1}{2}{}^t\overrightarrow{t}A^{-1}\overrightarrow{t}+\sqrt{-1}(\overrightarrow{t},\overrightarrow{m})}$

共分散行列

$\rho(\overrightarrow{x}) = \sqrt{\dfrac{|A|}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}{}^t(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})A(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})}$ **のとき**

$\phi(\overrightarrow{t}) = \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1}(\overrightarrow{t},\overrightarrow{X})}\,] = e^{-\frac{1}{2}{}^t\overrightarrow{t}A^{-1}\overrightarrow{t}+\sqrt{-1}(\overrightarrow{m},\overrightarrow{t})}$

平均 $\mathrm{E}[\, X_i \,] = -\sqrt{-1}\dfrac{\partial\,\phi}{\partial t_i}(\overrightarrow{0}) = -\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}m_i = m_i$

共分散行列 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{E}[\,(X_i - \mathrm{E}[\,X_i\,])(X_j - \mathrm{E}[\,X_j\,])\,]$ **（春６，秋６）**

$= \mathrm{E}[\,X_iX_j\,] - \mathrm{E}[\,X_i\,]\mathrm{E}[\,X_j\,] = -\dfrac{\partial^2\,\phi}{\partial t_i\partial t_j}(\overrightarrow{0}) + \dfrac{\partial\,\phi}{\partial t_i}(\overrightarrow{0})\dfrac{\partial\,\phi}{\partial t_j}(\overrightarrow{0})$

$= -\dfrac{\partial^2\,\log\phi}{\partial t_i\partial t_j}(\overrightarrow{0}) = \dfrac{1}{2}(A_{ij}^{-1} + A_{ji}^{-1}) = A_{ij}^{-1}$

例

$X_i,\ i=1,2,\ldots,n,$ 独立同分布で，それぞれ正規分布 $N(0,v)$ に従うとき，$Z_k=\sum_{i=1}^{k} X_i,\ k=1,\ldots,n$ の結合分布の特性関数

（ランダムウォークで，1 歩が歩幅 1 の代わりに正規分布に従う歩幅の場合）

$$\phi_{\overrightarrow{Z}}(\overrightarrow{t}) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}(\overrightarrow{t},\overrightarrow{Z})}\,]$$

$(\overrightarrow{t},\overrightarrow{Z}) = \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{k=1}^{i} X_k = \sum_{k=1}^{n} X_k(\sum_{i=k}^{n} t_i)$ だから独立なので特性関数が積になることと 1 次元正規分布 $N(m,v)$ の特性関数 $\mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}tX_i}\,] = e^{-\frac{v}{2}t^2+\sqrt{-1}mt}$ （秋 6）から

$$\phi_{\overrightarrow{Z}}(\overrightarrow{t}) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}X_k(\sum_{i=k}^{n} t_i)}\,] = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{v}{2}(\sum_{i=k}^{n} t_i)^2}$$

例（続き）

$$\phi_{\overrightarrow{Z}}(\overrightarrow{t}) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}X_k(\sum_{i=k}^{n} t_i)} \,] = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{v}{2}(\sum_{i=k}^{n} t_i)^2}$$

$$\log \phi_{\overrightarrow{Z}}(\overrightarrow{t}) = -\frac{v}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=k}^{n} t_i)^2$$ **（和の順序を丁寧に交換して）**

$$= -\frac{v}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min\{i,j\} t_i t_j$$

共分散行列 $\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = -\frac{\partial^2 \log \phi_{\overrightarrow{Z}}}{\partial t_i \partial t_j}(\overrightarrow{0}) = v \min\{i,j\}$ **（前々頁）**

ランダムウォークの i 歩目と j 歩目の位置の相関（小さい歩数までは共通なので独立ではない）

問8–1の答え

問8–1：独立同分布確率変数列 $X_i,\ i=1,2,\ldots,n,$ のそれぞれの分布が正規分布 $N(m,v)$ のとき，和 $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の分布を求めよ． ◇

$\overrightarrow{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ の結合分布の特性関数 $\phi_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{t}) = \mathsf{E}[\,e^{\sqrt{-1}(\overrightarrow{t},\overrightarrow{X})}\,]$ は，X_i たちが独立確率変数列だからそれぞれの確率変数の特性関数の積．それぞれは $N(m,v)$ に従うから特性関数は

$\mathsf{E}[\,e^{\sqrt{-1}t_iX_i}\,] = e^{-\frac{v}{2}t_i^2+\sqrt{-1}mt_i}$ （秋6）

ゆえに $\phi_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{t}) = \prod_{i=1}^{n}\mathsf{E}[\,e^{\sqrt{-1}t_iX_i}\,] = e^{-\frac{v}{2}\sum_{i=1}^n t_i^2+\sqrt{-1}m\sum_{i=1}^n t_i}$

和 Z の分布の特性関数は

$\phi_Z(t) = \mathsf{E}[\,e^{\sqrt{-1}(tX_1+\ldots+tX_n)}\,] = \phi_{\overrightarrow{X}}(t,t,\ldots,t) = e^{-\frac{nv}{2}t^2+\sqrt{-1}nmt}$.

特性関数が一致すれば確率測度が一致するから，和 $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の従う分布は正規分布 $N(nv,nm)$． □

注：期待値の線形性から $\mathsf{E}[\,Z\,] = \mathsf{E}[\,X_1\,] + \cdots + \mathsf{E}[\,X_n\,] = nm$，独立確率変数の分散の加法性から $\mathsf{V}[\,Z\,] = \mathsf{V}[\,X_1\,] + \cdots + \mathsf{V}[\,X_n\,] = nv$，は正規分布でなくても成り立つ．上記計算のポイントは，正規分布に従う独立確率変数の和が正規分布に従うところ．

まとめ

n **次元正規分布**の密度 $\rho(\overrightarrow{x}) = \sqrt{\dfrac{|A|}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}{}^t(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})A(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})}$;

A は正値実対称行列

特性関数 $\phi(\overrightarrow{t}) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}(\overrightarrow{t},\overrightarrow{X})}\,] = e^{-\frac{1}{2}{}^t\overrightarrow{t}A^{-1}\overrightarrow{t}+\sqrt{-1}(\overrightarrow{t},\overrightarrow{m})}$

平均 $\mathsf{E}[\, X_i \,] = m_i$

共分散行列 $\mathsf{Cov}(X_i, X_j) = \mathsf{E}[\, (X_i - \mathsf{E}[\, X_i \,])(X_j - \mathsf{E}[\, X_j \,]) \,] = A^{-1}_{ij}$

独立同分布確率変数列 $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ のそれぞれの分布が正規分布 $N(m, v)$ のとき，和 $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の分布は正規分布 $N(nv, nm)$

9．中心極限定理

中心極限定理

正規分布の重要性

区間推定

問 9–1：視聴率 p をサンプル調査で統計的に推測する．データの大きさが $n = 1$ 万，サンプル平均が $x = 0.3$（$X_i = 1$ なる i が 3000 件，$X_i = 0$ なる i が 7000 件）のとき，信頼水準 (CL) 99% で信頼区間を求めよ． ◇

サンプル平均 $\overline{X}_n$ について $\mathrm{P}_p[\, p - a \leqq \overline{X}_n \leqq p + a \,] = 0.99$ となる $a = a(p)$ について区間 $x \in [p - a(p), p + a(p)]$ となる p の範囲を信頼水準 99% の信頼区間という．つまり，期待値 p から x よりも離れた値がサンプルとして生じる確率が 1% 未満になる p の範囲をサンプル平均と「矛盾がない」と判断する．

中心極限定理

大数の法則(LLN):期待値mが（有限値）存在する独立同分布確率変数列$X_1, X_2, \ldots$について，$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m) \to 0$, a.e., $(n \to \infty)$　（春１０）　◇

平均（確率変数）は期待値（定数）に収束．バラツキの小さくなりかた：

中心極限定理(CLT)：期待値$m = \mathrm{E}[\,X_1\,]$と分散$v = \mathrm{V}[\,X_1\,]$が存在する独立同分布確率変数列$X_1, X_2, \ldots$について，$n \to \infty$で

$\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m)$は$N(0,1)$に従う確率変数に法則収束する．　◇

$\sqrt{n}$に注意． 平均$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$の分布は$\frac{1}{\sqrt{n}}$程度のばらつき

中心極限定理の応用上のコメント

注：1．LLN も CLT も，無限個の独立な確率変数が存在する確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ があれば，の定理だが，作るだけならある．例（春３，春４）：無限回の硬貨投げ（ベルヌーイ試行）の空間（数列空間，実数（無限小数），⋯）．
2．同分布でなくても，LLN なら期待値が有界，CLT なら分散が有界，など条件をゆるめても成り立つ（もっとゆるめられる）．
3．独立性の仮定は本質的．特に独立でない確率変数列で CLT がいつ成り立つかは膨大な研究の蓄積．正規分布以外が出てくる場合も多数（例：臨界現象の統計力学）
4．統計学的には，大きなバラツキが重要でなく平均的な姿に興味がある場合は
　a．サンプルがたくさんあればその平均の分布は（母分布が分散有限ならその具体形によらず）正規分布に近い（大標本理論，漸近理論）
　b．大きいバラツキを取り除き制御不能な細かい無数のバラツキだけの精密実験に至れば，原因の独立性から誤差は正規分布に近い（小標本理論，ガウスの誤差論）
などの理由付けで正規分布をバラツキのモデルに採用する．現実的な理由としては，
　c．平均と分散の２パラメータで決まるので，バラツキを伴う現象の説明として「経済的」（数理ファイナンスのボラティィリティ）
　d．大きなバラツキが重要になるときはべき分布などが最近は注目

極限をとらなくてもわかること

・期待値の線形性（春５）と$\mathsf{E}[\,1\,]=1$と$\mathsf{E}[\,X_j\,]=m$から

$$\mathsf{E}\Big[\,\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)\,\Big]=\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(\mathsf{E}[\,X_j\,]-m)=0$$

•独立な場合の分散の加法性（春６）と$\mathsf{V}[\,cX\,]=c^2\mathsf{V}[\,X\,]$と$\mathsf{V}[\,X+a\,]=\mathsf{V}[\,X\,]$から$\mathsf{V}\Big[\,\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)\,\Big]=\frac{1}{nv}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{V}[\,X_j\,]=1$

・独立な正規分布に従う確率変数の結合分布は多次元正規分布なので，和や平均$\overline{X}$も１次元正規分布（前回）．上記と合わせると，この場合は，$\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)$は極限をとらなくても$N(0,1)$に従う

中心極限定理で$n\to\infty$とするのは，X_jたちが正規分布に従わなくても適切な極限は正規分布になるのがポイント

サンプル調査

母集団分布$(\text{平均}\,m$**，分散**$v)$ **の平均値**m**：**

日本人の平均寿命，
湖の魚の平均の大きさ，
視聴率＝見た (0) **見ない** (1) **の平均，**

をサンプル（標本）調査から統計的に推測する統計的検定の原理．

1．**無作為に**n**個の標本を取る．無作為に取るという行為を母集団の分布に従う独立確率変数**X_i $(\mathsf{E}[\,X_i\,]=m,\ \mathsf{V}[\,X_i\,]=v)$**と考え，得られたデータ値をある点での値**$X_i(\omega)$**とみなす．**

2．**データの大きさ**n**が大きければ** CLT **によって**

$$Z=\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)=\sqrt{\frac{n}{v}}(\overline{X}-m)$$

の従う分布が$N(0,1)$**に近い．**

統計的検定の基本的考え方

$$Z = \frac{1}{\sqrt{nv}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m) = \sqrt{\frac{n}{v}} (\overline{X} - m)$$ （続き）

3． v は**不偏分散** $V_n = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$ のサンプル値 $V_n(\omega)$ で見積もる（n が大きければ目安としてはよかろう）

3'．硬貨投げ（視聴率）やポワッソン分布は 1 つのパラメータなので，分散に関する余分の見積もりは不要（問 9–1）

4．あらかじめ危険率 $p = 0.01$ などを設定し，m を判断したい値とし（**帰無仮説**），2. の $z = Z(\omega)$ をデータから計算．P$[\,|Z| \geqq |z|\,] < p$ ならば，そのような珍しいことは起こらないとして，m についての判断を棄却する．$\geqq p$ ならば，棄却できなかった（採択）とする．

正規分布に基づく分布

母集団が正規分布の場合や大きなサイズのデータの平均など，正規分布に従う確率変数に関する数理統計学で現れる古典的な分布

・自由度nのカイ平方(χ^2)分布：$X_i,\ i=1,2,\dots,n,$ が独立でそれぞれ標準正規分布$N(0,1)$に従うとき，$\chi^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2$が従う分布．

・X_iたちが独立で$N(m,v)$に従うとき，$\dfrac{n-1}{v}V_n$は自由度$n-1$のχ^2分布に従う．
詳しくは「統計と確率の基礎 第３版」７章§2

・自由度nのt分布：Zが$N(0,1)$に，Yが自由度nのχ^2分布に従う，独立確率変数のとき$T=\dfrac{Z}{\sqrt{Y/n}}$が従う分布．

・$T=\sqrt{\dfrac{n}{V_n}}(\overline{X}_n-m)$は自由度$n-1$の$t$分布に従う．
詳しくは「統計と確率の基礎 第３版」７章§5

問9–1のコメント

問9–1：視聴率pをサンプル調査で統計的に推測する．データの大きさが$n=1$万，サンプル平均が$x=0.3$（$X_i=1$なるiが3000件，$X_i=0$なるiが7000件）のとき，信頼水準(CL)99% で信頼区間を求めよ． ◇

視聴率がp（サンプルがP[$X_i=1$] $=p$のベルヌーイ試行）とする．期待値の線形性と独立確率変数の分散の加法性などから，$\mathrm{E}[\,\overline{X}_n\,]=p$, $\mathrm{V}[\,\overline{X}_n\,]=\frac{1}{n}\mathrm{V}[\,X_1\,]=\frac{1}{n}p(1-p)$．CLT **から**$\overline{X}_n$**の分布は**$N(p,\frac{1}{n}p(1-p))$
$N(0,1)$**について**P[[$-2.57583, 2.57583$]] $=0.99$ **（秋5）だから，**$\mathrm{P}[\,\overline{X}_n\in[p-2.57583\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p+2.57583\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]\,]=0.99$
よって，99% CL **の信頼区間は**
$p-2.57583\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\leqq 0.3\leqq p+2.57583\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ p**を移行して２乗し，**$n=10^4$**を代入して**p**の２次不等式を解けば**p**の区間を得る．** □

問9–1の答えは，「統計と確率の基礎 第３版」６章§2を参照．

まとめ

大数の法則(LLN)**（春１０）**，**中心極限定理**(CLT)：

$m = \mathsf{E}[\,X_1\,], v = \mathsf{V}[\,X_1\,]$ **の独立同分布確率変数列** $\{X_i\}$ **について，**

$$\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m)$$ **は** $N(0,1)$ **に従う確率変数に法則収束**

統計学への応用（標本平均，不偏分散，視聴率，区間推定，信頼区間，信頼水準，検定，帰無仮説，棄却，採択，カイ平方分布，t **分布）**

１１．特性関数の収束

中心極限定理の証明概要

法則収束と特性関数

独立確率変数の和の漸近分布

問 1–5：平均 m，分散 $v > 0$ で特性関数が ϕ の分布に従う独立確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1}t\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m)}\,]$ を計算せよ． $\Diamond$

今回の前半で問 1–5 を解くことが中心極限定理の証明と同値なことを説明し，後半で問 1–5 を解く．

中心極限定理（復習）

目標：中心極限定理（秋１０）の証明

定理(CLT)：期待値$m = \mathsf{E}[\,X_1\,]$と分散$v = \mathsf{V}[\,X_1\,]$が存在する独立同分布確率変数列$X_1, X_2, \ldots$について，$n \to \infty$で

$\dfrac{1}{\sqrt{nv}} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (X_j - m)$は$N(0,1)$に従う確率変数に法則収束する． ◇

$X_1, X_2, \ldots$がYに法則収束するとは，任意の有界連続関数$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[\,f(X_n)\,] = \mathsf{E}[\,f(Y)\,]$なることを言う．（秋９）

・期待値の極限なので，分布が等しい確率変数ならば取り替えても成立（確率測度の弱収束を確率変数の言葉で書いたもの）

特性関数（復習）

確率変数 $X: \ \Omega \to \mathbb{R}$ の**特性関数**：$\phi_X(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}X\,t}\,]$（秋６）
$e^{\sqrt{-1}\xi} = \cos\xi + \sqrt{-1}\sin\xi$，複素数値関数の期待値は実部と虚部それぞれの期待値を実部と虚部とする複素数

- X の値の分布を $Q = \mathsf{P}\circ X^{-1}$ とおくと $\phi_X(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}x\,t}\,Q(dx)$
- $t \in \mathbb{R}$ に対して存在し t の連続関数（期待値があれば C^1 級，分散があれば C^2 級）
- $\phi(0) = 1$，$\phi'(0) = \sqrt{-1}m$，$(\log\phi)''(0) = -v$
- $N(m, v)$ の特性関数：$\phi(t) = e^{\sqrt{-1}mt}\, e^{-\frac{v}{2}t^2}$

特性関数と確率測度（復習）

- 確率測度と特性関数は１：１（秋８） 証明は難
- 独立な確率変数の和の特性関数は元の確率変数たちの特性関数の積
- X_n が Y に法則収束することと，特性関数の各点収束が同値である：

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = \phi_Y(t),\ t \in \mathbb{R}\ (\phi_{X_n}(t) = \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1}tX_n}\,])$$ （秋９）

証明は難

中心極限定理の特性関数による表現

定理（再掲）(CLT)：$m = \mathrm{E}[\, X_1 \,]$,$v = \mathrm{V}[\, X_1 \,]$ なる独立同分布確率変数列 X_1, $X_2, \ldots$ について $\frac{1}{\sqrt{nv}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - m)$ は $N(0,1)$ に従う確率変数に法則収束する．◇

$\frac{1}{\sqrt{nv}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - m)$ の特性関数が $n \to \infty$ で各点で $N(0,1)$ の特性関数 $\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ に収束することを証明すればよい．

すなわち，目標は $\phi_n(t) = \mathrm{E}\left[\, e^{\sqrt{-1}t \frac{1}{\sqrt{nv}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - m)} \,\right]$ とおくとき，$\lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$．

中心極限定理の証明

（再掲）$\phi_n(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}t\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m)}\,]$, $\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$e^{a+b} = e^a e^b$だから，$\phi_n(t) = \mathsf{E}[\, \prod_{j=1}^{n} e^{\sqrt{-1}t\frac{1}{\sqrt{nv}}(X_j - m)}\,]$

$$= \mathsf{E}[\, e^{-\sqrt{-1}mt\sqrt{\frac{n}{v}}} \prod_{j=1}^{n} e^{\sqrt{-1}\frac{t}{\sqrt{nv}}X_j}\,].$$

同分布なので X_j の特性関数 $\phi_X(t) = \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}tX_j}\,]$ は j によらない．
独立なのでその指数関数も独立で積の期待値は期待値の積（秋７）．

$$\phi_n(t) = e^{-\sqrt{-1}mt\sqrt{\frac{n}{v}}} \prod_{j=1}^{n} \mathsf{E}[\, e^{\sqrt{-1}\frac{t}{\sqrt{nv}}X_j}\,] = e^{-\sqrt{-1}mt\sqrt{\frac{n}{v}}} \phi_X(\frac{t}{\sqrt{nv}})^n.$$

$$\log \phi_n(t) = -\sqrt{-1}mt\sqrt{\frac{n}{v}} + n \log \phi_X(\frac{t}{\sqrt{nv}}).$$

中心極限定理の証明（続き）

（再掲）$(\log\phi_X)(0) = 0$, $(\log\phi_X)'(0) = \sqrt{-1}m$, $(\log\phi_X)''(0)$
$= -\mathrm{V}[\,X_1\,] = -v$, $\log\phi_n(t) = -\sqrt{-1}mt\sqrt{\dfrac{n}{v}} + n\log\phi_X(\dfrac{t}{\sqrt{nv}})$.

$N(0,1)$ の特性関数は $\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

テーラーの定理（微分積分）：$0 < \theta < 1$ が存在して

$$\log\phi_X(s) = \log\phi_X(0) + s\,(\log\phi_X)'(0) + \frac{1}{2}s^2(\log\phi_X)''(\theta s)$$

$= \sqrt{-1}ms + \dfrac{1}{2}s^2(\log\phi_X)''(\theta s)$. $s = \dfrac{t}{\sqrt{nv}}$ を代入すると

$$\log\phi_n(t) = \frac{t^2}{2v}(\log\phi_X)''(\frac{t\theta}{\sqrt{nv}})$$

ϕ_X が C^2 級で $(\log\phi_X)''(0) = -v$ で $0 < \theta < 1$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\log\phi_n(t) = -\frac{t^2}{2}$$

対数関数は連続関数なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\phi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi(t)$． $\square$

問 1–5 の答え

問 1–5：平均 m，分散 $v > 0$ で特性関数が ϕ の分布に従う独立確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ について，$\lim_{n\to\infty} \log \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1}t\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)}\,]$ を計算せよ． $\diamond$

今回の講義を通して計算すれば答えが出るので復習すること．

答えは $\underline{-\frac{1}{2}t^2}$．

まとめ

中心極限定理： 独立同分布確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ $(m = \mathsf{E}[\,X_1\,],\ v = \mathsf{V}[\,X_1\,])$ について，$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{nv}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m)$ は $N(0,1)$ に従う確率変数に法則収束する．

証明のポイント

- 確率変数の法則収束と特性関数の各点収束は同値
- 独立確率変数の和の特性関数は特性関数の積
- **特性関数** $\phi(t) = \mathsf{E}[\,e^{\sqrt{-1}X\,t}\,]$，
- $\phi(0) = 1$，$\phi'(0) = \sqrt{-1}m$，$(\log\phi)''(0) = -v$．
- テイラーの定理
- $N(0,1)$ の特性関数 $e^{-\frac{1}{2}t^2}$

１０．統計的決定論入門

statistical descision theory：現代的なベイズ統計学の基礎

決定＝意思決定

ビッグデータと高速計算機の時代に人気のベイズ統計学ですが，復権の基礎となった統計的決定論まで立ち戻ることが日本では少ないようなので，この機会に

「統計と確率の基礎 第３版」11章章末からの紹介です

ベイズの定理と事前確率

春（確率論入門Ⅰ）４の復習

例 1．製品が不良品という事象 A，工場B,Cの製品という事象 B, $C = B^c$．買った品が不良品だったとき工場Cの製品だった確率：$\mathrm{P}[\,C \mid A\,] = \dfrac{\mathrm{P}[\,C \cap A\,]}{\mathrm{P}[\,A\,]} = \cdots =$
$\mathrm{P}[\,A \mid C\,] \times \dfrac{\mathrm{P}[\,C\,]}{\mathrm{P}[\,A\,]} = \dfrac{\mathrm{P}[\,A \mid C\,]\mathrm{P}[\,C\,]}{\mathrm{P}[\,A \mid C\,]\mathrm{P}[\,C\,] + \mathrm{P}[\,A \mid B\,]\mathrm{P}[\,B\,]}$（ベイズの定理．$\mathrm{P}[\,C\,]$：事前確率）

・不良品だったという結果から，不良品の多く出るCの製品の可能性をより大きく疑うのは自然，という考えの定量化

・原因についての情報によって結果の評価が精密になったと考える

例 2．人口10万人の市でX氏が容疑者となった．犯人が残した血痕の血液型は100人に1人の割合である．X氏は同じ血液型だった．氏が犯人の確率はいくらか？
BをX氏が犯人である事象，AをX氏の血液型が犯人のと一致する事象，X 氏が犯人であることの事前確率 $p = \mathrm{P}[\,B\,]$ とおく．$p = 0.5$（五分五分）とすると？

・（追加情報が少ないと）恣意的に設定できる事前確率に引きずられる．

尤度と事前確率の積としての事後確率

教科書第３版11章§３

データサイズn：$A=A_1\cap A_2\cap\cdots A_n$ （A_i：i番目のデータについての事象），

・**ベイズの定理**でBとCの比．

・**無作為抽出**を条件付き確率の独立性と理解！($\mathsf{P}[\,A_1\cap A_2\mid B\,]=\mathsf{P}[\,A_1\mid B\,]\mathsf{P}[\,A_2\mid B\,]$)

$$\frac{\mathsf{P}[\,B\mid A\,]}{\mathsf{P}[\,C\mid A\,]}=\frac{\prod_i\mathsf{P}[\,A_i\mid B\,]}{\prod_i\mathsf{P}[\,A_i\mid C\,]}\cdot\frac{\mathsf{P}[\,B\,]}{\mathsf{P}[\,C\,]}$$

・**データ**の分布A：

離散分布$A_i=\{X_i=0\}$，$\{X_i=1\}$（支持率や視聴率）はOK

連続分布$(X=x_i)$は**密度**$f(x_i,\theta)$（条件も連続な場合も込めて$\{B,C\}\to\Theta\ni\theta$）

・**事前分布**密度$u(\theta)$，事後分布密度$\tilde{u}(\overrightarrow{x},\theta)$ （**母数の分布**）

$$\frac{\tilde{u}(\overrightarrow{x},\theta)}{\tilde{u}(\overrightarrow{x},\theta')}=\frac{L_n(\overrightarrow{x},\theta)}{L_n(\overrightarrow{x},\theta')}\frac{u(\theta)}{u(\theta')},\quad \tilde{u}(\overrightarrow{x},\theta)=\frac{L_n(\overrightarrow{x},\theta)u(\theta)}{\displaystyle\int_\Theta L_n(\overrightarrow{x},\theta)u(\theta)\,d\theta}$$

$$L_n(\overrightarrow{x},\theta)=\prod_i f(x_i,\theta)$$：**尤度**

損失と統計的意思決定

科書第３版11章§4

・古典的検定：尤度 $L_n(\overrightarrow{x}, \theta) = \prod_i f(x_i, \theta)$ が大きい分布 (母数 θ)

が尤もらしい（尤度比検定）．

・ベイズ統計学：事前分布 u の自由度「の追加 (?)」

追加の自由度は便利だがデータの解釈が恣意的にならないか？(古典的論争)

・A．Wald：データ（実験，調査）にコスト→際どさに応じた増減→自由度　（cf 単位当落のきわどさに応じた試験勉強時間の配分）

（cf. 古典的検定：サイズから棄却域まで決定してからデータを得れば主観（恣意）は入らない＝精密実験等，理想的状況の統計学）

簡単のためデータサイズ n 固定の場合

$\overrightarrow{x} \in M$（データの取り得る値の集合．尤度 $L_n : M \to \mathbb{R}_+$ は M 上の分布の密度）

$u \in B$（事前分布の集合．u は分布（母数）Θ 上の事前分布の密度）

D：選択肢の集合上の確率の集合（母数の点推定が目標なら $D = \Theta$）

$\Delta = \{q : M \to D\}$：統計的意思決定の集合（q は母数の推定手続）

損失関数 $W(\theta, q(\overrightarrow{x}))$ （母数 $\theta \in \Theta$ を q に基づいて推定した誤差による損失）

損失の期待値

科書第３版11章§4

損失の期待値 $r^*(u,q)=\int_{\Theta\times M} W(\theta,q(\overrightarrow{x}))L_n(\overrightarrow{x},\theta)u(\theta)\,d\theta\,d\overrightarrow{x}$,

$u\in B$, $q\in\triangle$

例． $M=\{0,1\}^n$(**支持率・視聴率**), $\theta=p\in[0,1]=\Theta=D$,

$B=\{[0,1]$ **上の確率**$\}$

$L_n(\overrightarrow{x},\theta)=p^{n\overline{x}}(1-p)^{n(1-\overline{x})}$; $\overline{x}=(x_1+\cdots+x_n)/n$, $W(x,y)=(x-y)^2$

$\triangle\ni q$ **の例：**

- $q(\overrightarrow{x})=\overline{x}$ **（単純平均による母数の推定）**
- $q^*(\overrightarrow{x}):=\dfrac{n\overline{x}+(2\sqrt{n})^{-1}}{n+\sqrt{n}^{-1}}$ **→** $r(u,q^*)=(\sqrt{n}+1)^{-2}/4$, $u\in B$ **教**(11.13)

- Θ, L_n, M, D, W, $u\in B$, $q\in\triangle$ **を決めると** $r(u,q)$ **は決まる**
- u **を決めたら** W **が最小になる関数** $q=q^*$ **を選ぶべき（ベイズ解）**

ミニマックス解

教科書第３版11章§4

・uを決めたらWが最小になる関数$q = q^*$を選ぶべき（ベイズ解）

例：$q = q^*$は事前分布$u^*(p) = (p(1-p))^{\sqrt{n}/2-1} / \int_0^1 (p(1-p))^{\sqrt{n}/2-1} dp$に対して損失を最小にする：$r(u^*, q^*) = \min_{q \in \triangle} r(u^*, q)$ 教(11.14)

(11.13)(11.14)→

$$\min_{q \in \triangle} \max_{u \in B} r(u,q) \geqq r(u^*, q^*) = \max_{u \in B} r(u, q^*) \geqq \max_{u \in B} \min_{q \in \triangle} r(u,q)$$

この例を含め，コンパクト性の議論が成り立つ時，逆向きの不等式も成り立つ：

ミニマックス定理（証明は教11章§補足）．（適切な数学的仮定の下で）

$\min_{q \in \triangle} \max_{u \in B} r(u,q) = \max_{u \in B} \min_{q \in \triangle} r(u,q) = r(u^*, q^*)$を満たす$(u^*, q^*)$がある． $\diamond$

右辺：推定（意思決定）手続q毎に最悪の事前確率uをとって比較するとベイズ解q^*が最善の選択．(事前分布の恣意性がない)

注．零和非協力ゲーム理論と同様に点推定ではなく，$\triangle$を推定値Θの上の確率の集合にとるとき均衡解が存在．

ワルドの理論

教科書第３版11章§5

（ミニマックス解は事前分布の恣意性のない推定法だが,）実用上は事前分布 u を固定すると計算が便利（なので流行）.（しつこく,）追加の自由度（事前分布）の危うさは？
ベイズ解 q^* に意思決定（母数推定値）： $r(u, q^*) = \min_{q \in \triangle} r(u, q)$
事前分布 u を変えると q^* も変わるが，それを集めた集合は許容的解の集合に一致：

ワルドの定理（証明は教11章§補足）．ベイズ解の集合＝許容的解集合◇
注．ミニマックス定理と同様に点推定ではなく，$\triangle$ を推定値 Θ の上の確率の集合にとるとき集合として一致．

- **q が許容的解＝「合理的な意思決定」＝どの戦略 $q' \in \triangle$ に対しても「全ての $u \in B$ に対して損失が一致する」か「q' より損失が少ない u がある」かいずれか成り立つ（q より良い戦略がない），ような q**

ベイズ解はどれかの事前分布に対して「最強」の選択（推定方法）だが，ワルドの定理は逆に考慮の価値のある合理的選択はすべてベイズ解のどれかだとも言う

尤度比検定

教科書第３版11章§5

非ベイズ統計学：事前分布uがない→尤度 L_n で統計的推測

例．２仮説・尤度比検定：仮説H_i： $\theta=\theta_i$，$i=0,1$，いずれか採択

$$D=\{d_0,\ d_1\}=\{H_0\text{を採択},\ H_1\text{を採択}\}$$

尤度比$\kappa(\overrightarrow{x})=\dfrac{L_n(\overrightarrow{x},\theta_1)}{L_n(\overrightarrow{x},\theta_0)}$

危険率から決まるκ_0（古典的推測では理論の外で先に意思決定）

$$q_{\kappa_0}(\overrightarrow{x})=\begin{cases} d_0\,, & \kappa(\overrightarrow{x})<\kappa_0 \\ d_1\,, & \kappa(\overrightarrow{x})>\kappa_0 \end{cases}$$

ネイマン・ピアソンの定理（証明は教11章§5）．危険率αい下の検定$q\in\triangle$のうち，αに対応するκ_0の尤度比検定は検定力が最大（第２種の過誤が最小）　◇

→尤度比検定は古典的推測の意味で合理的な選択．

危険率の集合とベイズ解の集合

教科書第３版11章§5

定理（証明は教11章§5最終段落）．２仮説検定において，
ベイズ解の集合＝尤度比検定の集合 ◇

$$\{q^* \in \Delta \mid \exists u \in B;\ \text{教}(11.14)\} = \{q_{\kappa_0} \mid \kappa_0 > 0\}$$

→許容的解は尤度比検定（集合の意味で古典的推測とベイズ統計学は一致）

・事前分布 $u = (u_0, u_1)$，損失 $w_i = W(\theta_i, d_{1-i})$，$W(\theta_i, d_i) = 0$, $i = 0, 1$ とおくと，$\kappa_0 = \dfrac{w_0 u_0}{w_1 u_1}$ によって尤度比検定とベイズ解が対応

・事前確率という（古典統計的推測になかった）自由度は,（古典推測にあった）危険率の選択という自由度と集合として一致（余分な危うさではなかった！）

残った注意

○古典的推定検定（危険率の選択）は何を切ったか（失敗時の悔やみや諦め）が明確．海難事故救助で探索範囲を決めて探索する例（春学期４．）．事前分布の選択は，集合として危険率の選択の集合と一致するだけで，選択の意味を直接把握できない可能性．
○選択を見ず抽象化したから大規模機械処理に向くとも言える．仕事と割り切って客観的・機械的に処理するには向く（写真の自動焦点や入園顔認証＝間違えてもご愛敬・小規模金銭損失）が，人や社会が「マジ」になることに使えない．犯罪捜査の効率化には使えても，危険地域の予報すら（地域外での訴えを狂言扱いしかねず）危ない．

まとめ

- ベイズ解の**集合**＝許容的解の**集合**（ワルドの定理）
- 集合：事前分布の自由度＝古典的な統計的検定の危険率の自由度
- 事前分布は余分な危うさではなかった
- 事前分布の選択は一方で選択の意味がわかりにくい可能性がある

１２．ミニマックス定理の分離定理による証明

（二人零和戦略型）非協力ゲーム，ナッシュ均衡，混合戦略

（関数の値域における）分離定理

ミニマックス定理とナッシュ均衡の存在の分離定理による証明

「統計と確率の基礎 第３版」１１章章末§補足からの紹介です

（教科書はベイズ統計学の章ですが，非協力ゲームの理論と共通の数学が使える箇所がある，という話）

（二人零和戦略型）非協力ゲーム（復習）

- **二人**：　プレーヤー１と２　（n 人可能だが表の見やすさのため）
- **非協力ゲーム**：　各自の選択（純戦略）の組ごとに各々の利得
- **戦略型**：　戦略を同時に公開（例：後出しなしのじゃんけん）

例（硬貨合わせ）：１の純戦略の集合 {表，裏} と２の —— {表，裏} の直積集合から利得の組（１の利得，２の利得）の集合への関数

f：$\{$(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)$\}$ $\to$ $\mathbb{R}^2$

→　**利得行列**：

- **零和**：　$f_2(s_1, s_2) = -f_1(s_1, s_2)$

→　利得行列にプレーヤー１の利得だけ書く

		player2 の純戦略	
		表	裏
player1 の純戦略	表	1	-1
	裏	-1	1

注.「1」は零和でないときの書き方では「$(1, -1)$」，-1 は $(-1, 1)$

混合戦略（復習）

零和 (zero-sum) → 全体の富は不変，互いに相手からかすめ取るだけ
直感：損するのはヘマしたときだけ，双方最善を尽くすと「どこか」に落ち着く

- mini-max 定理： この直感は零和では一般的に（例外なく）正しい

- 「どこか」の精密化： ナッシュ均衡，混合戦略

硬貨合わせもじゃんけんも純戦略を一つ選ぶと，相手が対応する必勝純戦略→こちらも対抗戦略→落ち着かない（ループ）

- 混合戦略：プレーヤー1の表の確率 p，2の表の確率 q

		q	$1-q$
	$1\backslash 2$	表	裏
p	表	1	-1
$1-p$	裏	-1	1

期待利得 $F_1(p,q)$
$= \mathrm{E}[\, f_1(X_1,X_2)\,]$
$= (2p-1)(2q-1)$,
（零和→ $f_2 = -f_1$ →）
$F_2(p,q) = -F_1(p,q)$

- 混合戦略 $\Leftrightarrow$ 組 (p,q) （注：純戦略の組を含む；$(p,q)=(1,1)$：(表, 表)）

ナッシュ均衡

・混合戦略の組 (p^*, q^*) が**ナッシュ均衡**とは，

$(\forall p, q)\ F_1(p^*, q^*) \geqq F_1(p, q^*)$ かつ $F_2(p^*, q^*) \geqq F_2(p^*, q)$

直感：双方自分が変更して自分の利得が増えない＝最善を尽くした落ち着きどころ

零和のとき：　$F_1(p^*, q) \geqq F_1(p^*, q^*) \geqq F_1(p, q^*)$（鞍点）

硬貨合わせの例：　$F_1(p, q) = (2p-1)(2q-1)$　→

$(p^*, q^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，$F_1(p^*, q^*) = 0$　（双方表裏半々が最善＝じゃんけん）

ナッシュ均衡（零和のとき鞍点に一致）が**あれば**，最善を尽くした結果その期待利得が実現する，と解釈できる

定理：　零和ゲームには鞍点（ナッシュ均衡）が必ずある　◇

純戦略は m 個と n 個でも成り立つ，利得行列 $A_{s_1,s_2} = f_1(s_1, s_2)$ 任意

番外編：非零和ゲームはいろいろ

- 零和で支配戦略あるときは純戦略が均衡（一択）

1\2	表	裏
表	1	0
裏	0	-1

1\2	表	裏
表	1	0
裏	2	-1

右はプレーヤー２が確定，結果１も

- 非零和，$\min\max \neq \max\min$：　賢者の贈物（男女の争い），チキンレース

1\2	贈らない	贈る
贈る	$(2,1)$	$(0?,0?)$
贈らない	$(0,0)$	$(1,2)$

1\2	譲る	譲らない
譲らない	$(1,-1)$	$(-2,-2)$
譲る	$(0,0)$	$(-1,1)$

- 非零和，純戦略支配：　囚人のジレンマ$(a=2)$，協力を要する難題$(a=0)$
- 非零和，じゃんけん型：　査察$(c \gg 1, b > 0)$＝カンニング$(b \gg 1, c > 0)$

1\2	協力	裏切
協力	$(1,1)$	$(0,a)$
裏切	$(a,0)$	$(0,0)$

一択

1\2	正	不正
検査	$(0,0)$	$(0,-1)$
放置	$(1,0)$	$(-b,c)$

混合戦略

- n人への拡張：　共有地の悲劇（市場の失敗＝囚人のジレンマ），ただ乗り

ナッシュ均衡の存在とミニマックス定理

定理（均衡の存在）． $\Delta_m = \{p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{j=1}^{m} p_i = 1\}$，

$F(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i\, f(i,j)\, q_j$ で $F:\ \Delta_m \times \Delta_n \to \mathbb{R}$ を定義するとき，

$(\forall p \in \Delta_m,\ q \in \Delta_n))\ F(p,q^*) \leqq F(p^*,q^*) \leqq F(p^*,q)$

となる $(p^*,q^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ が存在する． ◇

証明． 次定理で $K_i(q) = \sum_{j=1}^{m} f(i,j) q_j$ ととればよい． □

主定理． $S \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$K:\ S \to \mathbb{R}^m$ を凸関数とする．$F(p,q) = p \cdot K(q) = \sum_{i=1}^{m} p_i\, K_i(q)$ で $F:\ \Delta_m \times S \to \mathbb{R}$ を定義するとき，$\min_{q \in S} F(p,q) > -\infty$，$p \in \Delta_m$，ならば $\max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in S} F(p,q) = \min_{q \in S} \max_{p \in \Delta_m} F(p,q) = \min_{q \in S} F(p^*,q) = \max_{p \in \Delta_m} F(p,q^*) = F(p^*,q^*)$ となる $(p^*,q^*) \in \Delta_m \times S$ が存在する． ◇

注． 主定理結論左半分が**ミニマックス定理**，右半分が**鞍点定理**． ◇

凸集合と分離定理（復習）

直感．
凸集合：　膨らませた風船
分離定理：　２つの風船がくっついてなければ間に仕切りを入れて別の半空間に（当然！）　→　**何次元でも，開集合なら接していても**

•$A \subset \mathbb{R}^n$が**凸集合**：　$u, v \in A$かつ$0 < t < 1$ならば$tu + (1-t)v \in A$
•　A, Bが凸集合ならば$A - B := \{u - v \mid u \in A,\ v \in B\}$も凸集合
注．　$A - B$はここでは$A \setminus B = A \cap B^c$と異なる

以下，**内積を$a \cdot b$と書く．**
・原点と閉凸集合の分離定理：　$A \subset \mathbb{R}^n$が閉凸集合で$\overrightarrow{0} \notin A$ならば，どの$v \in A$も$q \cdot v \geqq c$を満たす，$q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$と正定数$c$の組がある．　◇
・原点と原点に接する凸集合の分離定理：　Aが凸集合で$\overrightarrow{0} \in \overline{A} \setminus A$ならばどの$v \in A$も$q \cdot v \geqq 0$を満たす$q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$がある．　◇

分離定理と関数の値域の集合

定理． $A, B \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合で $A \cap B = \emptyset$ ならばどの $u \in A$ も $q \cdot u \geqq c$ かつどの $v \in B$ も $q \cdot v \leqq c$ を満たす，ゼロでないベクトル $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ と実定数 c の組がある． $\diamond$

ここまで既知とする（経済数学２）

定理． $S \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$h: S \to \mathbb{R}^k$ を凸関数（値の各成分ごとに凸関数）であって，$\min_{x \in S} \max_{i=1,\dots,k} h_i(x) \geqq 0$ を満たすならば，

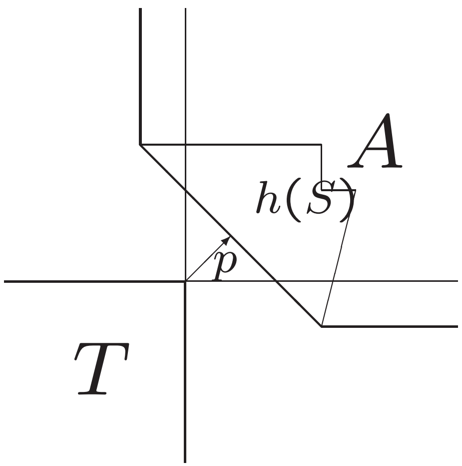
$$\exists p \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{\overrightarrow{0}\}; \ \min_{x \in S} p \cdot h(x) \geqq 0 \qquad \diamond$$

注． h_i が１次式 $h_i(x) = (a_i, x)$ で $S = \mathbb{R}^n \Rightarrow$ 等号（Gordan の定理）（経済数学２）

関数の値域の集合の分離定理の証明

証明. $A = \{u \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in S;\ u \geqq h(x)\}$

第３象限（境界を除く）$T = \{u \in \mathbb{R}^k \mid u < \overrightarrow{0}\}$ → $A \cap T = \emptyset$



T**は凸，**A**も（**h**が凸関数だから）凸　＋　分離定理　→**

$p \cdot u \geqq c \geqq p \cdot v,\ u \in A,\ v \in T.$ **となる**$p \in \mathbb{R}^k \setminus \{\overrightarrow{0}\}$**と**$c \in \mathbb{R}$**の組がある**

T**の中で**$v_i \to -\infty$**とできるので，**$p_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, k$**.**

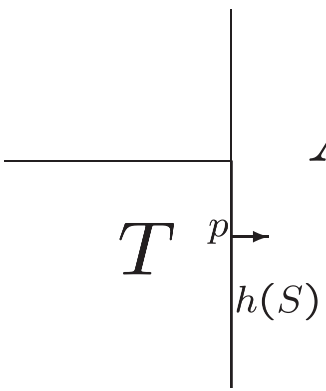
さらにT**の中で**$v \to \overrightarrow{0}$**とできるので，**$c \geqq 0$**.**

$\exists p \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ (\forall u \in A)\ p \cdot u \geqq 0.$ **特に**$x \in S$**ならば**$h(x) \in A$**だから** □

主定理の証明

主定理の証明． $\min_{y\in V}\max_{x\in U} F(x,y) \geqq \max_{x\in U}\min_{y\in V} F(x,y) \geqq \min_{y\in V} F(x^*,y)$ **は一切と無関係に成立．**
あとは $\min_{q\in S} F(p^*,q) \geqq \min_{q\in S}\max_{p\in\triangle_m} F(p,q)$ **が成り立つ** $p^*\in\triangle_m$ **があることを証明すればミニマックス定理が成り立つ．**
$h_i(x) = K_i(x) - \min_{q\in S}\max_{p\in\triangle_m} F(p,q),\ i=1,\dots,m$ **とおくと** K_i **が凸なので** h_i **も凸で，**

$$\max_{p\in\triangle_m} F(p,q) = \max_{p\in\triangle_m} p\cdot K(q) = \max_{i\in\{1,\dots,m\}} K_i(q),\ q\in S, \quad \rightarrow \quad \min_{x\in S}\max_{i\in\{1,\dots,m\}} h_i(x) = 0.$$



$h_i,\ i=1,\dots,m,$ **をたばねたものを** $h:\ S\to\mathbb{R}^m$ **とおくと，関数の値域の分離定理** $(k=m)$ **から** $\min_{x\in S} p\cdot h(x) \geqq 0$ **となる** $p\in\mathbb{R}^m_+\setminus\{\vec{0}\}$ **がある．**

$\sum_{i=1}^m p_i > 0$ **だから，** $p^* := \dfrac{1}{\sum_{i=1}^m p_i} p \in \triangle_m$ **であって，** $\min_{q\in S} p^*\cdot h(q) \geqq 0$**．**

よって minimax **定理が成り立つ．**

冒頭の議論（または $\min_{x\in S}\max_{i\in\{1,\dots,m\}} h_i(x) = 0$**）から，全** i **について** $h_i(q^*) \leqq 0$**，かつ** $p^*\cdot h(q^*) = 0$**，**
なる q^* **がある．前者から任意の** $p\in\triangle_m$ **について** $p\cdot h(q^*) \leqq 0$**，**
したがって， $F(p^*,q^*) - F(p,q^*) = p^*\cdot K(q^*) - p\cdot K(q^*) = p^*\cdot h(q^*) - p\cdot h(q^*) \geqq 0$**．**
後者から $\min_{q\in S} p^*\cdot h(q) = p^*\cdot h(q^*)$**．すなわち鞍点定理も成り立つ．** □

まとめ

プレーヤー１の利得行列 $f(s_1, s_2)$ の二人零和戦略型非協力ゲームでは，
ある混合戦略（純戦略集合上の確率）の組 (p^*, q^*) があって，期待利得
$F(p,q) = \mathrm{E}_{(p,q)}[\, f(X_1, X_2)\,] = \sum_{s_1,s_2} p(s_1) f(s_1, s_2) q(s_2)$ がそこで鞍点：

$F(p^*, q) \geqq F(p^*, q^*) \geqq F(p, q^*)$ ◇

（→零和なので） (p^*, q^*) は**ナッシュ均衡点**（零和＝取り合い，だから痛み分けがある）

ミニマックス定理と鞍点定理 $S \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$K:\ S \to \mathbb{R}^m$ を凸関数とする．$F(p,q) = p \cdot K(q)$ で $F:\ \Delta_m \times S \to \mathbb{R}$ を定義するとき，

$\min_{q \in S} F(p,q) > -\infty$，$p \in \Delta_m$，ならば $\exists (p^*, q^*)$;

$\max_{p\in\Delta_m} \min_{q \in S} F(p,q) = \min_{q \in S} \max_{p\in\Delta_m} F(p,q) = \min_{q \in S} F(p^*, q) = \max_{p\in\Delta_m} F(p, q^*) = F(p^*, q^*)$ ◇

（$K(q)_{s_1} = \sum_{s_2} f(s_1, s_2) q(s_2)$）

・分離定理との関係：$h_i(x) = K_i(x) - \min_{q\in S} \max_{p\in\Delta_m} F(p,q)$，$A = \{u \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in S;\ u \geqq h(x)\}$

$T =$ 第３象限 → $A \cap T = \emptyset$ （**関数の値域についての分離定理**）

教科書・参考書

服部哲弥，統計と確率の基礎 第３版，学術図書，2014

参考書

服部哲弥，Amazon **ランキングの謎を解く，**

化学同人，2011